Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 3, 361 – 375

Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з обмеженою узагальненою похідною у просторі L_q

Катерина В. Швай

(*Представлена Ф. Абдуллаєвим*)

Анотація. Встановлено порядкові оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень функцій D_β^ψ та класів (ψ,β)-диференційовних періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q, $2 \le q < \infty$. Показано, що при вказаних обмеженнях на параметр q, найкращі M-членні тригонометричні наближення $e_M(L^\psi_{\beta,1})_q$ дають кращий порядок, ніж найкращі ортогональні тригонометричні наближення $e^\perp_M(L^\psi_{\beta,1})_q$.

2010 MSC. 42A10, 42B99.

Ключові слова та фрази. Найкращі тригонометричні наближення, ядро Бернуллі, ряди Фур'є, східчастий гіперболічний хрест, ядро Валле–Пуссена.

1. Вступ

Нехай $L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$ — простір 2π–періодичних за кожною змінною функцій f зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q(\pi_d)} = \|f\|_q = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},\ 1 \le q < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\pi_d} |f(x)|,$$

де $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, а $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi, \pi]$.

Стаття надійшла в редакцію 05.09.2016

ISSN 1810 – 3200.

Будемо надалі вважати, що для $f \in L_1(\pi_d)$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx_j = 0, \ j = \overline{1,d}.$$

Для класів періодичних функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$, які для функцій однієї змінної були вперше запропоновані О. І. Степанцем [1, с. 25] (див. також [2, с. 132]), в роботі вивчається величина $e_M\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_q$, $1 \le q \le \infty$. Вказану апроксимативну характеристику введемо пізніше, а зараз означимо відповідні класи функцій.

Для цього розглянемо ряд Фур'є функції $f \in L_1(\pi_d)$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$. Далі, нехай $\psi_j(\cdot) \neq 0$ — довільні функції натурального аргументу, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, $\mathring{\mathbb{Z}}^d = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d$. Припустимо, що ряд

$$\sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn} k_j}}{\psi_j(|k_j|)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції. Наслідуючи О. І. Степанця [1, с. 25], назвемо її (ψ,β)–похідною функції f, і позначимо через f^{ψ}_{β}. Говорять, що $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$, якщо $\left\|f^{\psi}_{\beta}(\cdot)\right\|_p \le 1, \ 1 \le p \le \infty$.

Зазначимо, що класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ при $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, $k_j \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $j = \overline{1,d}$, співпадають із добре відомими класами Вейля-Надя $W^r_{\beta,p}$ (див., наприклад, [1, с. 25]).

Поряд із класами $L^{\psi}_{\beta,p}$ будемо розглядати також функції D^{ψ}_{β}, ряди Фур'є яких мають вигляд

$$\sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(|k_j|) e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn} k_j} e^{i(k,x)}.$$

У випадку $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, $k_j \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $j = \overline{1,d}$, функції D^{ψ}_{β} є багатовимірними аналогами ядра Бернуллі (див., наприклад, [3, с. 31]).

Відомо, що кожну з функцій $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$ можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = \left(\varphi * D^{\psi}_{\beta}\right)(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \varphi(x-t) D^{\psi}_{\beta}(t) dt,$$

де $\|\varphi\|_p \leq 1$ і функція φ майже всюди співпадає із f^{ψ}_{β}.

Тепер дамо означення досліджуваної апроксимативної характеристики.

Отже, найкращим M-членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q(\pi_d), 1 \leq q \leq \infty$, називають величину

$$e_M(f)_q = \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i\left(k^j, \cdot\right)} \right\|_q, \tag{1.1}$$

де $\left\{k^j\right\}_{j=1}^{M}$ — система векторів $k^j = \left(k^j_1, ..., k^j_d\right)$ із цілочисельними координатами, а c_j, $j = \overline{1, M}$, — довільні комплексні числа.

Аналогічні величини розглядають і для функціональних класів, а саме, якщо $F \subset L_q$, то покладають

$$e_M(F)_q = \sup_{f \in F} e_M(f)_q. \tag{1.2}$$

У випадку, коли $c_j = \widehat{f}\left(k^j\right)$, величини (1.1) та (1.2) будемо позначати $e^{\perp}_M(f)_q$ та $e^{\perp}_M(F)_q$, і називати найкращим ортогональним наближенням функції f та класу F відповідно.

Величину $e_M(f)_2$ вперше, в більш загальній ситуації, було введено С. Б. Стєчкіним [4]. Перші оцінки величини $e_M(f)_\infty$ для деяких індивідуальних функцій були отримані Р. С. Ісмагіловим [5]. Систематичне ж вивчення величини (1.2) на класах періодичних функцій багатьох змінних $W^r_{\beta,p}$ та H^r_p було започатковано В. Н. Темляковим [3,6–8]. Згодом дослідження найкращих M–членних тригонометричних наближень для індивідуальних функцій та класів функцій як однієї, так і багатьох змінних, активно проводилося у роботах Е. С. Белінського [9,10], А. С. Романюка [11–17], R. A. De Vore, V. N. Temlyakov [18], Dinh Dung [19,20], та ін. З більш детальною історією дослідження величин (1.1), (1.2) та відповідною бібліографією можна ознайомитися в [15,17,21].

Метою нашої роботи є встановлення порядкових оцінок найкращих M-членних тригонометричних наближень функцій D^{ψ}_{β} та класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі L_q, $2 \leq q < \infty$, при певних обмеженнях на послідовності $\psi_j(\cdot)$, $j = \overline{1, d}$.

2. Допоміжні твердження

Наведемо декілька тверджень, які будемо використовувати при доведенні одержаних результатів. Для їх формулювання нам знадобляться ще деякі позначення.

Через D будемо позначати множину функцій натурального аргументу $\psi_j(\cdot)$, $j=\overline{1,d}$, які задовольняють умови:

1. $\psi_j(\cdot)$, $j=\overline{1,d}$, — додатні та незростаючі;

2. $\forall j=\overline{1,d}$ $\exists M_j>0$ таке, що $\forall l\in\mathbb{N}$ $\frac{\psi_j(l)}{\psi_j(2l)}\le M_j$.

Зазначимо, що до вказаної множини належать, зокрема, функції $\psi_j(|k_j|)=\frac{1}{|k_j|^{r_j}}$, $\psi_j(|k_j|)=\frac{\ln^{\alpha_j}(|k_j|+1)}{|k_j|^{r_j}}$, $r_j>0$, $k_j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, та інші.

Далі, кожному вектору $s=(s_1,\dots,s_d)$, $s_j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $j=\overline{1,d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s)=\left\{k=(k_1,\dots,k_d):\ \left[2^{s_j-1}\right]\le|k_j|<2^{s_j},\ j=\overline{1,d}\right\},$$

де $[\cdot]$ — ціла частина, і для $f\in L_1(\pi_d)$ введемо позначення

$$\delta_s(f,x)=\sum_{k\in\rho(s)}\widehat{f}(k)e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k)$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Також нами буде використовуватися множина $Q_n=\bigcup\limits_{(s,1)<n}\rho(s)$, яку називають “східчастим гіперболічним хрестом” [3, с. 7]. Відомо, що кількість точок цієї множини за порядком дорівнює $2^n n^{d-1}$ [3, с. 70].

Для величин A та B під записом $A\ll B$ будемо розуміти, що величина A менша за порядком за величину B, тобто існує стала $C_1>0$ така, що $A\le C_1B$. Якщо $A\ll B$ і $B\ll A$, то будемо позначати $A\asymp B$ і говорити, що величини A та B мають однаковий порядок.

Результати роботи будемо формулювати в термінах таких апроксимативних характеристик:

$$\Phi(n)=\min_{(s,1)=n}\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(2^{s_j}\right),\quad \Psi(n)=\max_{(s,1)=n}\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(2^{s_j}\right).$$

Крім цього, далі нам знадобляться тригонометричні поліноми, які побудовані на основі ядер Валле-Пуссена. Отже, нехай

$$V_m(x)=1+2\sum_{k=1}^{m}\cos kx+2\sum_{k=m+1}^{2m-1}\left(1-\frac{k-m}{m}\right)\cos kx,\quad m\in\mathbb{N}.$$

Тепер, кожному вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right).$$

Зауважимо, що $\|A_s(\cdot)\|_1 \le C_2,\ C_2 > 0$.

Далі, для $f \in Ł_1(\pi_d)$ будемо позначати

$$A_s(f, x) = (f * A_s)(x),$$

де “$*$” — операція згортки.

Перейдемо до формулювання допоміжних тверджень.

Лема 2.1. [10] *Нехай $2 < q < \infty$. Тоді для будь-якого тригонометричного полінома $P(\theta_N; x)$, що містить не більше N гармонік, і для довільного $M < N$ знайдеться тригонометричний поліном $\widetilde{P}(\theta_M; x)$, у якого не більше M коефіцієнтів відмінних від нуля, такий що*

$$\left\| P(\theta_N; \cdot) - \widetilde{P}(\theta_M; \cdot) \right\|_q \ll \left(\frac{N}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \|P(\theta_N; \cdot)\|_2 ,$$

причому $\theta_M \subset \theta_N$.

Лема 2.2. [3, с. 11] *При $\gamma > 0$ має місце співвідношення*

$$\sum_{(s,1) \ge n} 2^{-\gamma(s,1)} \asymp n^{d-1} 2^{-\gamma n}.$$

Також будемо використовувати твердження, яке є наслідком теореми 1 із [22].

Лема 2.3. *Нехай $1 < p < \infty$, $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi_j \in D$, $j = \overline{1, d}$. Тоді для будь-якого $s \in \mathbb{N}^d$ справедлива оцінка*

$$\|\delta_s(f, \cdot)\|_p \asymp \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \left\| \delta_s\left(f^{\psi}_{\beta}, \cdot\right) \right\|_p .$$

Лема 2.4. [3, с. 25] *При $1 \le p < q < \infty$, $f \in L_p(\pi_d)$, справедлива оцінка*

$$\sum_{s} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^q \cdot 2^{(s,1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) q} \gg \|f\|_q^q .$$

Теорема 2.1. (Літтлвуда–Пелі, див., наприклад, [23, с. 52–56]) *Нехай задано $1 < q < \infty$. Тоді існують такі додатні сталі $C_3(q)$ та $C_4(q)$, що для кожної функції $f \in L_q(\pi_d)$ має місце оцінка*

$$C_3(q)\|f(\cdot)\|_q \le \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \le C_4(q)\|f(\cdot)\|_q.$$

Теорема 2.2. [24] *Нехай $1 < q \le 2$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$ не зростають. Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \ll e_M\left(D^{\psi}_{\beta}\right)_q$$

$$\ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}.$$

3. Основні результати

Справедлива теорема.

Теорема 3.1. *Нехай $2 \le q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{1+\varepsilon}$ не зростають. Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{\frac{1}{2}} \ll e_M\left(D^{\psi}_{\beta}\right)_q \ll \Psi(n) M^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. За заданим M виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалась умова $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Поліном, яким будемо наближати функції D^{ψ}_{β}, шукатимемо у вигляді

$$P(\theta_M; x) = \sum_{(s,1)<n} \delta_s\left(D^{\psi}_{\beta}; x\right) + \sum_{n \le (s,1) < \alpha n} P(\theta_{N_s}; x), \tag{3.4}$$

де $\alpha > 1$ — деяке число, яке буде уточнено пізніше, а $P(\theta_{N_s}; x)$ — поліноми, побудовані згідно з лемою 2.1 так, щоб виконувалась умова

$$\left\|\delta_s\left(D^{\psi}_{\beta};\cdot\right) - P(\theta_{N_s};\cdot)\right\|_q \ll \left(\frac{2^{(s,1)}}{N_s}\right)^{\frac{1}{2}} \left\|\delta_s\left(D^{\psi}_{\beta};\cdot\right)\right\|_2. \tag{3.5}$$

Оцінимо величину $\left\|D_{\beta}^{\psi}(\cdot)-P\left(\theta_M;\cdot\right)\right\|_q$. Оскільки

$$D_{\beta}^{\psi}(x)=\sum_{s}\delta_s\left(D_{\beta}^{\psi};x\right),$$

то згідно з (3.4), скориставшись нерівністю Мінковського, матимемо

$$\left\|D_{\beta}^{\psi}(\cdot)-P\left(\theta_M;\cdot\right)\right\|_q=\left\|\sum_{n\le(s,1)<\alpha n}\left[\delta_s\left(D_{\beta}^{\psi};\cdot\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-P\left(\theta_{N_s};\cdot\right)\right]+\left[D_{\beta}^{\psi}(\cdot)-\sum_{(s,1)<\alpha n}\delta_s\left(D_{\beta}^{\psi};\cdot\right)\right]\right\|_q$$

$$\le\left\|\sum_{n\le(s,1)<\alpha n}\left[\delta_s\left(D_{\beta}^{\psi};\cdot\right)-P\left(\theta_{N_s};\cdot\right)\right]\right\|_q$$

$$+\left\|D_{\beta}^{\psi}(\cdot)-\sum_{(s,1)<\alpha n}\delta_s\left(D_{\beta}^{\psi};\cdot\right)\right\|_q=I_1+I_2. \tag{3.6}$$

Далі одержимо оцінки величин I_1 та I_2. В першу чергу зазначимо, що оцінка величини I_2 була встановлена у [25] під час відшукання порядкових співвідношень для найкращих ортогональних тригонометричних наближень ядер D_{β}^{ψ}, а саме

$$I_2=\left\|D_{\beta}^{\psi}(\cdot)-\sum_{(s,1)<\alpha n}\delta_s\left(D_{\beta}^{\psi};\cdot\right)\right\|_q$$

$$\ll\Psi([\alpha n])2^{\alpha n\left(1-\frac{1}{q}\right)}(\alpha n)^{\frac{d-1}{q}}. \tag{3.7}$$

Перейдемо до встановлення оцінки величини I_1. Використавши послідовно теорему 2.1, нерівність Мінковського та беручи до уваги співвідношення (3.5), одержимо

$$I_1\ll\left\|\left(\sum_{n\le(s,1)<\alpha n}\left|\delta_s\left(D_{\beta}^{\psi};\cdot\right)-P\left(\theta_{N_s};\cdot\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q$$

$$\le\left(\sum_{n\le(s,1)<\alpha n}\left\|\delta_s\left(D_{\beta}^{\psi};\cdot\right)-P\left(\theta_{N_s};\cdot\right)\right\|_q^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll \left(\sum_{n \le (s,1) < \alpha n} \frac{2^{(s,1)}}{N_s} \left\| \delta_s \left(D_\beta^\psi ; \cdot \right) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{3.8}$$

Для продовження оцінки (3.8), встановимо попередньо оцінку величини $\left\| \delta_s \left(D_\beta^\psi ; \cdot \right) \right\|_2$. Застосовуючи рівність Парсеваля, будемо мати

$$\left\| \delta_s \left(D_\beta^\psi ; \cdot \right) \right\|_2 = \left\| \sum_{k \in \rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(|k_j| \right) e^{i \frac{\pi \beta_j}{2} \mathrm{sgn} k_j} e^{i(k, \cdot)} \right\|_2$$

$$= \left(\sum_{k \in \rho(s)} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(|k_j| \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j^2 \left(2^{s_j} \right) 2^{s_j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\frac{(s,1)}{2}} \prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j} \right) . \tag{3.9}$$

Повертаючись до (3.8) та враховуючи (3.9), отримаємо

$$I_1 \ll \left(\sum_{n \le (s,1) < \alpha n} \frac{2^{(s,1)}}{N_s} 2^{(s,1)} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{n \le (s,1) < \alpha n} \frac{2^{2(s,1)}}{N_s} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{3.10}$$

Далі для кожного $s: \ (s,1) \in [n; \alpha n)$ покладемо

$$N_s = \left[\prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j} \right) 2^{(s,1)} \Psi^{-1}(n) \right] + 1.$$

Покажемо, що кількість гармонік, які містяться в сукупності поліномів $P \left(\theta_{N_s}; x \right)$ при $s: \ n \le (s,1) < \alpha n$, за порядком не перевищує M. Попередньо зазначимо, що відповідно до умови теореми, існує $\varepsilon > 0$, для якого $\psi_j \left(2^{s_j} \right) 2^{s_j (1+\varepsilon)}$, $j = \overline{1,d}$, не зростають, тому не зростає також і $\Psi(l) 2^{l(1+\varepsilon)}$.

Враховуючи цю обставину, та використовуючи лему 2.2, отримаємо

$$\sum_{n \le (s,1) < \alpha n} N_s \le \Psi^{-1}(n) \sum_{n \le (s,1) < \alpha n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j} \right) 2^{(s,1)} + \sum_{n \le (s,1) < \alpha n} 1$$

$$\ll \Psi^{-1}(n)\sum_{l=n}^{\infty}\sum_{(s,1)=l}\left(\max_{(s,1)=l}\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(2^{s_j}\right)\right)2^{(s,1)}+n^d$$

$$=\Psi^{-1}(n)\sum_{l=n}^{\infty}\Psi(l)2^{l(1+\varepsilon)}\sum_{(s,1)=l}2^{-(s,1)\varepsilon}+n^d$$

$$\leq 2^{n(1+\varepsilon)}\sum_{(s,1)\geq n}2^{-(s,1)\varepsilon}+n^d$$

$$\ll 2^{n(1+\varepsilon)}\cdot 2^{-n\varepsilon}n^{d-1}+n^d\ll 2^n n^{d-1}\asymp M. \tag{3.11}$$

Крім цього відмітимо, що кількість гармонік, які містяться у першому доданку правої частини (3.4), також не перевищує за порядком M, оскільки, як зазначалося вище, $|Q_n|\asymp 2^n n^{d-1}$.

Таким чином, підставляючи у (3.10) замість N_s його значення та проводячи міркування, аналогічні до тих, які застосовувалися при встановленні (3.11), одержимо

$$I_1\ll\left(\sum_{n\leq(s,1)<\alpha n}2^{2(s,1)}\left(\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(2^{s_j}\right)\right)^{-1}2^{-(s,1)}\Psi(n)\left(\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(2^{s_j}\right)\right)^2\right)^{\frac12}$$

$$=(\Psi(n))^{\frac12}\left(\sum_{n\leq(s,1)<\alpha n}2^{(s,1)}\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(2^{s_j}\right)\right)^{\frac12}$$

$$\ll(\Psi(n))^{\frac12}\left(\Psi(n)2^n n^{d-1}\right)^{\frac12}=\Psi(n)2^{\frac n2}n^{\frac{d-1}{2}}. \tag{3.12}$$

Звідси, об'єднуючи (3.6), (3.12) та (3.7), при $2\leq q<\infty$ маємо

$$\left\|D_\beta^\psi(\cdot)-P\left(\theta_M;\cdot\right)\right\|_q\ll\Psi(n)2^{\frac n2}n^{\frac{d-1}{2}}+\Psi([\alpha n])2^{\alpha n\left(1-\frac1q\right)}(\alpha n)^{\frac{d-1}{q}}.$$

За умовою теореми, існує таке $\varepsilon>0$, що $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{1+\varepsilon}$, $j=\overline{1,d}$, не зростають, тому $\Psi([\alpha n])2^{\alpha n}\leq\Psi(n)2^n$. Далі, покладаючи $\alpha=\frac q2$, одержуємо

$$\left\|D_\beta^\psi(\cdot)-P\left(\theta_M;\cdot\right)\right\|_q\ll\Psi(n)2^{\frac n2}n^{\frac{d-1}{2}}+\Psi(n)2^n2^{-\frac q2\frac nq}\left(\frac q2 n\right)^{\frac{d-1}{q}}$$

$$\ll\Psi(n)2^{\frac n2}n^{\frac{d-1}{2}}\ll\Psi(n)M^{\frac12},\ \ 2\leq q<\infty. \tag{3.13}$$

Оцінка зверху доведена.

Оцінка знизу одразу випливає із теореми 2.2. Дійсно, оскільки $2 \le q < \infty$, то

$$e_M\left(D^{\psi}_{\beta}\right)_q \ge e_M\left(D^{\psi}_{\beta}\right)_2. \tag{3.14}$$

Крім цього, за умовою теореми 3.1, $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{1+\varepsilon}$ не зростають, а отже, не зростають і $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$. Тому, поклавши у теоремі 2.2 $q = 2$, згідно з (3.14), одержимо

$$e_M\left(D^{\psi}_{\beta}\right)_q \ge \Phi(n)M^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінка знизу у (3.3) і, відповідно, теорема 3.1 доведені. □

Тепер прокоментуємо одержані результати, співставляючи їх із раніше відомими результатами, що стосуються оцінки цієї величини як у одновимірному, так і у багатовимірному випадках.

Зауваження 3.1. У одновимірному випадку встановлені оцінки є точними за порядком. Тобто для $2 \le q < \infty$, $\psi_1 \in D$, за умови, що існує $\varepsilon > 0$, для якого $\psi_1\left(|k|\right)|k|^{1+\varepsilon}$ не зростає, матимемо

$$e_M\left(D^{\psi_1}_{\beta}\right)_q \asymp \psi_1(M)M^{\frac{1}{2}}.$$

Зауваження 3.2. При $\psi_j\left(|k_j|\right) = |k_j|^{-r}$, $r > 1$, $k_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j = \overline{1,d}$, оцінка (3.3) набуває вигляду

$$e_M\left(D^{r}_{\beta}\right)_q \asymp M^{-r+\frac{1}{2}}\left(\log^{d-1} M\right)^r,$$

і вона була встановлена Е. С. Белінським [9].

Теорема 3.2. *Нехай $2 \le q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{1+\varepsilon}$ не зростають. Тоді для будь-яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення*

$$\Phi(n)M^{\frac{1}{2}} \ll e_M\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_q \ll \Psi(n)M^{\frac{1}{2}}. \tag{3.15}$$

Доведення. Встановимо в (3.15) спочатку оцінку знизу.

Оскільки ми розглядаємо випадок $2 \le q < \infty$, то справедливе наступне співвідношення

$$e_M\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_q \ge e_M\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_2. \tag{3.16}$$

За умовою, $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{1+\varepsilon}$ не зростають, а отже, не зростають також і $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$. Тому, використовуючи результат теореми 2.2 (при $q=2$), із (3.16) матимемо

$$e_M\Big(L^{\psi}_{\beta,1}\Big)_q \geq \Phi(n) M^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінка знизу доведена.

Перейдемо до встановлення оцінки зверху. При цьому будемо користуватися такими ж основними ідеями, як і при встановленні відповідної оцінки у теоремі 3.1, та вважати, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Отже, оскільки функцію $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$ можна представити у вигляді

$$f(x) = \sum_s \delta_s(f;x),$$

то, повторюючи міркування, які застосовувалися при отриманні співвідношення (3.6), можемо записати

$$\|f(\cdot) - P(\theta_M;\cdot)\|_q \leq \Bigg\| \sum_{n\leq(s,1)<\alpha n} \left[\delta_s(f;\cdot) - P(\theta_{N_s};\cdot)\right] \Bigg\|_q$$

$$+ \Bigg\| f(\cdot) - \sum_{(s,1)<\alpha n} \delta_s(f;\cdot) \Bigg\|_q = I_3 + I_4. \tag{3.17}$$

Оцінимо послідовно доданки I_3 та I_4. Відмітимо, що для другого доданку оцінка була раніше встановлена у [25] при відшуканні порядкових співвідношень для величини $e^{\perp}_M\Big(L^{\psi}_{\beta,1}\Big)_q$, $1<q<\infty$, а саме

$$I_4 = \Bigg\| f(\cdot) - \sum_{(s,1)<\alpha n} \delta_s(f;\cdot) \Bigg\|_q \ll \Psi([\alpha n]) 2^{\alpha n\left(1-\frac{1}{q}\right)} (\alpha n)^{\frac{d-1}{q}}. \tag{3.18}$$

Далі перейдемо до оцінки доданку I_3. Проводячи міркування, аналогічні до тих, що були використані при встановленні співвідношення (3.8), застосовуючи лему 2.3, та вибираючи N_s такими ж, як і при доведенні теореми 3.1, отримаємо

$$I_3 \ll \left(\sum_{n\leq(s,1)<\alpha n} \frac{2^{(s,1)}}{N_s} \|\delta_s(f;\cdot)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll \left(\sum_{n \le (s,1) < \alpha n} \frac{2^{(s,1)}}{N_s} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) \right)^2 \left\| \delta_s \left(f_\beta^\psi ; \cdot \right) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll \left(\sum_{n \le (s,1) < \alpha n} 2^{(s,1)} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) \right)^{-1} 2^{-(s,1)} \Psi(n) \right.$$

$$\left. \times \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) \right)^2 \left\| \delta_s \left(f_\beta^\psi ; \cdot \right) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\Phi(n))^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \le (s,1) < \alpha n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) \left\| \delta_s \left(f_\beta^\psi ; \cdot \right) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.19)$$

Тепер, прийнявши до уваги той факт, що для $f \in L_{\beta,1}^{\psi}$

$$\left\| \delta_s (f; \cdot) \right\|_2 \asymp \left\| A_s (f; \cdot) \right\|_2 ,$$

та скориставшись лемою 2.4, із (3.19) будемо мати

$$I_3 \ll (\Phi(n))^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \le (s,1) < \alpha n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) \left\| A_s \left(f_\beta^\psi ; \cdot \right) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll (\Phi(n))^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \le (s,1) < \alpha n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) \left\| A_s \left(f_\beta^\psi ; \cdot \right) \right\|_1^2 2^{2(s,1)\left(1-\frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\Phi(n))^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \le (s,1) < \alpha n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(2^{s_j}\right) \left\| A_s \left(f_\beta^\psi ; \cdot \right) \right\|_1^2 2^{(s,1)} \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.20)$$

Далі, оскільки

$$\left\| A_s \left(f_\beta^\psi ; \cdot \right) \right\|_1 \le \left\| A_s (\cdot) \right\|_1 \left\| f_\beta^\psi (\cdot) \right\|_1 \le C_5 \left\| f_\beta^\psi (\cdot) \right\|_1 \le C_6,$$

то з (3.20), за допомогою міркувань, аналогічних до тих, які були використані при встановленні (3.11), приходимо до наступної оцінки

$$I_3 \ll (\Phi(n))^{\frac{1}{2}} \left(\Phi(n) 2^n n^{d-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \Phi(n) 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}. \qquad (3.21)$$

Таким чином, підставляючи оцінки (3.21) та (3.18) в (3.17), отримаємо

$$\left\| f(\cdot) - P\left(\theta_M; \cdot\right) \right\|_q \ll \Psi([\alpha n]) 2^{\alpha n \left(1-\frac{1}{q}\right)} (\alpha n)^{\frac{d-1}{q}} + \Psi(n) 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Насамкінець, проводячи міркування, аналогічні до використаних при встановленні співвідношення (3.13), прийдемо до шуканої оцінки зверху
$$\|f(\cdot)-P\left(\theta_M;\cdot\right)\|_q \ll \Psi(n)M^{\frac{1}{2}},\ 2\le q<\infty.$$

Теорема 3.2 доведена. □

Зауваження 3.3. У одновимірному випадку відповідний теоремі 3.2 результат (при деяких додаткових умовах на функцію $\psi_1(\cdot)$) встановлений В. В. Шкапою [26], і має місце порядкова оцінка
$$e_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,1}\right)_q \asymp \psi_1(M)M^{\frac{1}{2}},\ 2\le q<\infty.$$

Зауваження 3.4. Якщо у теоремі 3.2 покласти $\psi_j\left(|k_j|\right)=|k_j|^{-r}$, $r>1$, $k_j\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j=\overline{1,d}$, то ми отримаємо точну за порядком оцінку для класів Вейля-Надя $W^r_{\beta,p}$, яка була встановлена Е. С. Белінським [9]:
$$e_M\left(W^r_{\beta,1}\right)_q \asymp M^{-r+\frac{1}{2}}\left(\log^{d-1}M\right)^r,\ 2\le q<\infty.$$

Література

[1] А. И. Степанец, *Классификация и приближение периодических функций*, Киев, Наук. думка, 1987.

[2] А. И. Степанец, *Методы теории приближений: В 2 т.*, Киев, Ин-т математики НАН Украины, 2002.

[3] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **178** (1986), 1–112.

[4] С. Б. Стечкин, *Об абсолютной сходимости ортогональных рядов* // Докл. АН СССР, **102** (1955), No. 1, 37–40.

[5] Р. С. Исмагилов, *Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами* // Успехи мат. наук, **29** (1974), No. 3, 161–178.

[6] В. Н. Темляков, *О приближении периодических функций многих переменных* // Докл. АН СССР, **279** (1984), No. 2, 301–305.

[7] В. Н. Темляков, *Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций* // Изв. АН СССР. Сер. мат., **49** (1985), No. 5, 986–1030.

[8] V. N. Temlyakov, *Greedy Algorithms and M-Term Approximation with Regard to Redundant Dictionaries* // J. of Approx. Theory, **98** (1999), No. 1, 117–145.

[9] Э. С. Белинский, *Приближение периодических функций многих переменных "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники* // Докл. АН СССР, **284** (1985), No. 6, 1294–1297.

[10] Э. С. Белинский, *Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной* // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль, Яросл. ун–т, 1988, 16–33.

[11] А. С. Романюк, *О приближении классов периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн., **44** (1992), No. 5, 662–672.

[12] А. С. Романюк, *Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$ I* // Укр. мат. журн., **44** (1992), No. 11, 1535–1547.

[13] А. С. Романюк, *О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных* // Укр. мат. журн., **45** (1993), No. 5, 663–675.

[14] А. С. Романюк, *Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$ II* // Укр. мат. журн., **45** (1993), No. 10, 1411–1423.

[15] А. С. Романюк, *Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных* // Изв. РАН. Сер. мат., **67** (2003), No. 2, 61–100.

[16] А. С. Романюк, *Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных* // Изв. РАН. Сер. мат., **70** (2006), No. 2, 69–98.

[17] А. С. Романюк, *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных*, Праці Ін–ту математики НАН України, **93**, 2012.

[18] R. A. De Vore, V. N. Temlyakov, *Nonlinear Approximation in Finite-Dimensional Spaces* // J. of Complexity, **13** (1997), 489–508.

[19] Dung Dinh, *On Asymptotic Orders of n-Term Approximations and Non-Linear n-Widths* // Vietnam J. of Mathematics, **27** (1999), No. 4, 363–367.

[20] Dung Dinh, *Continuons Algorithms in n-Term Approximation and Non-Linear-Widths* // J. of Approximation Theory, **102** (2000), 217–242.

[21] Dung Dinh, V. N. Temlyakov, T. Ullrich, *Hyperbolic Cross Approximation*, arXiv: 1601.03978v1 [math.NA] 15 Jan 2016.

[22] А. С. Романюк, *Неравенства для L_p-норм (ψ,β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^\psi_{\beta,p}$* // Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр., Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 92–105.

[23] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, М., Наука, 1977.

[24] K. V. Shvai, *The best M-term trigonometric approximations of classes of (ψ,β)-differentiable periodic multivariate functions in the space L_q* // The Journal of Computational and Applied Mathematics, **122** (2016), No. 2, 83–91.

[25] К. В. Швай, *Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень узагальнених багатовимірних аналогів ядер Бернуллі та класів $L^\psi_{\beta,1}$ у просторі L_q* // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **13** (2016), No. 1, 300–320.

[26] В. В. Шкапа, *Апроксимативні характнристики класів $L^\psi_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q* // Укр. мат. журн., **67** (2015), No. 8, 1139–1150.

Відомості про авторів

Катерина Віталіївна Швай
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-Mail: kate.shvai@gmail.com