Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 3, 298 – 323

Преобразование Дарбу с параметром обобщенных матриц Якоби

Иван М. Ковалёв

(Представлена М. М. Маламудом)

Аннотация. В работе построена факторизация $J = UL$ монической обобщенной матрицы Якоби $\mathfrak{J}$ на верхнетреугольную и нижнетреугольную блочные матрицы U и L специального вида. При этом показано, что данная факторизация $\mathfrak{J} = UL$ зависит от свободного вещественного параметра $\mathbf{d}(\in \mathbb{R})$. В качестве основного результата доказано, что матрица $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ также является обобщенной матрицей Якоби. Матрица $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$ называется преобразованием Дарбу с параметром $\mathbf{d}$ матрицы $\mathfrak{J}$. Получен аналог формулы Геронимуса для полиномов первого рода матрицы $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$, найдены формулы, связывающие m-функции матриц $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$.

2010 MSC. 47B36; 47B50; 42C05; 15A23.

Ключевые слова и фразы. Преобразование Дарбу, обобщенная матрица Якоби, m-функция, ортогональные полиномы, формулы Геронимуса.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{s} = \{\mathfrak{s}_j\}_{j=0}^{\infty}$ — это последовательность действительных чисел и пусть $\mathfrak{S}$ — это линейный функционал, заданный на линейной оболочке
$$\mathcal{P} = \operatorname{span}\left\{\lambda^j : j \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$
равенством
$$\mathfrak{S}(\lambda^j) = \mathfrak{s}_j, \qquad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.1}$$
Функционал $\mathfrak{S}$ называется *квази–дефинитным*, если главные миноры ганкелевой матрицы $(\mathfrak{s}_{i+k})_{i,k=0}^{n}$ невырождены для любого $n \in \mathbb{Z}_+$

Статья поступила в редакцию 15.08.2016
This work was supported by Volkswagen Stiftung grant and grants of Ministry of Education and Science of Ukraine (project numbers 0115U000136, 0115U000556).

ISSN 1810 – 3200.

(см. [4]). С функционалом $\mathfrak{S}$ ассоциирована последовательность монических полиномов $\{P_j(\lambda)\}_{j=0}^{\infty}$, которая ортогональна относительно функционала $\mathfrak{S}$ и удовлетворяет трёхчленному рекуррентному соотношению

$$\lambda P_j(\lambda) = P_{j+1}(\lambda) + c_j P_j(\lambda) + b_j P_{j-1}(\lambda), \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

где b_j, $c_j \in \mathbb{R}$, $b_j \neq 0$, $b_0 = \mathfrak{s}_0$ и начальным условиям

$$P_{-1}(\lambda) = 0 \quad \text{и} \quad P_0(\lambda) = 1.$$

Матрица

$$J = \begin{pmatrix} c_0 & 1 & & \\ b_1 & c_1 & 1 & \\ & b_2 & c_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

называется монической матрицей Якоби, ассоциированной с функционалом $\mathfrak{S}$.

Пусть $\mathbb{C}[\lambda]$ — множество комплекснозначных полиномов. Определим преобразования линейного функционала $\mathfrak{S}$ по формулам

$$\mathfrak{S}_1(p) = \mathfrak{S}(\lambda p), \quad p \in \mathbb{C}[\lambda],$$

$$\mathfrak{S}_2(p) = \mathfrak{S}\left(\frac{p(\lambda) - p(0)}{\lambda}\right) + \mathbf{d}p(0), \quad p \in \mathbb{C}[\lambda] \text{ и } \mathbf{d} \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Последовательности полиномов $\{P_j^{(p)}(\lambda)\}_0^{\infty}$ и $\{P_j^{(\mathbf{d})}(\lambda)\}_0^{\infty}$, ассоциированные с линейными функционалами $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$, соответствуют преобразованиям Кристоффеля и Геронимуса от $\{P_j(\lambda)\}_0^{\infty}$, (см. [10, 11, 17]).

В случае, когда $\mathfrak{S}$ — квази–дефинитный функционал и $P_j(0) \neq 0$, $j \in \mathbb{N}$, в работе [4] была построена факторизация $J = LU$ монической матрицы Якоби J на нижне– и верхне–треугольные двухдиагональные матрицы, такие что матрица $J^{(p)} = UL$ также является монической матрицей Якоби и соответствует функционалу $\mathfrak{S}_1$. Преобразование $J = LU \to J^{(p)} = UL$ называют преобразованием Дарбу матрицы Якоби J. Аналогично, в случае квази–дефинитного функционала $\mathfrak{S}$ матрица J допускает факторизацию $J = UL$ на верхне– и нижнетреугольные двух-диагональные матрицы U и L, однако такая факторизация осуществляется не однозначно и зависит от параметра $\mathbf{d} \in \mathbb{R}$. При этом матрица $J^{(\mathbf{d})} = LU$ также является монической матрицей Якоби и соответствует функционалу $\mathfrak{S}_2$. Преобразование $J = UL \to J^{(\mathbf{d})} = LU$ называют преобразование Дарбу матрицы Якоби J с параметром $\mathbf{d}$.

В работе [6] результаты [4] были распространены на тот случай, когда условие квази–дефинитности на линейный функционал $\mathfrak{S}$ не было выполнено. При этом преобразование Дарбу от матрицы J принадлежит классу обобщенных матриц Якоби, введенному в [7].

Преобразование Дарбу без параметра в классе обобщённых матриц Якоби было рассмотрено в [9, 13]. В настоящей работе изучается преобразование Дарбу с параметром в классе обобщённых матриц Якоби. Показано, что любая обобщённая матрица Якоби $\mathfrak{J}$ допускает $UL-$ факторизацию $\mathfrak{J} = UL$, где U и L верхнетреугольная и нижнетреугольная двух-диагональные блочные матрицы, соответственно.

Основной результат работы Теорема 3.8 состоит в том, что преобразование Дарбу с параметром $\mathbf{d}$ обобщенной матрицы Якоби $\mathfrak{J}$, определяемое равенством $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} := LU$, также является обобщённой матрицей Якоби и соответствует функционалу $\mathfrak{S}_2$, вида (1.2). Кроме того, в Теореме 4.1 и Теореме 5.1 найдены формулы, связывающие m–функцию и полиномы первого рода исходной матрицы $\mathfrak{J}$ с m–функцией и полиномами первого рода преобразованной матрицы $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$.

Эта работа состоит из следующих частей. В параграфе 2 приведены необходимые сведения из [7] и [13] об обобщенных матрицах Якоби. В параграфе 3 изучается *преобразование Дарбу с параметром* обобщенной матрицы Якоби. Аналог преобразования Геронимуса ортогональных полиномов, соответствующих обобщённой матрице Якоби, получен в параграфе 4. Формулы связи между m–функциями и функционалами, ассоциированными с матрицами $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$, найдены в параграфе 5. В параграфе 6 обобщается результат параграфов 3, 4, 5 на случай преобразования Дарбу со сдвигом для обобщенной матрицы Якоби. В параграфе 7, приведён пример преобразования Дарбу с параметром для обобщённой матрицы Якоби.

2. Обобщённые матрицы Якоби

Пусть $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ — это множество нормальных индексов $\mathfrak{n}_j \in \mathbb{N}$ последовательности $\mathfrak{s} = \{\mathfrak{s}_j\}_{j=0}^{\infty}$, определяемое условиями

$$\mathbf{D}_{n_j} := \det \begin{pmatrix} \mathfrak{s}_0 & \cdots & \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_j-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_j-1} & \cdots & \mathfrak{s}_{2\mathfrak{n}_j-2} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Заметим, что $\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1-1}$ это первый нетривиальный момент, т.е. $\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1-1}\neq 0$, а $\mathfrak{s}_k=0$ для всех $k<\mathfrak{n}_1-1$. К примеру, если $\mathfrak{n}_1=1$, то $\mathfrak{s}_0\neq 0$.

По последовательности $\mathfrak{s}$ можно построить полиномы первого и второго рода, определяемые по формулам (см. [1, 6, 7])

$$
P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)=\frac{1}{\mathbf{D}_{\mathfrak{n}_j}}\det\begin{pmatrix}\mathfrak{s}_0 & \mathfrak{s}_1 & \cdots & \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_j}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_j-1} & \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_j} & \cdots & \mathfrak{s}_{2\mathfrak{n}_j-1}\\ 1 & \lambda & \cdots & \lambda^{\mathfrak{n}_j}\end{pmatrix},
$$

$$
Q_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)=\mathfrak{S}_t\left(\frac{P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)-P_{\mathfrak{n}_j}(t)}{\lambda-t}\right),\quad j\in\mathbb{N}.
$$

Как было показано в [7], полиномы $P_{\mathfrak{n}_j}$ и $Q_{\mathfrak{n}_j}$ являются решениями следующей системы разностных уравнений (см. [7])

$$
\mathfrak{b}_j y_{\mathfrak{n}_{j-1}}(\lambda)-\mathfrak{p}_j(\lambda)y_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)+y_{\mathfrak{n}_{j+1}}(\lambda)=0, \tag{2.1}
$$

где $\mathfrak{b}_0=\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1-1}$, $\mathfrak{n}_{-1}=-1$, $\mathfrak{n}_0=0$, с начальными условиями

$$
P_{-1}(\lambda)\equiv 0,\ P_0(\lambda)\equiv 1,\quad \text{и}\quad Q_{-1}(\lambda)\equiv -1,\ Q_0(\lambda)\equiv 0, \tag{2.2}
$$

в которой $\mathfrak{b}_j\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, а $\mathfrak{p}_j(\lambda)=\lambda^{\ell_j}+\mathfrak{p}^{(j)}_{\ell_j-1}\lambda^{\ell_j-1}+\ldots+\mathfrak{p}^{(j)}_1\lambda+\mathfrak{p}^{(j)}_0$ — это некоторые монические полиномы степени $\ell_j=\mathfrak{n}_{j+1}-\mathfrak{n}_j$, называемые *порождающими полиномами* обобщённой матрицы Якоби $\mathfrak{J}$, $j\in\mathbb{Z}_+$. Разностные уравнения (2.1) изучались ранее в работах [15] и [16].

С системой (2.1) ассоциирована обобщенная матрица Якоби $\mathfrak{J}$ (ОМЯ) (см. [6, 7]), определяемая формулой

$$
\mathfrak{J}=\begin{pmatrix}\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_0} & \mathfrak{D}_0 & & \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_1} & \mathfrak{D}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots\end{pmatrix}, \tag{2.3}
$$

где диагональные блоки $\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_j}$ — это сопровождающие матрицы к порождающим полиномам $\mathfrak{p}_j(\lambda)$ (см. [14])

$$
\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_j}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ -\mathfrak{p}^{(j)}_0 & -\mathfrak{p}^{(j)}_1 & \cdots & -\mathfrak{p}^{(j)}_{\ell_j-1}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{\ell_j\times\ell_j}, \tag{2.4}
$$

блоки $\mathfrak{D}_j$, $\mathfrak{B}_{j+1}$ — это $\ell_j\times\ell_{j+1}$ и $\ell_{j+1}\times\ell_j$ матрицы, соответственно, вида

$$
\mathfrak{D}_j=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad \mathfrak{B}_{j+1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \mathfrak{b}_{j+1} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad j\in\mathbb{Z}_+. \tag{2.5}
$$

Здесь $\mathfrak{B}_{j+1}$ — это ненулевые матрицы, т.к. $\mathfrak{b}_{j+1} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Замечание 2.1. Матрицу $\mathfrak{J}$, определённую равенствами (2.3)–(2.5), называют ОМЯ, ассоциированной с линейным функционалом $\mathfrak{S}$. Иногда, $\mathfrak{J}$ называют ОМЯ, ассоциированной с последовательностью $\{\mathfrak{s}_j\}_{j=0}^{\infty}$ или с системой (2.1), что подчеркивает связь с полиномами $\mathfrak{p}_j(\lambda)$ и числами $\mathfrak{b}_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Определим для произвольных $i, j \in \mathbb{Z}_+$ усеченную ОМЯ

$$\mathfrak{J}_{[i,j]} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_i} & \mathfrak{D}_i & & \\ \mathfrak{B}_{i+1} & \mathfrak{C}_{i+1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathfrak{D}_{j-1} \\ & & \mathfrak{B}_j & \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_j} \end{pmatrix}, \ i \leq j.$$

Связь между полиномами первого и второго рода с усеченными ОМЯ была получена в [7] (в классическом случае см. [3, 7.1.2])

$$P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) = \det(\lambda - \mathfrak{J}_{[0,j-1]}) \quad \text{и} \quad Q_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) = \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1 - 1}\det(\lambda - \mathfrak{J}_{[1,j-1]}).$$

Рассмотрим пространство Понтрягина $(\ell^2_{[0,\mathfrak{n}_j-1]}, [\cdot,\cdot])$, т.е. линейное пространство $\ell^2_{[0,\mathfrak{n}_j-1]}$ снабженное индефинитным скалярным произведением (см. [2, стр. 84])

$$[x, y] = (G_{[0,j-1]}x, y)_{\ell^2_{[0,\mathfrak{n}_j-1]}}, \quad x, y \in \ell^2_{[0,\mathfrak{n}_j-1]},$$

где $G_{[0,j-1]} = \mathrm{diag}(G_0, \dots, G_{j-1})$ и матрицы G_i определены формулами

$$G_i = \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1 - 1} \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_1^{(i)} & \cdots & \mathfrak{p}_{\ell_i - 1}^{(i)} & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ \mathfrak{p}_{\ell_i - 1}^{(i)} & \iddots & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}^{-1}, \quad i = 0, \dots, j-1. \tag{2.6}$$

Как показано в [7] матрица $\mathfrak{J}_{[0,j-1]}$ задаёт симметрический оператор в $\left(\ell^2_{[0,\mathfrak{n}_j-1]}, [\cdot,\cdot]\right)$.

Определение 2.2. *m–функция матрицы $\mathfrak{J}_{[0,j-1]}$ определяется равенством*

$$m_{[0,j-1]}(\lambda) = [(\mathfrak{J}^T_{[0,j-1]} - \lambda)^{-1} e_0, e_0], \tag{2.7}$$

где $e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$ *– это* $\mathfrak{n}_j \times 1$ *вектор.*

Как показано в [7, Proposition 2.5] функция $m_{[0,j-1]}(\lambda)$ имеет вид

$$m_{[0,j-1]}(\lambda) = -\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1-1}\frac{\det(\lambda - \mathfrak{J}_{[1,j-1]})}{\det(\lambda - \mathfrak{J}_{[0,j-1]})} = -\frac{Q_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)}{P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)} \tag{2.8}$$

и допускает следующее асимптотическое разложение

$$m_{[0,j-1]}(\lambda) = -\frac{\mathfrak{s}_0}{\lambda} - \frac{\mathfrak{s}_1}{\lambda^2} - \cdots - \frac{\mathfrak{s}_{2\mathfrak{n}_j-2}}{\lambda^{2\mathfrak{n}_j-1}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{2\mathfrak{n}_j-1}}\right), \tag{2.9}$$

где числа $\mathfrak{s}_k$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathfrak{s}_k = \left[\left(\mathfrak{J}^T_{[0,j-1]}\right)^k e_0, e_0\right], \quad k \le 2\mathfrak{n}_j - 2.$$

Замечание 2.3. m-функция $m_{[0,j-1]}(\lambda)$ является функцией Вейля симметрического оператора, определённого в [8], [5, Предложение 3.12], как сужение $\mathfrak{J}_{[0,j-1]}$ на множество векторов в $\ell^2_{[0,\mathfrak{n}_j-1]}$ ортогональных к e_0. В классическом случае формула (2.7) встречается в [12].

3. Преобразование Дарбу с параметром обобщённой матрицы Якоби

В этом параграфе, рассмотрим преобразование Дарбу с параметром $\mathbf{d}$ обобщенной матрицы Якоби $\mathfrak{J}$. Для этого воспользуемся блочно нижнетреугольной и верхнетреугольной матрицами L и U, соответственно,

$$L = \begin{pmatrix} I_{\ell_0} & 0 & \\ L_1 & I_{\ell_1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad U = \begin{pmatrix} U_0 & D_0 & \\ 0 & U_1 & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где I_{ℓ_j} и диагональные блоки U_j — это матрицы порядка $\ell_j \times \ell_j$

$$U_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -S_j & -\mathfrak{p}^{(j)}_1 & \cdots & -\mathfrak{p}^{(j)}_{\ell_j-2} & -\mathfrak{p}^{(j)}_{\ell_j-1} \end{pmatrix}, \quad S_j \neq 0, \tag{3.2}$$

блоки L_{j+1} и D_j — матрицы размера $\ell_{j+1}\times\ell_j$ и $\ell_j\times\ell_{j+1}$, соответственно

$$L_{j+1}=\begin{pmatrix} S_j-\mathfrak{p}_0^{(j)} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} \text{ и } D_j=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где $S_j-\mathfrak{p}_0^{(j)}\neq 0$ для любого $j\in\mathbb{Z}_+$.

Замечание 3.1. Если $\ell_j=1$ для некоторого $j\in\mathbb{Z}_+$, то

$$I_{\ell_j}=(1) \qquad \text{и} \qquad U_j=(-S_j).$$

Если $\ell_j=\ell_{j+1}=1$ для некоторого $j\in\mathbb{Z}_+$, то

$$L_{j+1}=(S_j-\mathfrak{p}_0^{(j)}) \qquad \text{и} \qquad D_j=(1).$$

Говорят, что ОМЯ $\mathfrak{J}$ допускает UL–факторизацию, если $\mathfrak{J}$ представима в виде $\mathfrak{J}=UL$, где L и U определены по формулам (3.1)–(3.3).

Определение 3.2. *Пусть* $\{P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)\}_{j=0}^{\infty}$ *— последовательность полиномов 1–го рода относительно линейного функционала* $\mathfrak{S}$*, пусть* $S_0\in\mathbb{R}$ *— некоторый параметр. Рассмотрим последовательность полиномов* $\{\widehat{P}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)\}_{j=0}^{\infty}$*, удовлетворяющей рекуррентным соотношениям*

$$\widehat{P}_{\mathfrak{n}_{j+1}}(\lambda)=\widehat{\mathfrak{p}}_j(\lambda)\widehat{P}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)-\mathfrak{b}_j\widehat{P}_{\mathfrak{n}_{j-1}}(\lambda), \qquad \widehat{P}_{-1}(\lambda)\equiv 0, \quad \widehat{P}_0(\lambda)\equiv 1, \tag{3.4}$$

где полиномы $\widehat{\mathfrak{p}}_j(\lambda)$ *определены равенствами*

$$\widehat{\mathfrak{p}}_0(\lambda)=\mathfrak{p}_0(\lambda)-S_0 \quad \text{и} \quad \widehat{\mathfrak{p}}_j(\lambda)=\mathfrak{p}_j(\lambda) \quad \text{для любого } j\in\mathbb{N}.$$

Последовательность $\{\widehat{P}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)\}_{j=0}^{\infty}$ *называют последовательностью ко-рекурсивных полиномов с параметром* S_0*, ассоциированных с линейным функционалом* $\mathfrak{S}$*.*

В случае квази–дефинитного функционала $\mathfrak{S}$, ко–рекурсивные полиномы $\widehat{P}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)$ были рассмотрены впервые в [4].

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathfrak{J}$ *— ОМЯ, ассоциированная с линейным функционалом* $\mathfrak{S}$*, и пусть* $\ell_j:=\mathfrak{n}_{j+1}-\mathfrak{n}_j\geq 1$*,* $j\in\mathbb{Z}_+$*, где* $\mathfrak{n}_0=0$ *и* $\{\mathfrak{n}_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— множество нормальных индексов последовательности*

$\{\mathfrak{s}_j\}_{j=0}^{\infty}$. *Пусть* $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *есть некоторый параметр, удовлетворяющий условиям*

$$-S_{j+1}(S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)}) = \mathfrak{b}_{j+1} \ \text{и} \ S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)} \neq 0, \qquad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.5}$$

Тогда матрица $\mathfrak{J}$ *допускает* UL *факторизацию*

$$\mathfrak{J} = UL \tag{3.6}$$

вида (3.1)–(3.3) *с параметром* S_0. *Обратно, если* $\mathfrak{J}$ *допускает факторизацию* (3.6), *то последовательность* $\{\mathfrak{s}_j\}_{j=0}^{\infty}$ *удовлетворяет соотношениям* (3.5).

Существует бесконечное множество параметров $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *для которых выполнены соотношения* (3.5).

Доказательство. Рассмотрим произведение UL

$$UL = \begin{pmatrix} U_0 + D_0 L_1 & D_0 & & \\ U_1 L_1 & U_1 + D_1 L_2 & D_1 & \\ & U_2 L_2 & U_2 + D_2 L_3 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $D_j L_{j+1}$ и $U_{j+1} L_{j+1}$ это $\ell_j \times \ell_j$ и $\ell_{j+1} \times \ell_j$ матрицы, соответственно,

$$D_j L_{j+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_{j+1} L_{j+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -S_{j+1}(S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)}) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем, что $U_j + D_j L_{j+1}$ это $\ell_j \times \ell_j$ матрицы вида

$$U_j + D_j L_{j+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\mathfrak{p}_0^{(j)} & -\mathfrak{p}_1^{(j)} & \cdots & -\mathfrak{p}_{\ell_j-2}^{(j)} & -\mathfrak{p}_{\ell_j-1}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Сравнивая произведение UL с матрицей $\mathfrak{J}$ в (2.3), получаем

$$-S_{j+1}(S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)}) = \mathfrak{b}_{j+1} \qquad \text{для любого} \quad j \in \mathbb{Z}_+$$

Следовательно произведение UL равно $\mathfrak{J}$ тогда и только тогда, когда условия (3.5) выполнены, т.е ОМЯ $\mathfrak{J}$ допускает UL–факторизацию вида (3.1)–(3.3). □

Лемма 3.4. *Пусть $\mathfrak{J}$ — ОМЯ ассоциированная с линейным функционалом $\mathfrak{S}$. Пусть $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathfrak{J}$ допускает UL–факторизацию вида (3.1)–(3.3) и пусть $\widehat{P}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)$ — ко-рекурсивные полиномы, ассоциированные с функционалом $\mathfrak{S}$ и параметром S_0. Тогда*

$$\widehat{P}_{\mathfrak{n}_j}(0) = \prod_{i=0}^{j-1}(\mathfrak{p}_0^{(i)} - S_i), \qquad \textit{для любого} \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Докажем данную лемму по индукции.

1) При $j = 1$ получим

$$\widehat{P}_{\mathfrak{n}_1}(0) = \widehat{\mathfrak{p}}_0(0)\widehat{P}_0(0) - \mathfrak{b}_0\widehat{P}_{-1}(0) = \widehat{\mathfrak{p}}_0(0) = \mathfrak{p}_0(0) - S_0 = \mathfrak{p}_0^{(0)} - S_0,$$

$$\begin{aligned}\widehat{P}_{\mathfrak{n}_2}(0) = \widehat{\mathfrak{p}}_1(0)\widehat{P}_{\mathfrak{n}_1}(0) - \mathfrak{b}_1\widehat{P}_0(0) &= \mathfrak{p}_0^{(1)}(\mathfrak{p}_0^{(0)} - S_0) - S_1(\mathfrak{p}_0^{(0)} - S_0) \\ &= (\mathfrak{p}_0^{(0)} - S_0)(\mathfrak{p}_0^{(1)} - S_1).\end{aligned}$$

2) Пусть предположение индукции верно для $(j-1)$-го шага:

$$\widehat{P}_{\mathfrak{n}_{(j-1)}}(0) = \prod_{i=0}^{j-2}(\mathfrak{p}_0^{(i)} - S_i). \tag{3.8}$$

Тогда из (3.4), (3.5) и (3.8) получим

$$\widehat{P}_{\mathfrak{n}_j}(0) = \widehat{\mathfrak{p}}_{j-1}(0)\widehat{P}_{\mathfrak{n}_{(j-1)}}(0) - \mathfrak{b}_{j-1}\widehat{P}_{\mathfrak{n}_{(j-2)}}(0)$$

$$= \mathfrak{p}_0^{(j-1)}\prod_{i=0}^{j-2}(\mathfrak{p}_0^{(i)} - S_i) - S_{j-1}(\mathfrak{p}_0^{(j-2)} - S_{j-2})\prod_{i=0}^{j-3}(\mathfrak{p}_0^{(i)} - S_i) = \prod_{i=0}^{j-1}(\mathfrak{p}_0^{(i)} - S_i).$$

Итак, формула (3.7) справедлива для любого $j \in \mathbb{N}$. □

Следствие 3.5. *Пусть ОМЯ $\mathfrak{J}$, ассоциированная с линейным функционалом $\mathfrak{S}$, допускает UL–факторизацию вида* (3.1)–(3.3) *и пусть $\widehat{P}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)$ — ко-рекурсивные полиномы, ассоциированные с функционалом $\mathfrak{S}$ и параметром $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Тогда*

$$\widehat{P}_{\mathfrak{n}_{j+1}}(0) = (-1)^{j-k} l_j \ldots l_{j-k}\widehat{P}_{\mathfrak{n}_{j-k}}(0), \quad k \le j \quad \textit{и} \quad j,k \in \mathbb{Z}_+.$$

Теорема 3.6. *Пусть $\mathfrak{J}$ — ОМЯ, ассоциированная с линейным функционалом $\mathfrak{S}$, $\ell_j := \mathfrak{n}_{j+1} - \mathfrak{n}_j \geq 1$, $j \in \mathbb{Z}_+$, где $\mathfrak{n}_0 = 0$ и $\{\mathfrak{n}_j\}_{j=1}^{\infty}$ — это множество нормальных индексов последовательности $\{\mathfrak{s}_j\}_{j=0}^{\infty}$. Пусть матрицы L и U определены формулами (3.1)–(3.3) и $\widehat{P}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)_{j=0}^{\infty}$ — последовательность ко–рекурсивных полиномов, ассоциированных с функционалом $\mathfrak{S}$ и параметром $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Тогда $\mathfrak{J}$ допускает UL–факторизацию вида (3.1)–(3.3) тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{P}_{\mathfrak{n}_j}(0) \neq 0 \qquad \text{для любого } j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.9}$$

Определение 3.7. *Пусть $\mathfrak{J}$ — ОМЯ, ассоциированная с линейным функционалом $\mathfrak{S}$, с параметром $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и пусть $S_0 = -\frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1-1}}{\mathbf{d}}$, пусть $\mathfrak{J}$ допускает UL–факторизацию вида (3.6), (3.1)–(3.3). Тогда матрица*

$$\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$$

называется преобразованием Дарбу с параметром $\mathbf{d}$ обобщённой матрицы Якоби $\mathfrak{J}$. Причина введения данного параметра $\mathbf{d}$ будет выяснена позже, см. Теорему 5.1.

Теорема 3.8. *Пусть $\mathfrak{J}$ — ОМЯ, ассоциированная с линейным функционалом $\mathfrak{S}$, $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\mathfrak{J} = UL$ её UL–факторизация вида (3.1)–(3.3). Тогда матрица $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ — обобщённая матрица Якоби.*

Доказательство. Рассмотрим произведение LU

$$LU = \begin{pmatrix} U_0 & D_0 & \\ L_1U_0 & L_1D_0 + U_1 & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Из (3.1)–(3.3), получаем, что

$$L_{j+1}U_j = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, & \text{если } \ell_j \geq 2; \\ \left(-S_j(S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)})\right), & \text{если } \ell_j = 1, \end{cases}$$

$$L_{j+1}D_j = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, & \text{если } \ell_j \geq 2; \\ \begin{pmatrix} S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, & \text{если } \ell_j = 1. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение матрицы K_j $(j \in \mathbb{Z}_+)$:

$$K_0 = \begin{pmatrix} U_0 & D_0 \\ L_1 U_0 & L_1 D_0 + U_1 \end{pmatrix}, \quad K_j = \begin{pmatrix} L_j D_{j-1} + U_j & D_j \\ L_{j+1} U_j & L_{j+1} D_j + U_{j+1} \end{pmatrix}.$$

В зависимости от того, какие значения принимают ℓ_j и ℓ_{j+1}, получаем

(i) $\ell_j = \ell_{j+1} = 1$. Тогда:

a) Если $j = 0$, то K_0 имеет вид

$$K_0 = \begin{pmatrix} -S_0 & 1 \\ -S_0(S_0 - \mathfrak{p}_0^{(0)}) & S_0 - \mathfrak{p}_0^{(0)} - S_1 \end{pmatrix}.$$

b) Если $j \neq 0$ и $\ell_{j-1} = 1$, то K_j имеет представление

$$K_j = \begin{pmatrix} S_{j-1} - \mathfrak{p}_0^{(j-1)} - S_j & 1 \\ -S_j(S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)}) & S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)} - S_{j+1} \end{pmatrix}.$$

Случай, когда все $\ell_j = 1$, был рассмотрен в [4].

c) Если $\ell_{j-1} \geq 2$, то K_j имеет вид

$$K_j = \begin{pmatrix} -S_j & 1 \\ -S_j(S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)}) & S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)} - S_{j+1} \end{pmatrix}.$$

(ii) $\ell_j = 1$, $\ell_{j+1} \geq 2$. Тогда:

a) Если $\ell_{j-1} = 1$, то K_j имеет представление

$$K_j = \begin{pmatrix} S_{j-1} - \mathfrak{p}_0^{(j-1)} - S_j & 1 & \\ -S_j(S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)}) & S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)} & D_j \\ & A_j & \mathfrak{C}_{q^{(j)}} \end{pmatrix},$$

где блоки $A_j \in \mathbb{C}^{(\ell_j - 1)\times 1}$ и $D_j \in \mathbb{C}^{1\times(\ell_j - 1)}$ имеют следующий вид

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -S_{j+1} \end{pmatrix}^T \quad \text{и} \quad D_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{C}_{q^{(j)}}$ — это сопровождающая матрица к полиному $q^{(j)}(\lambda) := \frac{\mathfrak{p}^{(j)}(\lambda) - \mathfrak{p}_0^{(j)}}{\lambda}$.

b) Если $\ell_{j-1} \geq 2$, то K_j следующего вида

$$K_j = \begin{pmatrix} -S_j & 1 & \\ -S_j(S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)}) & S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)} & D_j \\ & A_j & \mathfrak{C}_{q^{(j)}} \end{pmatrix},$$

где блоки A_j, D_j, $\mathfrak{C}_{q^{(j)}}$ — определены так же, как и в подпункте *a*).

(iii) $\ell_j \geq 2$, $\ell_{j+1} = 1$. Тогда:

a) Если $\ell_{j-1} \geq 2$, то K_j имеет вид

$$K_j = \begin{pmatrix} 0 & D_j & \\ A_j & \mathfrak{C}_{q^{(j)}} & D_j^T \\ & B_j & -S_{j+1} \end{pmatrix},$$

где блоки A_j, $\mathfrak{C}_{q^{(j)}}$, D_j — определены так же, как и в пункте (ii) a), блок $B_j \in \mathbb{C}^{1\times(\ell_j-1)}$ и имеет вид

$$B_j = \begin{pmatrix} S_j - \mathfrak{p}_0^{(j)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Если $\ell_{j-1} = 1$, то K_j имеет представление

$$K_j = \begin{pmatrix} S_{j-1} - \mathfrak{p}_0^{(j-1)} & D_j & \\ A_j & \mathfrak{C}_{q^{(j)}} & D_j^T \\ & B_j & -S_{j+1} \end{pmatrix},$$

где блоки A_j, B_j, $\mathfrak{C}_{q^{(j)}}$, D_j — определены так же, как и в подпункте a).

(iv) $\ell_j \geq 2$, $\ell_{j+1} \geq 2$. Тогда

a) Если $\ell_{j-1} = 1$, то K_j имеет вид

$$K_j = \begin{pmatrix} S_{j-1} - \mathfrak{p}_0^{(j-1)} & D_j & & \\ A_j & \mathfrak{C}_{q^{(j)}} & D_j^T & \\ & B_j & 0 & D_{j+1} \\ & & A_{j+1} & \mathfrak{C}_{q^{(j+1)}} \end{pmatrix},$$

где A_j, A_{j+1}, B_j, $\mathfrak{C}_{q^{(j)}}$, $\mathfrak{C}_{q^{(j+1)}}$, D_j, D_{j+1} — определены так же, как в (iii).

b) Если $\ell_{j-1} \geq 2$, то K_j имеет следующее представление

$$K_j = \begin{pmatrix} 0 & D_j & & \\ A_j & \mathfrak{C}_{q^{(j)}} & D_j^T & \\ & B_j & 0 & D_{j+1} \\ & & A_{j+1} & \mathfrak{C}_{q^{(j+1)}} \end{pmatrix},$$

где A_j, A_{j+1}, B_j, $\mathfrak{C}_{q^{(j)}}$, $\mathfrak{C}_{q^{(j+1)}}$, D_j, D_{j+1} — определены так же, как в (iii).

В силу (i)–(iv) $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ — обобщенная матрица Якоби. $\square$

Замечание 3.9. Если $\mathfrak{J}$ — моническая матрица Якоби (т.е. $\ell_j = 1$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$), то UL–факторизация вида (3.1)–(3.3) совпадает с UL–факторизацией в [4, Section 2].

Замечание 3.10. Если преобразованная матрица $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$ является классической матрицей Якоби, то UL–факторизация вида (3.1)–(3.3) совпадает с факторизацией в [6, Section 3].

4. Преобразование полиномов 1–го рода

В этом параграфе, изучим, как преобразуются полиномы 1–го рода, при преобразовании Дарбу с параметром $\mathbf{d}$ обобщенной матрицы Якоби $\mathfrak{J}$. Для этого, воспользуемся следующим соотношением между ОМЯ $\mathfrak{J}$ и полиномами 1–го рода $P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)$. Положим

$$\mathbf{P}(\lambda) = \big(P_0(\lambda), \quad P_1(\lambda), \quad \dots, \quad P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda), \quad \dots\big)^T$$

где $P_{\mathfrak{n}_j+k}(\lambda) = \lambda^k P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)$ и $0 \le k < \mathfrak{n}_{j+1} - \mathfrak{n}_j$.

Тогда систему (2.1)–(2.2) можно переписать в следующем виде

$$\mathfrak{J}\mathbf{P}(\lambda) = \lambda \mathbf{P}(\lambda). \tag{4.1}$$

Аналогично (4.1), определим полиномы 1–го рода для ОМЯ $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$ равенством

$$\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}\mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = \lambda \mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(\lambda), \tag{4.2}$$

где $\mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = \Big(\; P_0^{(\mathbf{d})}(\lambda), \quad P_1^{(\mathbf{d})}(\lambda), \quad \dots \; \Big)^T$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathbf{d} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *некоторый параметр, такой что условие* (3.9) *имеет место при* $S_0 = -\frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1-1}}{\mathbf{d}}$, *пусть* $\mathfrak{J}$ *— ОМЯ и пусть* $\mathfrak{J} = UL$ *её* UL*–факторизация вида* (3.1)–(3.3). *Пусть* $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ *преобразование Дарбу с параметром* $\mathbf{d}$ *матрицы* $\mathfrak{J}$. *Тогда полиномы 1–го рода матрицы* $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$, *вычисляются по формулам*

$$\begin{array}{c} P_0^{(\mathbf{d})}(\lambda) \equiv 1, \quad P_{\mathfrak{n}_j+k}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = \lambda^k P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) \quad 0 < k < \ell_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \\ P_{\mathfrak{n}_j}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) + \left(S_{j-1} - \mathfrak{p}_0^{(j-1)}\right) P_{\mathfrak{n}_{j-1}}(\lambda) \quad j \in \mathbb{N}, \end{array} . \tag{4.3}$$

Доказательство. Определим полиномы $P_j^{(\mathbf{d})}(\lambda)$ равенствами

$$\mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = L\mathbf{P}(\lambda), \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.4}$$

Тогда из (4.4), вытекают формулы (4.3), а именно

$$P_0^{(\mathbf{d})}(\lambda) = P_0(\lambda), \dots, P_{\ell_0-1}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = \lambda^{\ell_0-1} P_0(\lambda), \dots,$$

$$P_{\mathfrak{n}_1}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = P_{\mathfrak{n}_1}(\lambda) + \left(S_0 - \mathfrak{p}_0^{(0)}\right) P_0(\lambda), \dots, P_{\mathfrak{n}_1+1}^{(d)}(\lambda) = \lambda P_{\mathfrak{n}_1}(\lambda), \dots,$$

$$\begin{aligned} P_{\mathfrak{n}_1+\ell_1-1}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = \lambda^{\ell_1-1} P_{\mathfrak{n}_1}(\lambda), \dots, P_{\mathfrak{n}_2}^{(\mathbf{d})}(\lambda) \\ = P_{\mathfrak{n}_2}(\lambda) + \left(S_1 - \mathfrak{p}_0^{(1)}\right) P_{\mathfrak{n}_1}(\lambda), \dots \end{aligned}$$

Более того, справедливо соотношение (4.2), т.к.

$$\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}\mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = LU\mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = LUL\mathbf{P}(\lambda)$$
$$= L\mathfrak{J}\mathbf{P}(\lambda) = \lambda L\mathbf{P}(\lambda) = \lambda\mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(\lambda).$$

Таким образом, полиномы $P_j^{(\mathbf{d})}(\lambda)$, определяемые формулой (4.3) для всех $j \in \mathbb{Z}_+$, есть полиномы 1–го рода для матрицы $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$. □

Замечание 4.2. Если $\mathfrak{J}$ — моническая матрица Якоби (т.е. $\ell_j = 1$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$), то формулы

$$P_0^{(\mathbf{d})}(\lambda) \equiv 1, \quad P_i^{(\mathbf{d})}(\lambda) = P_i(\lambda) + \left(S_{i-1} - \mathfrak{p}_0^{(i-1)}\right) P_{i-1}(\lambda) \quad i \in \mathbb{N}$$

есть *формулы Геронимуса* для полиномов $P_i(\lambda)$ (см. [18, (3.9)], [10]).

Предложение 4.3. *Пусть* $\mathbf{d} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *некоторый параметр, такой что условие* (3.9) *имеет место при* $S_0 = -\frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1-1}}{\mathbf{d}}$, *пусть* $\mathfrak{J} = UL$ *и* $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ *обобщенные матрицы Якоби, где* L *и* U *определены в* (3.1)–(3.3). *Пусть монические полиномы* $\{P_j^{(\mathbf{d})}(x)\}_{j=0}^{\infty}$ *ассоциированы с матрицей* $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$. *Тогда*

$$P_{\mathfrak{n}_i}^{(\mathbf{d})}(0) = \prod_{k=0}^{i-1} S_k \quad \textit{для любого } i \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Более того, если $\ell_j \geq 2$, *то*

$$P_{\mathfrak{n}_j+k}^{(\mathbf{d})}(0) = 0, \quad k = \overline{1, \ell_j - 1} \quad \textit{и} \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. (i) Пусть $\ell_k = 1$, $k = \overline{0, i-1}$ и $i \in \mathbb{N}$.

Вычисляем

$$P_{\mathfrak{n}_i}^{(\mathbf{d})}(0) = \det\left(-\mathfrak{J}_{[0,i-1]}^{(\mathbf{d})}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} S_0 & -1 & & \\ S_0(S_0 - \mathfrak{p}_0^{(0)}) & -S_0 + \mathfrak{p}_0^{(0)} + S_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & S_{i-2}(S_{i-2} - \mathfrak{p}_0^{(i-2)}) & & -S_{i-2} + \mathfrak{p}_0^{(i-2)} + S_{i-1} \end{vmatrix}$$

умножаем $h+1$–ую строку на $(-S_h + \mathfrak{p}_0^{(h)})$ и прибавляем к $(h+2)$–ой строке, $h = \overline{0, i-2}$, получаем

$$P_{\mathfrak{n}_i}^{(\mathbf{d})}(0) = \begin{vmatrix} S_0 & -1 & & \\ 0 & S_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & S_{i-1} \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{i-1} S_k. \tag{4.6}$$

(ii) Пусть $\ell_k \geq 2$, $k = \overline{0, i-1}$ и $i \in \mathbb{N}$. В силу [13, Леммы 2.3]

$$P_{\mathfrak{n}_i}^{(\mathbf{d})}(0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & & & & & & \\ S_0 & \mathfrak{p}_{\ell_0-1}^{(0)} & -1 & & & & & \\ & \mathfrak{p}_0^{(0)} - S_0 & 0 & -1 & & & & \\ & & S_1 & \mathfrak{p}_{\ell_1-1}^{(1)} & & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \ddots & -1 & \\ & & & & \mathfrak{p}_0^{(i-2)} - S_{i-2} & & 0 & -1 \\ & & & & & 0 & S_{i-1} & \mathfrak{p}_{\ell_{i-1}-1}^{(i-1)} \end{vmatrix}.$$

Разлагая данный определитель по строке, которая имеет только один элемент равный -1 и другие равные 0, получаем (4.6).

(iii) Пусть $\ell_m = 1$ и $\ell_p \geq 2$, $m = \overline{0, h-1}$, $p = \overline{h, i-1}$ и $h, i \in \mathbb{N}$. Через n обозначим число ℓ_p. Тогда $P_{\mathfrak{n}_i}^{(\mathbf{d})}(0) = \det\left(-\mathfrak{J}_{[0,i+n-1]}^{(\mathbf{d})}\right)$. По [13, Лемме 2.3] и используя (i)–(ii), получаем (4.5).

(iv) Пусть $\ell_m \geq 2$ и $\ell_p = 1$, $m = \overline{0, h-1}$, $p = \overline{h, i-1}$ и $h, i \in \mathbb{N}$. Через n обозначим число ℓ_m. Тогда $P_{\mathfrak{n}_i}^{(\mathbf{d})}(0) = \det\left(-\mathfrak{J}_{[0,i+n-1]}^{(\mathbf{d})}\right)$. В силу (i)–(ii) и [13, Леммы 2.3], формула (4.5) имеет место.

(v) Рассматриваем общий случай, т.е. ℓ_k– произвольные при ($k = \overline{0, i-1}$) и пусть n число $\ell_k \geq 2$. Тогда $P_{\mathfrak{n}_i}^{(\mathbf{d})}(0) = \det\left(-\mathfrak{J}_{[0,i+n-1]}^{(\mathbf{d})}\right)$. Пользуясь (i)–(iv), получаем формулу (4.5).

Более того, если $\ell_j \geq 2$, то $P_{\mathfrak{n}_j+k}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = \lambda^k P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)$ (см. Теорему 4.1), т.е. $P_{\mathfrak{n}_j+k}^{(\mathbf{d})}(0) = 0$ при $j \in \mathbb{Z}_+$ и $k = \overline{1, \ell_j - 1}$. □

В следующем утверждении, приведены обратные соотношения для полиномов $\mathbf{P}(\lambda)$ и $\mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(\lambda)$.

Теорема 4.4. *Пусть* $\mathbf{d} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *некоторый параметр, такой что условие* (3.9) *имеет место при* $S_0 = -\frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1-1}}{\mathbf{d}}$, *пусть* $\mathfrak{J}$ *– ОМЯ и пусть* $\mathfrak{J} = UL$ *её* UL*–факторизация вида* (3.1)*–*(3.3)*. Пусть* $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ *– преобразование Дарбу с параметром* $\mathbf{d}$ *матрицы* $\mathfrak{J}$*. Тогда*

$$\mathbf{P}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} U \mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(\lambda). \tag{4.7}$$

Доказательство. В силу (4.4), $\mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = L\mathbf{P}(\lambda)$. Тогда

$$U\mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = UL\mathbf{P}(\lambda) = \mathfrak{J}P(\lambda) = \lambda \mathbf{P}(\lambda). \tag{4.8}$$

Итак, (4.7) — доказано. □

Следствие 4.5. *Если* $\mathfrak{J}$ — *моническая матрица Якоби (т.е.* $\ell_j = 1$ *для любого* $j \in \mathbb{Z}_+$*), то справедлива формула Кристоффеля для монических полиномов* $P_j^{(\mathbf{d})}(\lambda)$ *(см. [17, Теорема 3.2.2])*

$$P_j(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(P_{j+1}^{(\mathbf{d})}(\lambda) - \frac{P_{j+1}^{(\mathbf{d})}(0)}{P_j^{(\mathbf{d})}(0)} P_j^{(\mathbf{d})}(\lambda)\right) \quad \text{для всех } j \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.9}$$

Доказательство. По Теореме 4.4, $\mathbf{P}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} U \mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(\lambda)$, т.е.

$$P_j(\lambda) = \frac{P_{j+1}^{(\mathbf{d})}(\lambda) - S_j P_j^{(\mathbf{d})}(\lambda)}{\lambda} \quad j \in \mathbb{Z}_+$$

и в силу Предложения 4.3, имеем $S_j = \frac{P_{j+1}^{(\mathbf{d})}(0)}{P_j^{(\mathbf{d})}(0)}, j \in \mathbb{Z}_+$.Следовательно, справедлива формула Кристоффеля (4.9). □

Следствие 4.6. *(ср. [13]) Пусть* $\mathfrak{J}$ — *ОМЯ, такая что* $\mathfrak{p}_1^{(j)} = \ldots = \mathfrak{p}_{\ell_j - 1}^{(j)} = 0$ *для всех* $j \in \mathbb{Z}_+$*. Тогда*

$$\begin{aligned} P_{\mathfrak{n}_j - 1}(\lambda) &= \tfrac{1}{\lambda}\left(P_{\mathfrak{n}_j}^{(\mathbf{d})}(\lambda) - \frac{P_{\mathfrak{n}_j}^{(\mathbf{d})}(0)}{P_{\mathfrak{n}_{j-1}}^{(\mathbf{d})}(0)} P_{\mathfrak{n}_{j-1}}^{(\mathbf{d})}(\lambda)\right) \quad j \in \mathbb{N}, \\ P_{\mathfrak{n}_j + k}(\lambda) &= \lambda^k P_{\mathfrak{n}_j}^{(\mathbf{d})}(\lambda), \quad 0 \le k \le \ell_j - 2 \text{ and } j \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \tag{4.10}$$

есть специальный случай формулы Кристоффеля для полиномов $P_j^{(\mathbf{d})}(\lambda)$.

Доказательство. Формула (4.10) следует из Предложения 4.3 и Теоремы 4.4. □

5. Преобразования m–функции и функционала $\mathfrak{S}$

В этом параграфе изучим, как связаны между собой m–функции матриц $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$, как преобразуются функционал $\mathfrak{S}$ и последовательность $\mathfrak{s} = \{\mathfrak{s}_j\}_{j=0}^{\infty}$ при преобразовании Дарбу с параметром.

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathbf{d} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *некоторый параметр, такой что условие* (3.9) *имеет место при* $S_0 = -\frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1 - 1}}{\mathbf{d}}$*, пусть* $\mathfrak{J}$ — *это ОМЯ и пусть* $\mathfrak{J} = UL$ *её* UL — *факторизация вида* (3.1)–(3.3)*, соответствующая параметру* S_0*. Пусть* $m(\lambda)$*,* $m^{(\mathbf{d})}(\lambda)$ — *это* m–*функции Вейля матриц* $\mathfrak{J}$ *and* $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$*, соответственно. Тогда*

$$m_{[0,j+n-1]}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = -\frac{\mathbf{d}}{\lambda} + \frac{m_{[0,j-1]}(\lambda)}{\lambda} \quad z \widehat{\to} \infty, \tag{5.1}$$

где n — это количество индексов ℓ_h, таких что $\ell_h \geq 2$ $(h = \overline{0, j-1})$.

Более того, матрица $\mathfrak{J}^{(d)}$ ассоциирована с последовательностью $\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})} = \{\mathfrak{s}_j^{(\mathbf{d})}\}_{j=0}^{\infty}$, где $\mathfrak{s}_j^{(\mathbf{d})}$ вычисляются по формулам

$$\mathfrak{s}_0^{(\mathbf{d})} = \mathbf{d} \quad \textit{и} \quad \mathfrak{s}_j^{(\mathbf{d})} = \mathfrak{s}_{j-1} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть матрицы $G_{[0,j-1]}$ и $\widetilde{G}_{[0,j+n-1]}$ определены формулой (2.6) для матриц $\mathfrak{J}_{[0,j-1]}$ и $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}$, соответственно, где n — это количество индексов ℓ_h, таких что $\ell_h \geq 2$ $(h = \overline{0, j-1})$. Усеченные матрицы $L_{[0,j-1]}$ и $U_{[0,j-1]}$ определены аналогичным образом по формуле (3.1). Отметим, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$L^T_{[0,j-1]} e_0 = e_0, \quad U_{[0,j-1]} \widetilde{G}_{[0,j+n-1]} e_0 = G_{[0,j-1]} e_0 = \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1 - 1} e_{\ell_0 - 1}. \tag{5.2}$$

Тогда полагая $A := \mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}$, имеем

$$\begin{aligned}
\lambda m^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}(\lambda) &= \lambda \left[\left(A^T - \lambda\right)^{-1} e_0, e_0 \right] \\
&= -[e_0, e_0] + \left[A^T \left(A^T - \lambda\right)^{-1} e_0, e_0 \right] \\
&= -\mathfrak{s}_0^{(d)} + \left(e_0, \left(A - \overline{\lambda}\right)^{-1} A \widetilde{G}_{[0,j+n-1]} e_0 \right) \\
&= -\mathfrak{s}_0^{(d)} + \left(e_0, \left(L_{[0,j-1]} U_{[0,j-1]} - \overline{\lambda}\right)^{-1} L_{[0,j-1]} \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1 - 1} e_{\ell_0 - 1} \right).
\end{aligned}$$

Учитывая равенства (5.2), получим

$$\begin{aligned}
\lambda m^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}(\lambda) &= -\mathfrak{s}_0^{(d)} + \left(\left(\left(\mathfrak{J}_{[0,j-1]}\right)^T - \lambda \right)^{-1} e_0, G_{[0,j-1]} e_0 \right) \\
&= -\mathbf{d} + m_{[0,j-1]}(\lambda).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Таким образом, из (5.3) получаем (5.1). В силу асимптотического разложения (2.9) для $m_{[0,j-1]}(\lambda)$, получаем

$$\begin{aligned}
m^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}(\lambda) &= -\frac{\mathbf{d}}{\lambda} - \frac{\mathfrak{s}_0}{\lambda^2} - \frac{\mathfrak{s}_1}{\lambda^3} - \dots - \frac{\mathfrak{s}_{2\mathfrak{n}_j - 2}}{\lambda^{2\mathfrak{n}_j}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{2\mathfrak{n}_j}}\right) \\
&= -\frac{\mathfrak{s}_0^{(\mathbf{d})}}{\lambda} - \frac{\mathfrak{s}_1^{(\mathbf{d})}}{\lambda^2} - \dots - \frac{\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})}_{2\mathfrak{n}_j - 1}}{\lambda^{2\mathfrak{n}_j}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{2\mathfrak{n}_j}}\right).
\end{aligned}$$

Следовательно, ОМЯ $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$ ассоциирована с последовательностью чисел $\{\mathfrak{s}_j^{(\mathbf{d})}\}_{j=0}^{\infty}$, где $\mathfrak{s}_0^{(\mathbf{d})} = \mathbf{d}$ и $\mathfrak{s}_j^{(\mathbf{d})} = \mathfrak{s}_{j-1}$ для любого $j \in \mathbb{N}$. $\square$

Следствие 5.2. *Пусть* $\mathbf{d} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *некоторый параметр, такой что условие* (3.9) *имеет место при* $S_0 = -\frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1-1}}{\mathbf{d}}$, *пусть* $\mathfrak{J}$ — *ОМЯ ассоциированная с функционалом* $\mathfrak{S}$ *и моментом* $\mathfrak{s}_0$, *и пусть* $\mathfrak{J} = UL$ *её* UL– *факторизация вида* (3.1)–(3.3), *соответствующая параметру* S_0. *Тогда матрица* $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ *ассоциирована с линейным функционалом*

$$\mathfrak{S}^{(\mathbf{d})}(p(\lambda)) := \mathfrak{S}\left(\frac{p(\lambda)-p(0)}{\lambda}\right) + \mathbf{d}p(0), \quad p(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]. \tag{5.4}$$

Доказательство. В силу Теоремы 5.1, матрица $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ ассоциирована с последовательностью $\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})} = \{\mathfrak{s}_j^{(\mathbf{d})}\}_{j=0}^{\infty}$, где $\mathfrak{s}_0^{(\mathbf{d})} = \mathbf{d}$ и $\mathfrak{s}_j^{(\mathbf{d})} = \mathfrak{s}_{j-1}$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mathfrak{S}^{(\mathbf{d})}(1) = \mathfrak{s}_0^{(\mathbf{d})} \quad \text{и} \quad \mathfrak{S}^{(\mathbf{d})}(\lambda^j) = \mathfrak{s}_j^{(\mathbf{d})} = \mathfrak{s}_{j-1} = \mathfrak{S}\left(\frac{\lambda^j}{\lambda}\right), \quad j > 1. \tag{5.5}$$

В силу (5.5) и линейности функционалов $\mathfrak{S}^{(\mathbf{d})}$ и $\mathfrak{S}$, получаем (5.4). □

По Теореме 5.1, матрица $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ ассоциирована с последовательностью $\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})} = \{\mathfrak{s}_{j-1}\}_{j=0}^{\infty}$, где $\mathfrak{s}_{-1} = \mathbf{d}$. Определим $\mathcal{N}(\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})})$ множество нормальных индексов последовательности $\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})}$, следующим образом

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})}) = \left\{\mathfrak{n}_j^{(\mathbf{d})} : \mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j^{(\mathbf{d})}} \neq 0\right\}, \mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j^{(\mathbf{d})}} = det\begin{pmatrix} \mathfrak{s}_{-1} & \cdots & \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_j^{(\mathbf{d})}-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_j^{(\mathbf{d})}-2} & \cdots & \mathfrak{s}_{2\mathfrak{n}_j^{(\mathbf{d})}-3} \end{pmatrix}.$$

Предложение 5.3. *Пусть* $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ — *множество нормальных индексов ассоциированных с матрицей* $\mathfrak{J}$ *и пусть* $\mathfrak{J} = UL$ *её* UL — *факторизация вида* (3.1)–(3.3). *Тогда множество нормальных индексов* $\mathcal{N}(\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})})$ *матрицы* $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ *имеет вид*

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})}) = \mathcal{N}(\mathfrak{s}) \cup \{\mathfrak{n}_j + 1 : j \in \mathbb{N},\ \ell_j \geq 2\} \cup \{1\}.$$

Доказательство. Пусть число n — это количество индексов ℓ_h, таких что $\ell_h \geq\ 2$ $(h = \overline{0, j-1})$. Тогда

(*i*) $1 \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})})$, т.к. $\mathfrak{s}_0^{(\mathbf{d})} = \mathbf{d}$ (см. Теорему 5.1).

(*ii*) По Теореме 4.1, $\quad P^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) = P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) + \left(S_{j-1} - \mathfrak{p}_0^{(j-1)}\right) P_{\mathfrak{n}_{j-1}}(\lambda).$

С другой стороны

$$P^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) = \det\left(\lambda - \mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j}}\det\begin{pmatrix} \mathfrak{s}_{-1} & \mathfrak{s}_0 & \cdots & \mathfrak{s}_{n_j-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{s}_{n_j-2} & \mathfrak{s}_{n_j-1} & \cdots & \mathfrak{s}_{2n_j-2} \\ 1 & \lambda & \cdots & \lambda^{n_j} \end{pmatrix}.$$

В силу Предложения 4.3, $P^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j}(0) = S_0 \cdot \ldots \cdot S_{j-1} = \frac{(-1)^{\mathfrak{n}_j+2}}{\mathbf{D}^{(d)}_{\mathfrak{n}_j}}\mathbf{D}_{\mathfrak{n}_j}$, следовательно $\mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j} \neq 0$, т.е. $\mathfrak{n}_j \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})})$.

(*iii*) Пусть $\ell_j \geq 2$, тогда $P^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j+1}(\lambda) = \lambda P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)$ (см. Теорему 4.1) и

$$P^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j+1}(\lambda) = \det\left(\lambda - \mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n]}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j+1}}\det\begin{pmatrix} \mathfrak{s}_{-1} & \mathfrak{s}_0 & \cdots & \mathfrak{s}_{n_j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{s}_{n_j-1} & \mathfrak{s}_{n_j} & \cdots & \mathfrak{s}_{2n_j-1} \\ 1 & \lambda & \cdots & \lambda^{n_j+1} \end{pmatrix}.$$

Из Предложения 4.3, $P^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j+1}(0) = \frac{(-1)^{\mathfrak{n}_j+3}}{\mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j+1}}\mathbf{D}_{\mathfrak{n}_j+1} = 0$. В силу, того, что $\ell_j \geq 2$, получаем, что $(\mathfrak{n}_j + 1) \notin \mathcal{N}(\mathfrak{s})$ и $\mathbf{D}_{\mathfrak{n}_j+1} = 0$, следовательно $\mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j+1} \neq 0$, т.е. $(\mathfrak{n}_j + 1) \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})})$. □

Следствие 5.4. *Если в условиях Предложения 5.3* $\ell_j = \mathfrak{n}_{j+1} - \mathfrak{n}_j \geq 2$, *где* $\mathfrak{n}_0 = 0$ *и для всех* $j \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})}) = \{1, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1 + 1, \mathfrak{n}_2, \ldots\}.$$

Следствие 5.5. *Если в условиях Предложения 5.3* $\mathcal{N}(\mathfrak{s}) = \mathbb{N}$, *то*

$$\mathcal{N}(\mathfrak{s}^{(d)}) = \mathbb{N}.$$

Предложение 5.6. *Пусть* $\mathfrak{J}$ *— ОМЯ и пусть* $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$ *— её преобразование Дарбу с параметром* $\mathbf{d}$. *Тогда*

$$\mathbf{d}P^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) = \lambda Q^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) - Q_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)P^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda). \tag{5.6}$$

Доказательство. В силу представления (2.8)

$$m_{[0,j-1]}(\lambda) = -\frac{Q_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)}{P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)} \quad \text{и} \quad m^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}(\lambda) = -\frac{Q^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)}{P^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)}$$

и Теоремы 5.1, получаем (5.6). □

6. Преобразование Дарбу со сдвигом

В этом параграфе будут рассмотрены преобразования Дарбу с параметром со сдвигом аргумента на $\alpha \in \mathbb{R}$ для преобразованных полиномов (функционала). Для этого используется блочно диагональная матрица A_α специального вида.

Заменяя λ на $\lambda + \alpha$ в (2.1) и (2.2), получаем систему разностных уравнений для всех $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathfrak{b}_j y_{\mathfrak{n}_{j-1}}(\lambda+\alpha) - \mathfrak{p}_j(\lambda+\alpha) y_{\mathfrak{n}_j}(\lambda+\alpha) + y_{\mathfrak{n}_{j+1}}(\lambda+\alpha) = 0 \quad (\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1-1}). \tag{6.1}$$

Решением системы (6.1) являются полиномы $P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda+\alpha)$ с начальными условиями

$$P_{\mathfrak{n}_{-1}}(\lambda+\alpha) \equiv 0 \quad \text{и} \quad P_{\mathfrak{n}_0}(\lambda+\alpha) \equiv 1.$$

Определим $\widetilde{P}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) := P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda+\alpha)$ и $\widetilde{\mathfrak{p}}_j(\lambda) := \mathfrak{p}_j(\lambda+\alpha)$.

Лемма 6.1. *Пусть $\mathfrak{J}$ — ОМЯ, ассоциированная с линейным функционалом $\mathfrak{S}$ и пусть*

$$A_\alpha = \operatorname{diag}\left(\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_0} - \mathfrak{C}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_0}, \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_1} - \mathfrak{C}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_1}, \ldots\right), \tag{6.2}$$

где $\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_j}$ и $\mathfrak{C}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_j}$ — сопровождающие матрицы монических полиномов $\mathfrak{p}_j(\lambda)$ и $\widetilde{\mathfrak{p}}_j(\lambda)$, соответственно. Тогда $\mathfrak{J} - A_\alpha$ — ОМЯ, ассоциированная с линейным функционалом

$$\widetilde{\mathfrak{S}}(p(\lambda)) := \mathfrak{S}(p(\lambda-\alpha)), \qquad p \in \mathbb{C}[\lambda]. \tag{6.3}$$

Более того, если $\widetilde{\mathfrak{s}}$ — последовательность определяемая функционалом $\widetilde{\mathfrak{S}}$ с помощью (1.1), *то множество нормальных индексов $\mathcal{N}(\widetilde{\mathfrak{s}})$ совпадает с множеством нормальных индексов $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ и $\{\widetilde{P}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)\}_{j=0}^\infty$ – это последовательность полиномов 1–го рода для матрицы $\mathfrak{J} - A_\alpha$, которая ортогональна относительно линейного функционала $\widetilde{\mathfrak{S}}$.*

Доказательство. В силу (2.4) и (6.2), получаем, что матрица

$$\mathfrak{J} - A_\alpha = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_0} & \mathfrak{D}_0 & & \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_1} & \mathfrak{D}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

это ОМЯ, ассоциированная с порождающими полиномами $\widetilde{\mathfrak{p}}_j$ и числами $\mathfrak{b}_j$. Следовательно, система (6.1) ассоциирована с матрицей $\mathfrak{J} - A_\alpha$. Равенство (6.3) выполнено и $\mathcal{N}(\mathfrak{s}) = \mathcal{N}(\widetilde{\mathfrak{s}})$. В силу того, что $\widetilde{P}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) = P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda+\alpha)$ и выполнено (6.3), получаем, что $\{\widetilde{P}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)\}_{j=0}^\infty$ – это последовательность полиномов 1–го рода для матрицы $\mathfrak{J} - A_\alpha$, которая ортогональна относительно линейного функционала $\widetilde{\mathfrak{S}}$. $\square$

Теорема 6.2. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тогда ОМЯ* $\mathfrak{J} - A_\alpha$ *допускает* UL*–факторизацию вида* (3.1)–(3.3)

$$T = \mathfrak{J} - A_\alpha = UL$$

и соответствующее преобразование Дарбу с параметром $\mathbf{d}T^{(\mathbf{d})} = LU$, *ассоциировано с линейным функционалом*

$$\widetilde{\mathfrak{S}}^{(\mathbf{d})}\left(p(\lambda)\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\widetilde{\mathfrak{S}}\right)\left(p(\lambda)\right) + \mathbf{d}p(0). \tag{6.4}$$

Более того, если $\widetilde{\mathfrak{n}}_j^{(\mathbf{d})}$ *— нормальные индексы и* $\widetilde{\mathfrak{p}}_j^{(\mathbf{d})}(\lambda)$ *— порождающие полиномы матрицы* $T^{(\mathbf{d})}$ *и*

$$A_\alpha^{(\mathbf{d})} = \operatorname{diag}\left(\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_0^{(\mathbf{d})}} - \mathfrak{C}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_0^{(\mathbf{d})}}, \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_1^{(\mathbf{d})}} - \mathfrak{C}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_1^{(\mathbf{d})}}, \dots\right), \tag{6.5}$$

где $\mathfrak{C}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_j^{(\mathbf{d})}}$ *и* $\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_j^{(\mathbf{d})}}$ *сопровождающие матрицы к полиномам* $\widetilde{\mathfrak{p}}_j^{(\mathbf{d})}(\lambda)$ *и* $\mathfrak{p}_j^{(\mathbf{d})}(\lambda) := \widetilde{\mathfrak{p}}_j^{(\mathbf{d})}(\lambda - \alpha)$, *соответственно, то ОМЯ*

$$\mathfrak{J}_\alpha^{(\mathbf{d})} = LU + A_\alpha^{(\mathbf{d})} \tag{6.6}$$

ассоциирована с линейным функционалом

$$\mathfrak{S}_\alpha^{(\mathbf{d})}\left(p(\lambda)\right) = \mathfrak{S}\left(\frac{p(\lambda) - p(\alpha)}{\lambda - \alpha}\right) + \mathbf{d}p(\alpha). \tag{6.7}$$

Доказательство. По Лемме 6.1, $T = \mathfrak{J} - A_\alpha$ — ОМЯ и из Теоремы 3.6 T допускает UL–факторизацию вида (3.1)–(3.3), т.е. $T = UL$. По Теореме 3.8 $T^{(\mathbf{d})} = LU$ — ОМЯ. Из (6.5), получаем, что $\mathfrak{J}_\alpha^{(\mathbf{d})} = LU + A_\alpha^{(\mathbf{d})}$ — ОМЯ. Соотношение (6.4) следует из Следствия 5.2 и соотношение (6.7) следует из Леммы 6.1 и (6.4), т.е.

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_\alpha^{(\mathbf{d})}\left(p(\lambda)\right) &= \widetilde{\mathfrak{S}}^{(\mathbf{d})}\left(p(\lambda+\alpha)\right) = \left(\tfrac{1}{\lambda}\widetilde{\mathfrak{S}}\right)\left(p(\lambda+\alpha)\right) + \mathbf{d}p(\alpha) \\ &= \widetilde{\mathfrak{S}}\left(\tfrac{p(\lambda+\alpha)-p(\alpha)}{\lambda}\right) + \mathbf{d}p(\alpha) = \mathfrak{S}\left(\tfrac{p(\lambda)-p(\alpha)}{\lambda-\alpha}\right) + \mathbf{d}p(\alpha).\end{aligned}$$

□

Теорема 6.3. *Предполагаем, что условия Теоремы 6.2 выполнены.*

Пусть $P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda)$ *и* $P_{\mathfrak{n}_j^{(\mathbf{d})}}^{(\mathbf{d})}(\lambda)$ *полиномы 1–го рода для матриц* $\mathfrak{J}$ *и* $\mathfrak{J}_\alpha^{(\mathbf{d})} = LU + A_\alpha^{(\mathbf{d})}$, *соответственно. Тогда*

$$\begin{gathered} P_0^{(\mathbf{d})}(\lambda) \equiv 1, \quad P_{\mathfrak{n}_j+k}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = \lambda^k P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) \quad 0 < k < \ell_j \ \text{и}\ j \in \mathbb{Z}_+, \\ P_{\mathfrak{n}_j}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) + \left(S_{j-1} - \mathfrak{p}^{(j-1)}(\alpha)\right) P_{\mathfrak{n}_{j-1}}(\lambda) \quad j \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Доказательство. Как известно, ОМЯ $\mathfrak{J}$ ассоциирована с системой разностных уравнений (2.1). По Лемме 6.1 $T = \mathfrak{J} - A_\alpha = UL$ — ассоциирована с системой разностных уравнений (6.1) и по Теореме 6.2 $T^{(\mathbf{d})} = LU$ — ассоциирована со следующей системой разностных уравнений

$$\mathfrak{b}_j^{(\mathbf{d})} y_{\widetilde{\mathfrak{n}}_{j-1}^{(\mathbf{d})}}(\lambda) - \widetilde{\mathfrak{p}}_j^{(\mathbf{d})}(\lambda) y_{\widetilde{\mathfrak{n}}_j^{(\mathbf{d})}}(\lambda) + y_{\widetilde{\mathfrak{n}}_{j+1}^{(\mathbf{d})}}(\lambda) = 0 \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.9}$$

Решения системы (6.9) — есть полиномы $\widetilde{P}^{(\mathbf{d})}_{\widetilde{\mathfrak{n}}_j^{(\mathbf{d})}}(\lambda)$ и по Теореме 4.1

$$\begin{gathered}\widetilde{P}^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j-1}(\lambda) = \lambda^k P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda+\alpha) \quad 0 < k < \ell_j \text{ и } j \in \mathbb{Z}_+,\\ \widetilde{P}^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) = P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda+\alpha) + \left(S_{j-1} - \widetilde{\mathfrak{p}}_0^{(j-1)}\right) P_{\mathfrak{n}_{j-1}}(\lambda+\alpha) \quad j \in \mathbb{N}.\end{gathered} \tag{6.10}$$

Можем переписать второе соотношение (6.10) в виде

$$\widetilde{P}^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j}(\lambda) = P_{\mathfrak{n}_j}(\lambda+\alpha) + \left(S_{j-1} - \widetilde{\mathfrak{p}}^{(j-1)}(0)\right) P_{\mathfrak{n}_{j-1}}(\lambda+\alpha). \tag{6.11}$$

С другой стороны, матрица $\mathfrak{J}_\alpha^{(\mathbf{d})} = LU + A_\alpha^{(\mathbf{d})}$ ассоциирована с системой разностных уравнений для всех $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathfrak{b}_j^{(\mathbf{d})} y_{\mathfrak{n}_{j-1}^{(\mathbf{d})}}(\lambda-\alpha) - \widetilde{\mathfrak{p}}_j^{(\mathbf{d})}(\lambda-\alpha) y_{\mathfrak{n}_j^{(\mathbf{d})}}(\lambda-\alpha) + y_{\mathfrak{n}_{j+1}^{(\mathbf{d})}}(\lambda-\alpha) = 0, \tag{6.12}$$

где $\mathfrak{b}_0^{(\mathbf{d})} = \mathbf{d}$ и $\mathfrak{n}_{j-1}^{(\mathbf{d})} = \widetilde{\mathfrak{n}}_{j-1}^{(\mathbf{d})}$. Решением системы (6.12) являются полиномы

$$P^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j^{(\mathbf{d})}}(\lambda) := \widetilde{P}^{(\mathbf{d})}_{\mathfrak{n}_j^{(\mathbf{d})}}(\lambda-\alpha) \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.13}$$

В силу (6.1)

$$\widetilde{\mathfrak{p}}^{(j)}(0) = \mathfrak{p}^{(j)}(\alpha) \quad \text{для всех } j \in \mathbb{Z}_+ \tag{6.14}$$

и подставляя (6.13)–(6.14) в (6.10)–(6.11), получаем (6.8). □

7. Пример

В качестве примера, рассмотрим монические полиномы Чебышёва–Эрмита $\{H_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ и исследуем преобразование Дарбу с параметром $\mathbf{d}$ и со сдвигом α обобщённой матрицы Якоби $\mathfrak{J}$ ассоциированной с последовательностью $\{H_k(\lambda^3)\}_{k=0}^{\infty}$.

Пусть $\mathfrak{s} = \{\mathfrak{s}_j\}_{j=0}^{\infty}$ последовательность, ассоциированная с мерой $e^{-\lambda^2}d\lambda$ на $\mathbb{R}$, т.е.

$$\mathfrak{s}_0 = \sqrt{\pi}, \quad \mathfrak{s}_{2j} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^j}(2j-1)!! \quad \text{и} \quad \mathfrak{s}_{2j-1} = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда соответствующие рекуррентные соотношения для полиномов Чебышёва–Эрмита примут вид

$$\lambda H_j(\lambda) = H_{j+1}(\lambda) + \frac{j}{2} H_{j-1}(\lambda), \quad \text{для } j \in \mathbb{N}$$

и соответствующие полиномы 1–го рода совпадут с моническими полиномами Чебышёва–Эрмита

$$H_j(\lambda) = \frac{(-1)^j}{2^j} e^{\lambda^2} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\lambda^j} \left(e^{-\lambda^2} \right) \quad \text{для всех } j \in \mathbb{Z}_+, \tag{7.1}$$

ортогональными в $L_2(\mathbb{R}, w(\lambda))$ с весовой функцией $w(\lambda) = e^{-\lambda^2}$.

Полагая в (7.1) $\lambda := \lambda^3$, получаем последовательность монических полиномов $\{H_j(\lambda^3)\}_{j=0}^{\infty}$, которые удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям

$$\lambda^3 H_j(\lambda^3) = H_{j+1}(\lambda^3) + \frac{j}{2} H_{j-1}(\lambda^3) \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, последовательность $\{H_j(\lambda^3)\}_{j=0}^{\infty}$ — это последовательность полиномов 1–го рода ассоциированных со следующей ОМЯ

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_0} & \mathfrak{D}_0 & \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

где блоки имеют следующую структуру

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathfrak{D}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathfrak{B}_{j+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{j+1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ j \in \mathbb{Z}_+.$$

Введём следующую блочную диагональную матрицу

$$A_\alpha = \operatorname{diag}\left(\ \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_0} - \mathfrak{C}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_0}, \quad \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_1} - \mathfrak{C}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_1}, \ \ldots \ \right), \tag{7.2}$$

где $\mathfrak{C}_{\widetilde{\mathfrak{p}}_j}$ — сопровождающие матрицы к моническим полиномам

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_j(\lambda) := \mathfrak{p}_j(\lambda + \alpha) = \lambda^3 + 3\alpha\lambda^2 + 3\alpha^2\lambda + \alpha^3.$$

Тогда по Теореме 6.2, ОМЯ $T = \mathfrak{J} - A_\alpha$ допускает UL–факторизацию с параметром $\mathbf{d}$ (т.е. $T = UL$), где факторизационные матрицы L и

U определены формулой (3.1), блоки I_{ℓ_j}, D_j, L_{j+1}, U_j имеют вид (см. (3.2)–(3.3))

$$\begin{aligned} I_{\ell_j} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad L_{j+1} = \begin{pmatrix} S_j - \alpha^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D_j &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad U_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -S_j & 3\alpha^2 & 3\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7.3}$$

где $S_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $S_j - \alpha^3 \neq 0$ и $S_{j+1}\left(S_j - \alpha^3\right) = -\, b_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $T^{(\mathbf{d})} = LU$ и

$$T^{(\mathbf{d})} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{C}}_0^0 & \mathfrak{D}_{0,0} & & & \\ \mathfrak{B}_{1,0} & \widetilde{\mathfrak{C}}_0^1 & \mathfrak{D}_{0,1} & & \\ & \mathfrak{B}_{1,1} & \widetilde{\mathfrak{C}}_1^0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix},$$

где блоки имеют следующую структуру

$$\begin{gathered} \widetilde{\mathfrak{C}}_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3\alpha^2 & -3\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}_{j,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}_{j+1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -S_j \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{B}_{j+1,1} = \begin{pmatrix} S_j - \alpha^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathfrak{C}}_j^0 = (0), \qquad \mathfrak{D}_{j,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \end{gathered}$$

Матрицы $\widetilde{\mathfrak{C}}_j^0$, $\widetilde{\mathfrak{C}}_j^1$ — сопровождающие матрицы к моническим полиномам $\widetilde{a}_j^0$, $\widetilde{a}_j^1$, соответственно. Более того,

$$\widetilde{a}_j^0(\lambda) = \lambda \quad \text{и} \quad \widetilde{a}_j^1(\lambda) = \lambda^2 + 3\alpha\lambda + 3\alpha^2, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Определяя полиномы

$$a_j^0(\lambda) := \widetilde{a}_j^0(\lambda - \alpha) = \lambda - \alpha \quad \text{и} \quad a_j^1(\lambda) := \widetilde{a}_j^1(\lambda - \alpha) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \alpha^2,$$

получаем сопровождающие матрицы $\mathfrak{C}_j^0$, $\mathfrak{C}_j^1$ монических полиномов $a_j^0(\lambda)$ и $a_j^1(\lambda)$, соответственно, где

$$\mathfrak{C}_j^0 = \begin{pmatrix} \alpha \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{C}_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда можем определить $A_\alpha^{(\mathbf{d})} = \operatorname{diag}\left(\mathfrak{C}_0^0 - \widetilde{\mathfrak{C}}_0^0,\ \ \mathfrak{C}_0^1 - \widetilde{\mathfrak{C}}_0^1,\ \dots \right)$ и по Теореме 6.2 преобразование Дарбу с параметром $\mathbf{d}$ ОМЯ $\mathfrak{J}$ со сдвигом α имеет вид (см. (6.6))

$$\mathfrak{J}_\alpha^{(\mathbf{d})} = T^{(\mathbf{d})} + A_\alpha^{(\mathbf{d})} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_0}^0 & \mathfrak{D}_{0,0} & & \\ \mathfrak{B}_{1,0} & \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_0}^1 & \mathfrak{D}_{0,1} & \\ & \mathfrak{B}_{1,1} & \mathfrak{C}_{\mathfrak{p}_1}^0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Пусть A_α — диагональная блочная матрица, определённая в (7.2). Тогда ОМЯ $\mathfrak{J} - A_\alpha$ допускает факторизацию $\mathfrak{J} - A_\alpha = UL$ (3.1), (7.3). Следовательно, преобразование Дарбу $\mathfrak{J}_\alpha^{(\mathbf{d})}$ имеет вид

$$\mathfrak{J}_\alpha^{(\mathbf{d})} - A_\alpha^{(\mathbf{d})} = LU.$$

Поэтому последовательность моментов $\mathfrak{s}^{(\mathbf{d})} = \{\mathfrak{s}_j^{(\mathbf{d})}\}_{j=0}^\infty$, ассоциированная с матрицей $\mathfrak{J}_\alpha^{(d)}$, имеет вид

$$\mathfrak{s}_0^{(\mathbf{d})} = \mathbf{d}, \qquad \mathfrak{s}_{3j+1}^{(\mathbf{d})} = \alpha \mathbf{d} \mathfrak{s}_{3j}^{(\mathbf{d})}, \qquad \mathfrak{s}_{3j+2}^{(\mathbf{d})} = \alpha \mathbf{d} \mathfrak{s}_{3j+1}^{(\mathbf{d})},$$
$$\mathfrak{s}_{3(j+1)}^{(\mathbf{d})} = \mathfrak{s}_j + \alpha \mathbf{d} \mathfrak{s}_{3j+2}^{(\mathbf{d})} \qquad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

По Теореме 6.3, полиномы 1–го рода $\{P_j^{(\mathbf{d})}(\lambda)\}_{j=0}^\infty$, ассоциированные с матрицей $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$ вычисляются по формулам

$$P_0^{(\mathbf{d})}(\lambda) \equiv 1, \quad P_{3j+k}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = \lambda^k H_j(\lambda^3), \quad k = \overline{1,2} \text{ и } j \in \mathbb{Z}_+,$$
$$P_{3j}^{(\mathbf{d})}(\lambda) = H_j(\lambda^3) + \left(S_{j-1} - \alpha^3\right) H_{j-1}(\lambda^3), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Acknowledgements

Автор признателен В.А. Деркачу за постановку задачи и многочисленные обсуждения.

Литература

[1] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem*, Edinburgh, 1965.

[2] T. Ya. Azizov, I. S. Iokhvidov, *Foundations of the theory of linear operators in spaces with an indefinite metric*, Nauka, Moscow, 1986.

[3] Ju. M. Berezanskii, *Expansions in Eigenfunctions of self-adjoint Operators*, Kiev, 1968.

[4] M. I. Bueno, F. Marcellán, *Darboux transformation and perturbation of linear functionals* // Linear Algebra Appl., **384** (2004), 215–242.

[5] M. Derevyagin, V. Derkach, *On convergence of Pade approximants for generalized Nevanlinna functions* // Trans. Moscow Math. Soc., **68** (2007), 133–182.

[6] M. Derevyagin, V. Derkach, *Darboux transformations of Jacobi matrices and Padé approximation* // Linear Algebra Appl., **435** (2011), 3056–3084.

[7] M. Derevyagin, V. Derkach, *Spectral problems for generalized Jacobi matrices* // Linear Algebra Appl., **382** (2004), 1–24.

[8] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *The extension theory of hermitian operators and the moment problem* // J. Math. Sci., **73** (1995), 141–242.

[9] V. A. Derkach, I. Kovalyov, *On a class of generalized Stieltjes continued fractions* // Methods Funct. Anal. Topology, **21** (2015), 315–335.

[10] Ya. L. Geronimus, *On the polynomials orthogonal with respect to a given number sequence* // Zap. Mat. Otdel. Khar'kov. Univers. i Nil Mat. i Mehan., **17** (1940), 3–18.

[11] Ya. L. Geronimus, *On the polynomials orthogonal with respect to a given number sequence and a theorem by W. Hahn* // Izv. Akad. Nauk SSSR, **4** (1940), 215–228.

[12] F. Gesztesy, B. Simon, *m-functions and inverse spectral analysis for finite and semi-infinite Jacobi matrices* // Journal d'Analyse Math., **73** (1997), 267–297.

[13] I. Kovalyov, *The Darboux transformation of generalized Jacobi matrices* // Methods of Funct. Anal. and Topology, **20** (2014), 301–320.

[14] P. Lancaster, *Theory of Matrices*, New York, 1969.

[15] A. Magnus, *Certain continued fractions associated with the Padé table* // Math. Zeitschr, **78** (1962), 361–374.

[16] F. Peherstorfer, *Finite perturbations of orthogonal polynomials* // J. Comput. Appl. Math., **44** (1992), 275–302.

[17] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, AMS, 1975.

[18] A. Zhedanov, *Rational spectral transformations and orthogonal polynomials* // J. Comput. Appl. Math., **85** (1997), 67–86.

Сведения об авторах

Иван Михайлович Ковалёв

Национальный педагогический университет им. М. П. Драгоманова, Киев, Украина

E-Mail: `i.m.kovalyov@gmail.com`