УДК 519.81

С.И. ДОЦЕНКО

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПОРЯДКЕ ГРУПП В ЗАДАЧЕ СЕКРЕТАРЯ С ГРУППОВЫМ ПРОСМОТРОМ

Рассмотрен алгоритм нахождения порядка просмотра в задаче оптимального выбора с групповым просмотром. Найдены необходимые условия, которым должен удовлетворять оптимальный порядок просмотра, что позволяет существенно сузить множество перестановок групп, на которых следует искать оптимальное решение. Для некоторых частных случаев такой порядок просмотра найден в явном виде.

В работе [1] рассмотрена задача выбора наилучшего объекта (именуемая также задачей оптимального выбора или задачей секретаря), сформулированная следующим образом. Пусть некто в случайном порядке знакомится с n объектами и хочет выбрать среди них наилучший. При этом после ознакомления с очередным объектом нужно либо остановить на нем свой выбор, либо отвергнуть его; возвращаться к ранее просмотренным объектам нельзя. Объекты являются упорядоченными определенным образом по качеству, т. е. качества любых двух объектов сравнимы между собой. «Ознакомление в случайном порядке» означает, что изначально все n! перестановок, задающих порядок просмотра объектов, равновероятны.

Доказано, что для того, чтобы выбрать наилучший объект из n, нужно придерживаться такой стратегии: вначале пропустить все объекты с индексами $1,\ldots,k^*-1$ и затем остановить свой выбор на первом максимальном объекте, индекс которого не меньший k^*, где он определяется из двойного неравенства

$$\frac{1}{k^*}+\ldots+\frac{1}{n-1}\le 1<\frac{1}{k^*-1}+\ldots+\frac{1}{n-1}. \qquad (1)$$

Оказывается, что при $n\to\infty$ $\frac{k}{n}\to\frac{1}{e}$, а вероятность выбора наилучшего объекта при соблюдении описанной стратегии стремится к 1/e.

В работе [2] рассмотрена задача оптимальной остановки на последнем успехе в последовательности независимых испытаний Бернулли и найдено оптимальное правило остановки. Пусть проводится последовательность испытаний Бернулли с заданными вероятностями успеха $p_1,\dots,p_n$ и пусть в i-м испытании произошел успех. Тогда нужно либо предположить, что данный успех будет последним (т. е. все последующие испытания закончатся неудачей) и остановиться, либо продолжить наблюдение и принимать аналогичное решение относительно следующего успеха (если таковой будет иметь место), возвращаться к ранее проведенным испытаниям нельзя. Пусть $q_i = 1 - p_i$, $r_i = p_i / q_i$ (величина r носит название шансы). Оказывается, что для того, чтобы максимизировать вероятность остановки на последнем успехе, нужно вычислить индекс

$$k^* = \max\left(1; \max\left(1 \le k \le n : \sum_{j=k}^{n} r_j \ge 1\right)\right) \tag{2}$$

и остановиться на первом успехе с индексом, не меньшем k^*.

В работе [2] рассматривается также применение данного результата к классической задаче оптимального выбора и к задаче оптимального выбора с групповым просмотром.

В классической задаче оптимального выбора наблюдаемый k-й объект является максимальным с вероятностью $p_k = \frac{1}{k}$ независимо от наблюдаемых значений рангов предыдущих объектов, а наилучшим объектом оказывается последний из максимальных объектов, тогда $q_k = \frac{k-1}{k}, r_k = \frac{1}{k-1}$ и (1) вытекает непосредственно из (2).

Задача оптимального выбора с групповым просмотром отличается от классической задачи оптимального выбора тем, что просматриваемые объекты разбиты на группы (в общем случае произвольной численности) и за один шаг просмотра становятся известны качества всех объектов группы и выбирается один, лучший в группе. Если лучший объект из просмотренной группы к тому же является лучшим среди всех ранее просмотренных (такой объект называется максимальным), то возникает вопрос – является ли данный максимальный объект лучшим среди всех (тогда он называется наилучшим), и таким образом перед просматривающим возникает дилемма, остановиться на найденном максимальном элементе и закончить просмотр, либо же отвергнуть его и перейти к просмотру следующей группы, возвращаться к элементам из ранее просмотренных групп нельзя.

Пусть порядок просмотра групп установлен и численности групп в порядке просмотра равны $l_1,\dots,l_k, l = l_1 + \dots + l_k$. Тогда аналогично классической задаче оптимального выбора индикаторы появлений максимальных элементов вследствие просмотра групп являются независимыми испытаниями Бернулли, но теперь уже $p_j = \dfrac{l_j}{\sum_{i=1}^{j} l_i}$. Введем обозначения $b_j = \sum_{i=1}^{j-1} l_i$, $x_j = \dfrac{l_j}{\sum_{i=1}^{k} l_i}$ – доля объектов в j-й группе от общего числа, тогда $r_j = \dfrac{l_j}{b_j} = \dfrac{x_j}{\sum_{i=1}^{j-1} x_i}$, $r_1 = \infty$ и следовательно нужно остановить выбор на первом максимальном элементе из группы с номером, не меньшем j^*.

Предположим теперь, что размеры всех групп фиксированы, но порядок их просмотра можно менять. Построим алгоритм нахождения оптимального порядка просмотра групп, максимизирующий вероятность нахождения наилучшего элемента. Для этого предварительно докажем несколько лемм.

Пусть установлен некоторый порядок просмотра групп, доли которых составляют $x_1,...,x_k$. Обозначим стратегию, состоящую в пропуске первых $j-1$ групп и остановке на первом максимальном элементе, начиная с j-й группы через $\left(x_1,...,x_{j-1} \mid x_j,...,x_k\right)$ и будем называть это правилом просмотра.

Лемма 1. Пусть правило просмотра имеет вид $\left(x_1,...,x_{j-1} \mid x_j,...,x_k\right)$. Обозначим $s_j = \sum_{i=1}^{j-1} x_i = 1 - \sum_{i=j}^{k} x_i$, тогда вероятность нахождения наилучшего элемента равна

$$p_j = \frac{x_j}{s_j + x_j}(s + x_j) + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{s_j}{s_j + x_j + ... + x_{i-1}} \cdot \frac{x_i}{s_j + x_j + ... + x_i} \cdot \left(s_j + x_j + ... + x_i\right) =$$

$$= x_j + s_j \sum_{i=j+1}^{n} r_i = s_j \sum_{i=j}^{n} r_i. \quad (3)$$

Лемма 2. Пусть правило просмотра имеет вид $\left(x_1,...,x_{j-1} \mid x_j,...,x_k\right)$, i-произвольный индекс, такой, что $j \le i < k$. Рассмотрим новую последовательность групп, полученную из старой слиянием i-й и $(i+1)$-й групп в одну группу с долей $x_i + x_{i+1}$. Тогда вероятность нахождения наилушего элемента увеличивается.

Доказательство. Найдем значение p'_j для новой последовательности групп по формуле (3). Данное выражение отличается от p_j тем, что в нем два слагаемых $r_i + r_{i+1}$ заменяются на одно, равное $r_{i,i+1} = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{s + x_j + ... + x_{i-1}}$. Тогда

$$r_{i,i+1} = \frac{x_i + x_{i+1}}{s_J + x_j + ... + x_{i-1}} = r_i + \frac{x_{i+1}}{s_J + x_j + ... + x_{i-1}} > r_i + \frac{x_{i+1}}{s_J + x_j + ... + x_{i-1} + x_i} = r_i + r_{i+1}$$

откуда непосредственно следует, что $p'_j > p_j$.

Лемма 3. Пусть правило просмотра имеет вид $\left(x_1,...,x_{j-1} \mid x_j,...,x_k\right)$, и для некоторого i такого, что $j \le i < k$ выполняется неравенство $x_i < x_{i+1}$. Рассмотрим новую последовательность групп, полученную из старой перестановкой i-й и $(i+1)$-й групп. Тогда вероятность нахождения наилучшего элемента увеличивается.

Доказательство. Найдем значение p'_j для новой последовательности групп по формуле (4). Данное выражение отличается от p_j тем, что в нем два слагаемых $r_i = \dfrac{x_i}{s_j + x_j + ... + x_{i-1}}$ и $r_{i+1} = \dfrac{x_{i+1}}{s_j + x_j + ... x_{i-1} + x_i}$ заменяются на $r'_i = \dfrac{x_{i+1}}{s_j + x_j + ... + x_{i-1}}$ и $r'_{i+1} = \dfrac{x_i}{s_j + x_j + ... x_{i-1} + x_i}$ соответственно, тогда условие $p'_j - p_j > 0$ равносильно $(r'_i + r'_{i+1}) - (r_i + r_{i+1}) > 0$. Пусть $y = s_j + x_j + ... + x_{i-1}$, тогда

$$(r'_i + r'_{i+1}) - (r_i + r_{i+1}) = \left(r'_i - r_i\right) + (r'_{i+1} - r_{i+1}) = \left(x_{i+1} - x_i\right)\frac{1}{y} + \left(\frac{x_i}{y + x_{i+1}} - \frac{x_{i+1}}{y + x_i}\right) =$$

$$= \left(x_{i+1} - x_i\right)\left(\frac{1}{y} - \frac{x_i + x_{i+1} + y}{\left(y + x_{i+1}\right)\left(y + x_i\right)}\right) = \left(x_{i+1} - x_i\right) \cdot \frac{x_i x_{i+1}}{y\left(y + x_i\right)\left(y + x_{i+1}\right)} > 0.$$

Лемма 4. Пусть для правила просмотра $\left(x_1,...,x_{j-1} \mid x_j,...,x_k\right)$ выполняются условия $\sum\limits_{i=j}^{k} r_i \ge 1, \sum\limits_{i=j+1}^{k} r_i < 1$ и $x_s = \max\left(x_1,...,x_{j-1}\right) > \max\left(x_j,...,x_k\right)$. Тогда при перестановке x_s и x_j вероятность нахождения наилучшего элемента увеличивается.

*Доказательство***.** Докажем более общее утверждение. Покажем, что при увеличении x_j на некоторую величину Δ за счет уменьшения на такую же величину доли пропускаемых групп вероятность нахождения наилучшего элемента увеличивается. Согласно (3)

$$p_j = s_j\left(\frac{x_j}{s_j} + \frac{x_{j+1}}{s_j + x_j} + ... + \frac{x_k}{s_j + x_j + ... + x_{n-1}}\right) =$$

$$= x_j + \frac{s_j}{s_j + x_j}x_{j+1} + ... + \frac{s_j}{s_j + x_j + ... + x_{n-1}}x_k. \tag{4}$$

Вычислим p'_j, подставив $x'_j = x_j + \Delta,\ s'_j = s_j - \Delta$ в правую часть (4). Обратим внимание на то, что при такой подстановке знаменатели всех дробей, стоящих в правой части (4) не меняются. Тогда $p'_j - p_j = \left(1 - \sum\limits_{i=j+2}^{k} r_j\right) > 0$.

Заметим, что $x_s > x_j$, тогда увеличение x_j и уменьшение x_s на величину $\Delta = x_s - x_j$ равносильно перестановке элементов с индексами s и j. ■

Из доказанных лемм непосредственно следуют необходимые условия того, что правила просмотра является оптимальным. К сожалению, эти необходимые условия не позволяют найти оптимальное правило, а лишь сужают множество правил, среди которых следует искать оптимальное простым перебором.

Теорема 1 (необходимые условия оптимального правила просмотра). Для того, чтобы правило просмотра $(x_1,...,x_{j-1} \mid x_j,...,x_k)$ было оптимальным, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$x_j = \max(x_1,...,x_n),\ x_j \geq x_{j+1} \geq ... \geq x_n,\ \sum_{i=j}^{n} r_i \geq 1,\ \sum_{i=j+1}^{n} r_i < 1.$$

Некоторые частные случаи

1. **Две группы.** В этом случае порядок просмотра не имеет значения, в обоих случаях нужно останавливать просмотр на максимальном элементе из большей группы, а вероятность нахождения наилучшего элемента равна доле большей группы.

2. **Три группы.** Пусть $x_1 \leq x_2 \leq x_3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Согласно теореме 1, оптимальное правило просмотра имеет вид $(x_1 \mid x_3, x_2)$ либо $(x_2 \mid x_3, x_1)$, а соответствующие значения вероятностей равны $x_3 + x_1 \cdot \dfrac{x_2}{x_1 + x_3}$ и $x_3 + x_2 \cdot \dfrac{x_1}{x_2 + x_3}$. Очевидно, что первое значение больше, поэтому оптимальным всегда будет порядок такой: пропустить меньшую группу, затем просматривать группы в порядке большая-средняя.

3. **Одна группа и единичные элементы.** Пусть некоторые элементы объединены в группу, а остальные элементы просматриваются по одному, как в классической задаче. Тогда согласно теореме 1 оптимальный порядок просмотра следует искать в таком виде: пропустить некоторое количество единичных элементов, затем просмотреть группу и остановиться, если в ней будет найден максимальный элемент, в противном случае просмотреть оставшиеся единичные элементы и остановиться на первом максимальном.

Заметим, что в классической задаче оптимального выбора вероятность нахождения наилучшего элемента при стратегии «пропустить первые k элементов и остановиться на первом максимальном, начиная с k + 1» равна

$$\sum_{j=k+1}^{n} \frac{k}{j(j-1)} \cdot \frac{j}{n} = \frac{k}{n} \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

Пусть $\dfrac{k}{n} = t$, тогда при $n \to \infty$ имеем:

$$\frac{k}{n} \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{j} \to -t \cdot \ln(t).$$

Пусть доля группы равна x, а доля пропускаемых вначале элементов равна z, тогда согласно формуле полной вероятности, вероятность нахождения наилучшего элемента равна

$$p = \frac{x}{x+z} \cdot (x+z) + \frac{z}{x+z} \cdot \left[-(x+z) \cdot \ln(x+z)\right] = x - \ln(x+z).$$

Находим производную p по z и приравняем к нулю:

$$\frac{dp}{dz} = -\ln(x+z) - \frac{z}{x+z} = 0.$$

Обозначим корень уравнения $z + (x+z)\ln(x+z) = 0$ через $z^*(x)$, а соответствующее максимальное значение вероятности нахождения наилучшего элемента через $p^*(x)$, тогда $p^*(x) = x + \dfrac{z^*(x)^2}{x + z^*(x)}$.

В таблице приведены значения $z^*(x)$ и $p^*(x)$ для разных значений x.

ТАБЛИЦА

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$z^*(x)$	0.368	0.358	0.355	0.304	0.269	0.230	0.188	0.144	0.097	0.049	0
$p^*(x)$	0.368	0.380	0.410	0.453	0.508	0.572	0.645	0.724	0.811	0.903	1

С.І. Доценко

ПРО ОПТИМАЛЬНИЙ ПОРЯДОК ГРУП У ЗАДАЧІ СЕКРЕТАРЯ З ГРУПОВИМ ПРОГЛЯДАННЯМ

Розглянуто алгоритм знаходження оптимального порядку проглядання груп у задачі оптимального вибору з груповим прогляданням. Знайдено необхідні умови, яким має задовольняти оптимальний порядок проглядання, що дозволяє суттєво звузити множину перестановок, на якій слід шукати оптимальне рішення. Для деяких частинних випадків оптимальний порядок проглядання знайдено у явному вигляді.

S.I. Dotsenko

ON OPTIMAL SEARCH ORDER OF GROURS IN SECRETARY PROBLEM WITH GROUP SEARCH

The optimal order search algorithm for secretary problem with group search is considered. The necessary conditions for optimal search order are found. That is provides the opportunity to shrink the set of group permutations for optimal order search. For some particular cases such optimal group search is found in explicit form.

Список литературы

1. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М.: Изд-во Наука», 1967. С. 91 – 102.
2. Thomas Bruss F. Sum the odds to one and stop. *The Annals of Probability*. 2000. Vol. 28, N 3. P. 1384 – 1391.

Получено 12.03.2018