УДК [37.091.26]:004.9

О.О. ДИХОВИЧНИЙ*, Н.В. КРУГЛОВА*, І.В. АЛЄКСЄЄВА*

АНАЛІЗ ГЕНЕРАТОРІВ ВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ МОВИ R З ПОЗИЦІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ДАНИХ ЗА ЛОГІСТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ РАША

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

Анотація. *У роботі досліджено і проаналізовано генератори псевдовипадкових чисел (ГВЧ) та квазівипадкові послідовності (КВП), які реалізовано у середовищі статистичного програмування R, з огляду на можливість моделювання матриць, які описуються логістичною моделлю Раша. Моделювання таких матриць є важливим для імітаційного моделювання результатів педагогічних тестувань, соціологічних опитувань. Показано, які саме ГВЧ та КВП є прийнятними для такого моделювання.*
Ключові слова: *генератор випадкових чисел (ГВЧ), квазівипадкова послідовність (КВП), логістична модель Раша, мова статистичного програмування R.*

Аннотация. *В работе исследованы и проанализированы генераторы псевдослучайных чисел (ГСЧ) и квазислучайные последовательности (КСП), которые реализованы в среде статистического программирования R, с точки зрения возможности моделирования матриц, которые описываются логистической моделью Раша. Моделирование таких матриц важно для имитационного моделирования результатов педагогических тестов, социологических опросов. Показано, какие именно ГСЧ и КСП являются подходящими для такого моделирования.*
Ключевые слова: *генераторы псевдослучайных чисел (ГСЧ), квазислучайные последовательности (КСП), логистическая модель Раша, язык статистического программирования R.*

Abstract. *This article explores and analyzes pseudorandom numbers generators (PRNG) and quasi-random sequences(QRS) which are realized in the statistical programming language R, from the point of view of possible matrix modeling described by logistic Rasch modeling. Modeling of such matrixes is critical for imitational modeling of educational testing results and sociological surveys. It is demonstrated which specific PRNG and (QRS) are suitable for such modeling.*
Keywords: *pseudorandom numbers generators (PRNG), quasi-random sequences (QRS), Rasch logistic model, statistical programming R language.*

1. Вступ

Статистичні дані, що описуються логістичною моделлю Раша [1], знаходять своє застосування у різних галузях: психометрії, тестології, кваліметрії, педагогіці, соціальних дослідженнях, там, де у певному соціумі задають систему запитань, відповідь на які передбачає два варіанти: «так» або «ні».

Під моделюванням таких статистичних даних ми будемо розуміти створення матриці відповідей, яка складається з нулів та одиниць, які відповідають двом варіантам відповіді. Такі матриці визначаються двома наборами спеціальних параметрів, які називають латентними. Один набір характеризує об’єкти, що досліджуються (тестові питання, якість програмних продуктів, особисті характеристики певних осіб), а другий набір характеризує тих, хто дає відповіді (абітурієнти, іспитники, кандидати на певну посаду, просто респонденти). Таким питанням присвячено, приміром, роботи [2, 3].

Не дивлячись на різне тлумачення параметрів моделі, будемо дотримуватись термінології, запозиченої з тестів. Математичне підґрунтя таких моделей створює Item Response Theory (IRT) [1]. Перший набір латентних параметрів будемо називати складністю завдання тесту $\beta_j, j=\overline{1,K}$, другий набір – підготовленістю іспитника $\theta_i, i=\overline{1,N}$. Згідно з моделлю Г. Раша [1], зв'язок між ними встановлює ймовірність правильної відповіді i -го іспитника на j -те дихотомічне завдання тесту:

$$p_{ij} = \frac{1}{1+\exp\left(-\left(\theta_i - \beta_j\right)\right)}, i = \overline{1, N},\ j = \overline{1, K}.$$

Про актуальність такої постановки проблеми у педагогічних дослідженнях вже відмічалось у [4]. Додамо, що основним фактором, який спонукає до таких досліджень, є спроба прогнозування відповідних статистичних характеристик. Приміром, у соціологічних дослідженнях замість складності тестового завдання може фігурувати рівень недовіри виборців до певного депутата, а як підготовленість іспитників – освіченість у намірах відповідної особи.

Головні вимоги, що висуваються до змодельованих даних, це:

1. Адекватність заданим параметрам.
2. Точність розрахунку латентних параметрів за змодельованою матрицею.
3. Швидкість роботи програм моделювання.

2. Постановка проблеми

Очевидно, що якість моделювання залежить від базового генератора випадкових чисел, який генерує рівномірно розподілені на [0,1] псевдовипадкові числа, або від квазівипадкової послідовності, яка обчислюється детерміністично, за певним аналітичним виразом, і використовується для імітації випадкових, однаково розподілених чисел. КВП послідовності використовуються в обчисленнях як заміна псевдовипадкових чисел.

Нами були сформульовані такі питання:

1. Якщо мова R пропонує великий арсенал ГВЧ або КВП, то що саме краще обрати для моделювання таких матриць?

2. За якими критеріями його обирати?

Аналізу якості ГВЧ та КВП присвячено велику кількість робіт. Оглядовою роботою з алгоритмів генерації випадкових чисел, реалізованих у системі R у пакетах randtoolbox та base, є [5], у якій коротко сформульовано алгоритми, покладені в основу роботи генераторів або формування КВП, формати виклику, а також засоби тестування.

У даній статті для дослідження було обрано такі ГВЧ:

• Linear congruential generators.
• WELL generators.
• Mersenne-Twister.
• Wichmann-Hill.
• Marsaglia-Multicarry.
• Super-Duper.
• Knuth-TAOCP-2002.
• Knuth-TAOCP.
• L'Ecuyer-CMRG.
• SFMT.

А також КВП:

• Halton sequences.
• TORUS sequences.
• Sobol sequences.

Хоча ГВЧ та КВП дуже детально і ретельно проаналізовано у різній літературі, але питання, який із методів є кращим з точки зору генерації матриць відповідей за моделлю Раша, за нашою інформацією, взагалі не розглядалось.

Метою статті є дослідження вибору у певному сенсі ГВЧ або КВП для моделювання матриці відповідей за моделлю Раша.

3. Методи дослідження

Дослідження проводилось у такому напрямі.

Було проаналізовано існуючі ГВЧ та КВП, які реалізовано у названих вище пакетах сайту CRAN [6] та імплементовано їх в оболонку функції sim.rasch (пакет eRm).

Базовим датчиком випадкових чисел для середовища R є Mersenne-Twister. Заміна датчика відбувалася таким чином:

1) для ГВЧ з пакета randtoolbox, які інтегровані під інтерфейс функції runif, задавалася одна з команд:

а) set.generator(name="congruRand", mod=..., mult=..., incr=..., seed=...)#викликає лінійний конгруентний датчик з відповідними параметрами ;

б) set.generator("MersenneTwister", initialization="...", resolution=..., seed=...)#викликає MersenneTwister;

в) set.generator("WELL", order="...", version=..., seed=...) #WELL;

2) для ГВЧ з пакета base використовувалася команда RNGkind(). Параметром

виступала назва датчика з такого списку: "Wichmann-Hill","Marsaglia-Multicarry", "Super-Duper", "L'Ecuyer-CMRG ", "Knuth-TAOCP", "Knuth-TAOCP-2002";

3) окремо для ГВЧ, які не інтегровані під інтерфейс runif та КВП, процес моделювання рівномірно розподіленої величини відбувався безпосередньо однією з таких функцій:

а) SFMT(n, dim = 1, mexp = ...) #для SFMT;

б) halton(n, dim = 1);

в) sobol(n, dim = 1);

г) torus(n, dim = 1).

Ми модифікували функцію sim.rasch пакета erm, яка забезпечувала генерацію відповідної матриці відповідей, що описується логістичною моделлю Раша, додавши можливість змінювати ГВЧ. Для цього було введено додаткові параметри, які характеризували кожен датчик. Також було змінено формат результата з можливістю збереження змодельованих параметрів іспитників. Нижче наведено приклад функції, яка забезпечує моделювання матриць**,** викликаючи один із датчиків зі списку пакета **base**:

```
sim2.rasch <-function(persons, items, seed = NULL, cutpoint = "randomized",da)
{
  #produces rasch homogeneous data
  #cutpoint... probability or "randomized"

 RNGkind(da)
  if (length(items) == 1) {
    if (!is.null(seed)) set.seed(seed)
    schwierig <- rnorm(items)      #standard normal distributed
    n.items <- items
  } else {
    schwierig <- items
    n.items <- length(items)
  }

  if (length(persons) == 1) {
    if (!is.null(seed)) set.seed(seed)
    faehig <- rnorm(persons)
```

```
  n.persons <- persons
} else {
  faehig <- persons
  n.persons <- length(persons)
}
  fsmat <- outer(faehig, schwierig, "-")
psolve <- exp(fsmat)/(1+exp(fsmat))
  if (cutpoint == "randomized") {
  if (!is.null(seed)) set.seed(seed)
  R <-(matrix(runif(n.items*n.persons),n.persons,n.items) < psolve)*1
} else {
  R <- (cutpoint < psolve)*1
}
R1<-list(R,faehig)
return(R1)
RNGkind("default")
}
```

Основним методом, покладеним в основу моделювання результатів тестування пакетами, написаними мовою R для функції sim.rasch, є метод обернених функцій розподілу [7], а саме, наступний алгоритм генерації матриці первинних балів:

1) за допомогою датчика випадкових чисел генерується випадкова величина U, рівномірно розподілена на відрізку [0, 1];

2) обчислюється ймовірність неправильної відповіді за формулою $p_{ij} = 1/(1 + \exp(\theta_i - \beta_j))$;

3) якщо $U > p_{ij}$, то елементом матриці буде 1, в іншому випадку – 0.

Після моделювання матриці первинних балів за допомогою одного з вищеназваних датчиків проводився аналіз відповідних матриць. Аналіз передбачав такі процедури:

1. Обчислювалось середньоквадратичне відхилення між векторами заданих латентних параметрів і оціненими за змодельованими матрицями;

2. Перевірялась гіпотеза про адекватність згенерованих матриць заданим латентним параметрам тестових завдань і параметрам іспитників за критерієм χ^2 [8, с. 77]. Для цього було проведено таку процедуру.

Позначимо I_b – множину номерів іспитників, які набрали b первинних балів.

Тоді n_b – кількість іспитників, які набрали b балів, $b = \overline{0, K}$, n_{bj} – кількість іспитників, які набрали бал b за j-те завдання.

Далі позначимо $p_{bj}{}^* = \dfrac{n_{bj}}{n_b}$,

$$\chi^2(j) = \sum_{b=0}^{k} \frac{n_b(p_{bj}{}^* - p_{bj})^2}{p_{bj}},\ j = \overline{0, K},\ \chi^2 = \sum_{j=0}^{k} \chi^2(j),$$

$p_{bj} = \dfrac{1}{n_{bj}} \sum\limits_{i \in I_b} \dfrac{1}{1 + \exp\left(-\left(\theta_i - \beta_j\right)\right)}$ – середнє значення ймовірностей правильних відповідей на j-те завдання у групі іспитників, які набрали b балів.

Відомо [8], що за широких припущень статистика χ^2 має розподіл хі-квадрат з $\nu = qK$ степенями свободи, де q – кількість груп, на які розбиваються всі іспитники в залежності від кількості балів. Отже, порівнюючи статистику χ^2 з критичним значенням, перевіряється гіпотеза про адекватність матриці відповідним латентним параметрам.

3. Проводилось порівняння часу програм моделювання.

4. Результати дослідження

Як вже відмічалось, було модифіковано програму sim.rasch (пакет eRm), що дозволило легко обирати потрібний ДВЧ або КВП і моделювати відповідну матрицю. Латентні параметри складності завдань задавались вручну, а параметри підготовленості іспитників моделювались. За змодельованими матрицями за допомогою функції rasch пакета ltm було розраховано відповідні латентні параметри і проведено порівняльний аналіз. Генерувались матриці для 15-ти значень параметрів складності:

$$\beta_1 = -3,5, \beta_2 = -3,0, \beta_3 = -2,5, \beta_4 = -2,0, \beta_5 = -1,5, \beta_6 = -1,0, \beta_7 = -0,5, \beta_8 = -0,0,$$
$$\beta_9 = 0,5, \beta_{10} = 1,0, \beta_{11} = 1,5, \beta_{12} = 2,0, \beta_{13} = 2,5, \beta_{14} = 3,0, \beta_{15} = 3,5$$

та параметрами підготовленості для кількості іспитників $N = 100; 1000; 10000; 100000$, які генерувались як нормальні величини із середнім – 0.0, і дисперсією – 1.0 по 1000 копій кожної матриці для відповідного набору параметрів. Результати оцінювання параметрів для цілих значень наведено для $N = 100; 1000; 10000; 100000$ у табл. 1. Очевидно, що при збільшенні N оцінки параметрів β_j наближалися до відповідних заданих параметрів, що наочно відображається у табл. 1.

Таблиця 1. Оцінки для цілих значень параметрів складності завдань

Назва ГВЧ (КВП)	Кількість іспитників	Вхідні параметри складності завдань, β_j						
		-3	-2	-1	0	1	2	3
		Результат моделювання						
Sobol	100	-2,96999	-2,96999	-1,30548	-0,09423	1,012341	1,946462	3,141282
	1000	-3,0853	-2,11711	-1,00462	-0,06997	0,935549	1,918174	2,776736
	10000	-3,06953	-1,99332	-1,01434	-0,0025	1,022842	2,015064	3,030247
	100000	-2,98865	-1,99332	-0,99534	0,008761	1,00165	1,998053	2,995001
SFMT mexp = 11213	100	-4,36109	-1,52113	-0,91729	0,191918	1,082377	2,153333	3,141282
	1000	-2,77338	-1,95803	-0,92396	-0,01097	1,038866	1,941284	2,895749
	10000	-3,06215	-1,99498	-0,94456	0,024297	1,03989	2,045602	3,000957
	100000	-2,99047	-2,01573	-1,00845	-0,00352	0,999796	2,004049	3,007365
SFMT mexp = 86243	100	-2,94858	-1,63068	-1,01152	0,132226	0,674944	2,678241	3,928602
	1000	-2,95557	-1,98743	-0,96382	-0,16144	0,973012	1,847553	2,820845
	10000	-3,02548	-1,98413	-1,03361	0,00339	0,990855	2,012761	3,020698
	100000	-3,02548	-2,00358	-0,99424	9,49E-05	1,001539	1,998518	3,009681
SFMT mexp = 44497	100	-4,36989	-1,72656	-1,44591	0,244854	1,382276	2,142577	2,694612
	1000	-3,00643	-1,97633	-0,98671	-0,03939	1,042298	1,915977	2,859279
	10000	-3,00643	-2,00618	-0,99593	0,013085	1,012164	1,935807	3,043526
	100000	-2,99319	-1,98681	-0,99264	0,009959	1,005746	1,992354	2,998742
Лінійний конгруентний $m = 2^{32}$, $a = 134775813$, c=1	100	-2,85694	-2,25636	-0,80841	0,195477	1,266227	2,588461	2,717602
	1000	-3,07556	-1,89535	-0,974	-0,01015	0,951296	1,987908	2,819855
	10000	-3,07493	-1,99916	-1,03778	-0,00044	0,992812	2,028425	3,028996
	100000	-3,00448	-1,9983	-1,03778	0,000229	1,00486	2,000574	3,022391

Продовж. табл. 1

Лінійний конгруентний $m = 2^{31} - 1$, $a = 16807$, c=0	100	-3,88249	-2,11511	-1,18461	0,329163	1,17637	1,782411	3,358108
	1000	-2,82511	-1,95485	-0,92529	0,101767	0,992446	2,058839	3,138133
	10000	-3,04437	-2,01125	-0,99862	-0,01867	0,981427	0,981427	2,993802
	100000	-2,99791	-1,97765	-0,99457	0,014591	1,009817	2,002382	3,026031
WELL 521b	100	-3,13667	-1,94365	-1,24311	-0,04974	0,685364	2,317231	2,671023
	1000	-2,95578	-1,93722	-0,97597	0,118829	0,901238	2,161363	2,808596
	10000	-3,01767	-1,99111	-1,03179	0,006955	0,956908	1,937249	3,001551
	100000	-3,01247	-2,00314	-1,0155	-0,00151	1,025694	2,013924	2,998673
Knuth-TAOCP-2002	100	-2,86116	-2,36008	-1,02315	-0,28754	1,206634	1,737735	2,704911
	1000	-3,03405	-2,08095	-0,82124	0,061011	1,027696	1,901555	3,109878
	10000	-2,98148	-2,01888	-1,05385	0,004423	2,00574	2,00574	2,994536
	100000	-3,03302	-1,98572	-1,01092	0,002889	1,005491	1,996983	3,015055
L'Ecuyer-CMRG	100	-3,58696	-2,30871	-1,35651	-0,18798	0,895005	1,933583	2,65631
	1000	-3,15303	-2,04062	-0,97646	0,02366	1,065901	2,014262	2,978221
	10000	-3,02105	-1,97866	-1,01648	-0,03069	0,945994	2,024688	2,958073
	100000	-2,99104	-1,99093	-0,99611	0,007522	1,001163	1,990357	2,993235

Інформація про результати тестування занесена у табл. 2.

У першому стовпці – назва датчика та його параметри.

У другому стовпці – наведено значення усередненої за кількістю копій різниці квадратів відхилень заданих параметрів від оцінених – $\sum_{j=1}^{K}(\beta_j - \beta_j^*)^2$.

Перевірка гіпотези про адекватність згенерованих матриць заданим латентним параметрам тестових завдань і параметрам іспитників здійснювалась таким чином. Для кожного датчика та для кожної серії зі 100 іспитників обчислювалась описана вище статистика χ^2, а потім здійснювалось усереднення за 1000 копіями. Якість датчика визначалась величиною статистики $\chi^2_{сер}$. Чим менше її значення, тим кращим вважається датчик. Отже, третій стовпець – це усереднене значення статистики $\chi^2_{сер}$.

Квантіль рівня 0,99 для 240 степенів свободи дорівнює 293,8881.

Таблиця 2. Результати тестування ГВЧ та КВП

Параметри датчика	$\sum_{j=1}^{K}(\beta_j - \beta_j^*)^2$	$\chi^2_{сер}$
Лінійний конгруентний		
$m = 2^{32}$, $a = 1664525$, c=1013904223	12,901902	298,3995
$m = 2^{32}$, $a = 22695477$, c=1	18,022060	293,0626
$m = 2^{31}$, $a = 1103515245$, c=12345	28,744907	301,6033
$m = 2^{32}$, $a = 1103515245$, c=12345	23,296027	296,4250
$m = 2^{32}$, $a = 134775813$, c=1	2,077598	285,5678
$m = 2^{32}$, $a = 214013$, c=2531011	44,968737	289,8386
$m = 2^{31} - 1$, $a = 2147483629$, c=2147483587	7,378173	295,1240
$m = 2^{31} - 1$, $a = 16807$, c=0	2,103487	273,1119
$m = 2^{31} - 1$, $a = 48271$, c=0	28,711728	300,1276

Продовж. табл. 2

$m = 2^{32}$, $a = 69069$, c=1	12,640029	299,5406
$m = 2^{48}$, $a = 25214903917$, c=11	28,625521	298,3904
$m = 2^{31}$, $a = 65539$, c=0	12,821003	298,7731
WELL		
512a	12,578803	297,8546
521a	7,424895	294,5414
521b	2,078762	288,8736
607a	12,978148	300,2189
607b	17,953156	290,4804
800a	7,458627	297,3685
800b	7,365916	301,7119
1024a	12,609662	300,2870
1024b	7,295478	295,1522
19937a	12,772618	301,1900
19937b	17,933151	296,7388
19937c	18,089460	305,5549
21701a	7,490811	299,7937
23209a	17,927908	295,6304
23209b	7,523001	302,2541
44497a	7,431261	302,6247
44497b	7,360401	305,5190
MT		
init2002, resolution=53	18,21784	300,1276
init2002, resolution=32	12,63453	299,5406
array2002, resolution=53	23,42690	298,3904
array2002, resolution=32	12,90417	298,7731
RNGkind		
Wichmann-Hill	12,710243	305,7442
Marsaglia-Multicarry	28,738514	302,7548
Super-Duper	12,883749	292,5950
Knuth-TAOCP-2002	2,181302	290,8098
Knuth-TAOCP	7,440057	292,6237
L'Ecuyer-CMRG	2,093671	283,8268
SFMT		
mexp = 607	7,413628	298,2363
mexp = 1279	7,537468	293,7343
mexp = 2281	7,319433	293,1618
mexp = 4253	7,376891	301,4026
mexp = 11213	1,977513	286,5932
mexp = 19937	23,272064	298,1444
mexp = 44497	2,029757	289,8998
mexp = 86243	1,926719	283,2000
mexp = 132049	13,006511	295,5298
mexp = 216091	7,476710	299,6637
Квазівипадкові послідовності		
Halton	8,911886	670,7337
Sobol	0,9440769	265,8672
Torus	3539,569	298,7756

5. Висновки

На підставі дослідження застосування різних ДВЧ та КВП у моделюванні матриць відповідей можна зробити такі висновки:

1. Матриці, які згенеровані за допомогою різних ДВЧ і КВП, але за одним алгоритмом моделювання, можуть бути як адекватними, так і неадекватними вхідним латентним параметрам моделювання.

2. Основну увагу було приділено можливості точного розрахунку латентних параметрів за змодельованими матрицями, а саме величині $\sum_{j=1}^{K}(\beta_j - \beta_j^*)^2$. Звернемо увагу на те, що моделювання проводилося для кількості іспитників $N = 100; 1000; 10000; 100000$. Оскільки при збільшенні N оцінки параметрів $\beta_j,\ j = \overline{1,15}$ наближалися до відповідних заданих параметрів, що видно з табл. 1, тому для різних датчиків при $N = 10000; 100000$ величини $\sum_{j=1}^{K}(\beta_j - \beta_j^*)^2$ відрізнялися не суттєво.

Зовсім іншу картину ми спостерігаємо для $N = 100$. Деякі датчики давали досить значне відхилення від еталонних параметрів, тому ми їх відкинули, а деякі давали досить точний результат моделювання. Тобто, на невеликих за обсягом вибірках спостерігається нестійкість оцінок параметрів моделі. Зауважимо, що при проведенні реального тестування мають справу з вибірками саме такого об'єму (кількість студентів на потоці певної спеціальності, паралель учнів тощо).

3. Головною проблемою, яка виникає у процесі моделювання матриць, це проблема тривіальних стовпців, тобто стовпців, які складаються тільки з нулів або одиничок. Поява таких елементів матриці призводить до некоректної роботи алгоритмів і програм оцінки латентних параметрів, а саме програми rasch. При роботі цієї програми використовуються ітераційні алгоритми розв'язування нелінійних систем рівнянь. Поява тривіальних стовпців призводить до «явища зсуву параметрів» або до розбіжності ітераційного процесу, описаних у [9, 10]. Подібний ефект виникає перш за все при застосуванні КВП TORUS, а також для датчиків, для яких у табл. 2 величина $\sum_{j=1}^{K}(\beta_j - \beta_j^*)^2$ виходить за 18. Тому використання таких ДВЧ і КВП для моделювання матриць є недоречним.

4. Цікавим є одержання прийнятного результату для КВП SOBOL. Деякі пояснення щодо його привабливості наведено у [11].

5. За швидкодією не було помічено суттєвої різниці між різними ДВЧ або КВП.

6. Підсумовуючи результати дослідження, на нашу думку, найкращими для моделювання матриць відповідей, які описує модель Раша, є:

1) лінійний конгруентний з параметрами $m = 2^{32}, a = 134775813, c = 1$ або $m = 2^{31} - 1, a = 16807, c = 0$;

2) WELL з параметрами 521b;

3) Knuth-TAOCP-2002;

4) L'Ecuyer-CMRG;

5) SFMT з параметрами mexp = 11213, mexp = 44497, mexp = 86243;

6) Sobol.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Linden W. Handbook of modern item response theory / W. Linden, R. Hambleton. – New York:

Springer, 1997. – P. 503.
2. Моисеев С.И. Модель оценки качества программного обеспечения, основанная на методе Раша оценки латентных переменных / С.И. Моисеев, Ю.В. Черная, Е.В. Паршина // Современные технологии разработки программного обеспечения. Вестник ВГУ. – (Серия «Системный анализ и информационные технологии»). – 2016. – № 1. – С. 102 – 109.
3. Маслак А.А. Модель Раша для проверки качества метода измерения толерантности / А.А. Маслак, С.А. Поздняков // Социология: методология, методы, математическое моделирование. – 2008. – № 26. – С. 87 – 104.
4. Диховичний О.О. Застосування мови R у статистичному аналізі якості тестів з вищої математики / О.О. Диховичний, А.Ф. Дудко, Н.В. Прохоренко // Матеріали Вісімнадцятої міжнар. наук. конф. імені академіка Михайла Кравчука, (Луцьк – Київ, 7–10 жовтня 2017 р.). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – Т. 2. – С. 222 – 224.
5. Christophe Dutang A note on random number generation / Christophe Dutang,Diethelm Wuertz [Електронний ресурс]. – 2009. – P. 30. – Режим доступу: https://www.coursehero. com/file/14540994/fullpres/.
6. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://cran.r-project.org/.
7. Ермаков С.М. Статистическое моделирование / С.М. Ермаков, Г.А. Михайлов. – М.: Наука, 1982. – 296 с.
8. Нейман Ю.М. Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов / Ю.М. Нейман, В.А. Хлебников. – М., 2000. – 168 с.
9. Fischer G.H. Rasch models. foundations, recent developments, and applications / G.H. Fischer, I.W. Molenaar. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. – 436 p.
10. Застосування математичних моделей тестів у комплекті дистанційної освіти «Вища математика» / І.В. Алексєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний [та ін.] // Математичні машини і системи. – 2010. – № 4. – С. 89 – 97.
11. Радченко С.Г. Применение ЛПТ равномерно распределенных последовательностей для решения прикладных задач моделирования / С.Г. Радченко, О.В. Козырь // Математичні машини і системи. – 2014. – № 1. – С. 151 – 158.

Стаття надійшла до редакції 11.04.2018