УДК 519.217

О.А. ЯРОВА

НЕЛІНІЙНЕ НОРМУВАННЯ ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ У СХЕМІ АПРОКСИМАЦІЇ ЛЕВІ

Анотація. Розглянуто випадкові еволюції у схемі апроксимації Леві. Еволюції визначено неперервним справа марковським процесом. Запропоновано нормування процесу нескінченно малою нелінійною функцією. Показано слабку збіжність генератора випадкової еволюції до граничного генератора. Знайдено функції нормування.

Ключові слова: випадкова еволюція, апроксимація Леві, процес з незалежними приростами, процес Маркова.

Відомо, що випадкова еволюція з локально незалежними приростами визначається співвідношенням [1]:

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(ds; x(s)), \ t \geq 0,$$

де $\eta(t; x)$ — неперервний справа марковський процес, що є процесом з локально незалежними приростами та визначається генератором

$$\Gamma(x)\varphi(u) = b(u; x)\varphi'(u) + \int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\,\Gamma(u, dv; x).$$

Випадкові еволюції розглянуто у роботах [1–6]. Зокрема, у монографії В.С. Королюка та Н. Лімніоса [1] описано кілька моделей для процесів з незалежними приростами та імпульсних процесів у схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві. Проте у зазначених роботах випадкові процеси нормують лише лінійним множником. Метою цієї статті є визначення параметрів нормування як нелінійних функцій.

Розглянемо випадкову еволюцію в схемі апроксимації Леві з нормувальним множником $g_2(\varepsilon)$

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi_0^\varepsilon + \int_0^t \eta_\varepsilon\left(ds; x\left(\frac{s}{g_2(\varepsilon)}\right)\right),$$

де $x(t), t \geq 0$, — рівномірно ергодичний марковський процес зі стаціонарним розподілом $\pi(A)$, $g_2(\varepsilon) \to 0, \ \varepsilon \to 0$, яка задовольняє такі умови.

Умова EL1. Має місце апроксимація середніх:

$$b_\varepsilon(u; x) = \int_R v\Gamma^\varepsilon(u, dv; x) = g_1(\varepsilon) b_1(u; x) + g_2(\varepsilon)(b(u; x) + \theta_b^\varepsilon(u; x))$$

та

$$c_\varepsilon(u; x) = \int_R vv^* \Gamma^\varepsilon(u, dv; x) = g_2(\varepsilon)(c(u; x) + \theta_c^\varepsilon(u; x)),$$

де v^* — транспонований вектор до вектора v, $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon))$, $g_1(\varepsilon)$, $g_2(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Знехтувані доданки $\theta_b^\varepsilon(u; x)$, $\theta_c^\varepsilon(u; x)$ задовольняють умову

$$\sup_{x \in E} |\theta^\varepsilon(u; x)| \to 0, \ g_2(\varepsilon) \to 0, \ \varepsilon \to 0.$$

Умова EL2. Ядро інтенсивностей має вигляд

$$\Gamma_q^{\varepsilon}(u; x) = \int_R q(v)\, \Gamma^{\varepsilon}(u, dv; x) = g_2(\varepsilon)\,(\Gamma_q(u; x) + \theta_q^{\varepsilon}(u; x))$$

для всіх $q \in C_3(R)$, і ядро $\Gamma_q(u; x)$ обмежене для всіх $q \in C_3(R)$ так, що

$$|\Gamma_q(u; x)| \le \Gamma_q = \text{const}.$$

Ядро $\Gamma_q(u; x)$ визначається співвідношенням

$$\Gamma_q(u; x) = \int_R q(v)\, \Gamma(u, dv; x).$$

Умова EL3. Виконується умова балансу:

$$\int_E \pi(dx) b_1(u; x) = 0.$$

Умова EL4. Виконуються умови на початкові значення:

$$\sup_{\varepsilon > 0} E|\xi_0^{\varepsilon}| \le C < \infty,$$

$$|\xi_0^{\varepsilon}| \to \xi_0,\ g_2(\varepsilon) \to 0,\ \varepsilon \to 0.$$

Умова EL5. Має місце рівномірна квадратична інтегровність:

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{x \in E} \int_{v > c} v v^* \Gamma(u, dv; x) = 0.$$

Умова EL6. Виконується умова зростання: існує додатна константа L така, що

$$|b(u; x)| \le L(1 + |u|),\ |c(u; x)| \le L(1 + |u|^2)$$

для всіх дійснозначних невід'ємних функцій $f(v)$, $v \in R$, таких, що

$$\int_{R \setminus \{0\}} (1 + f(v))|v|^2 dv < \infty,\ |\Lambda(u, v, x)| \le Lf(v)(1 + |u|),$$

де $\Lambda(u, v, x)$ — похідна Радона–Нікодима ядра $\Gamma(u, B; x)$ відносно міри Лебега dv в R, тобто

$$\Gamma(u, dv; x) = \Lambda(u, v; x) dv.$$

Умова EL7. Виконується співвідношення $\sup_{x \in E} \int_0^{\infty} e^{ht} F_x(dt) \le H < +\infty,\ h > 0$.

Умова EL8. Для довільного $r > 0$ існує константа l_r така, що

$$|\hat{b}(u) - \hat{b}(u')| + |\sigma^2(u) - \sigma^2(u')| + |\hat{\Gamma}(u, v) - \hat{\Gamma}(u', v)| \le l_r |u - u'|,$$

якщо $|u| \le R,\ v \le R$.

Теорема 1. За умов EL1–EL7 має місце слабка збіжність

$$\xi^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \xi^0(t),\ g_2(\varepsilon) \to 0,\ \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\xi^0(t)$ за умови EL8 визначається генератором

$$\hat{\Gamma}\varphi(u) = \hat{b}(u)\varphi'(u) + \int_R (\varphi(u + v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\hat{\Gamma}(u, dv),$$

де $\hat{b}(u) = \int_E \pi(dx) b(u; x)$, $\Gamma(u) = \int_E \pi(dx)\Gamma(u, dv; x)$.

Доведення. В основі доведення лежить напівмартингальне представлення процесу [7].

Передбачувані характеристики напівмартингалу мають такий вигляд:

$$B^{\varepsilon}(t)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_0^t b_{\varepsilon}(\xi^{\varepsilon}(s);x_s^{\varepsilon})ds=\int_0^t b(\xi^{\varepsilon}(s);x_s^{\varepsilon})ds+\theta_b^{\varepsilon},$$

$$C^{\varepsilon}(t)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_0^t c_{\varepsilon}(\xi^{\varepsilon}(s);x_s^{\varepsilon})ds=\int_0^t c(\xi^{\varepsilon}(s);x_s^{\varepsilon})ds+\theta_c^{\varepsilon},$$

$$\Gamma^{\varepsilon}(t)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_0^t\int_R q(v)\Gamma^{\varepsilon}(\xi^{\varepsilon}(s),dv;x_s^{\varepsilon})\,ds=\int_0^t\int_R q(v)\Gamma^{\varepsilon}(\xi^{\varepsilon}(s),dv;x_s^{\varepsilon})ds+\theta_{\Gamma}^{\varepsilon},$$

де $x_t^{\varepsilon}=x\left(\dfrac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)$, $t\geq 0$, $\sup\limits_{x\in E}|\theta^{\varepsilon}|\to 0$, $g_2(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0$.

Стрибкова мартингальна частина напівмартингалу визначається співвідношенням

$$\mu^{\varepsilon}(t)=\int_0^t\int_R v(\mu^{\varepsilon}(ds,dv;x_s^{\varepsilon})-\Gamma^{\varepsilon}(\xi^{\varepsilon}(s),dv;x_s^{\varepsilon})\,ds),$$

де $\mu^{\varepsilon}(ds,dv;x)$ — сім'я лічильних мір, причому

$$E\mu^{\varepsilon}(ds,dv;x)=\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x)ds.$$

Позначимо $A^{\varepsilon}(t)$ основну частину будь-якої з передбачуваних характеристик.

Розглянемо розширений ланцюг Маркова

$$A_n^{\varepsilon}=A_0^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon}),\xi_n^{\varepsilon},x_n^{\varepsilon},\tau_n^{\varepsilon},\ n\geq 0,$$

де $x_n^{\varepsilon}=x^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon})$, $x^{\varepsilon}(t)=x\left(\dfrac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)$, $\xi_n^{\varepsilon}=\xi^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon})$, $\tau_{n+1}^{\varepsilon}=\tau_n^{\varepsilon}+g_2(\varepsilon)\theta_n^{\varepsilon}$,

$$P(\theta_{n+1}^{\varepsilon}\leq t\,|\,x_n^{\varepsilon}=x)=F_x(t)=P(\theta_x\leq t).$$

Компенсувальний оператор розширеного марковського процесу відновлення має представлення [1]

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,v;x,t)=$$

$$=g_2(\varepsilon)q(x)\left(\int_0^{\infty}F_x(ds)A_{\varepsilon s}(u;x)\Gamma_{\varepsilon s}(x)\int_E P(x,dy)\varphi(u,v;\,y,t+g_2(\varepsilon)s-\varphi(u,v;x,t)\right),$$

де $\Gamma_{\varepsilon s}(x)$, $s\geq 0$, — сім'я напівгруп, що відповідає генератору $\Gamma^{\varepsilon}(x)$, $x\in E$, $A_{\varepsilon s}(u;x)$ — сім'я напівгруп з генератором $A(u;x)\varphi(u)=a(u;x)\varphi'(u)$.

Цей генератор має таке асимптотичне представлення:

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,v;x)=(g_2(\varepsilon))^{-1}Q\varphi(\cdot,\cdot;x)+A(u;x)P\varphi(\cdot,v;\cdot)+$$

$$+\Gamma^{\varepsilon}(x)P\varphi(u,\cdot;\cdot)+g_2(\varepsilon)\theta^{\varepsilon}(x)P\varphi(u,v;x),$$

де P — оператор переходу, асоційований з $P(x,B)$, а $Q\varphi(x)=q(x)\int_E P(x,dy)(\varphi(\cdot\,;y)-\varphi(\cdot\,;x))$.

Для доведення збіжності передбачуваних характеристик достатньо розглянути дію оператора L^{ε} на тест-функціях двох змінних.

У цьому разі оператор має таке представлення:

$$L^{\varepsilon}\varphi(v;x)=((g_2(\varepsilon))^{-1}Q+A(u;x)P+g_2(\varepsilon)\theta^{\varepsilon}(x)P)\,\varphi(v;x).$$

Задача сингулярного збурення для оператора має вигляд $L^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}=\hat{L}\varphi+\theta^{\varepsilon}\varphi$, де $\varphi^{\varepsilon}(v;x)=\varphi(v)+g_2(\varepsilon)\varphi_1(v;x)$.

Розв'язок задачі сингулярного збурення має представлення

$$\hat{L}=\hat{A}(u),\ \ \hat{A}(u)=\Pi A(u;x)\Pi=\int_E \pi(dx)A(u,x).$$

Отже,

$$\hat{A}(u)\varphi(u)=\hat{a}(u)\varphi'(v),\ \text{де}\ \hat{a}(u)=\int_E \pi(dx)\,a(u;x).$$

У результаті підстановки операторів $B(u;x)$, $C(u;x)$, $\Gamma(u;x)$ замість $A(u;x)$ маємо такі передбачувані характеристики:

$$B^0(t)=\int_0^t \hat{b}(\xi^0(s))ds,\ C^0(t)=\int_0^t \hat{c}(\xi^0(s))ds,\ \Gamma_q^0(t)=\int_0^t \hat{\Gamma}_q(\xi^0(s))ds.$$

Отже, слабку збіжність доведено.

Асимптотичне представлення генератора отримуємо з асимптотичного представлення на тест-функціях вигляду $\varphi^{\varepsilon}(v;x)=\varphi(v)+g_2(\varepsilon)\varphi_1(v;x)$.

Теорему доведено.

Розглянемо приклад сім'ї марковських процесів α^{ε}, для якої виконуються умови

$$P\left\{\alpha^{\varepsilon}=b(u,x)\right\}=g_2(\varepsilon)p,$$

$$P\left\{\alpha^{\varepsilon}=g_1(\varepsilon)\alpha_1(u,x)+g_2(\varepsilon)b_1(u,x)\right\}=1-g_2(\varepsilon)p.$$

Знайдемо перший та другий моменти для α^{ε}:

$$E\alpha^{\varepsilon}=g_2(\varepsilon)pb(u,x)+g_1(\varepsilon)\alpha_1(u,x)+g_2(\varepsilon)b_1(u,x)-g_1(\varepsilon)g_2(\varepsilon)p\alpha_1(u,x)-$$

$$-g_2^2(\varepsilon)pb_1(u,x)=g_1(\varepsilon)\alpha_1(u,x)+g_2(\varepsilon)(pb(u,x)+b_1(u,x))+o(g_2(\varepsilon)),$$

$$E(\alpha^{\varepsilon})^2=g_2(\varepsilon)pb^2(u,x)+(g_1(\varepsilon)\alpha_1(u,x)+g_2(\varepsilon)b_1(u,x))^2(1-g_2(\varepsilon)p)=$$

$$=g_2(\varepsilon)pb^2(u,x)+o(g_2(\varepsilon)).$$

Таким чином, сім'я марковських процесів α^{ε} задовольняє умови апроксимації Леві.

Відповідно до теореми 1 існує слабка збіжність

$$\xi^{\varepsilon}(t)\Rightarrow\xi^0(t),\ g_2(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

З цієї збіжності випадкових процесів випливає збіжність генераторів, якими марковські процеси описуються, тобто

$$\sup_{|\varphi|\le 1}|\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u)|\Rightarrow \sup_{|\varphi|\le 1}|\hat{\Gamma}\varphi(u)|.$$

Запишемо генератори у розгорнутому вигляді

$$\sup_{|\varphi|\le 1}\left| b(u)\varphi'(u)+\int_R (\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u))\,\Gamma^{\varepsilon}(u, dv; x)\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{|\varphi|\le 1}\left| \hat{b}(u)\varphi'(u)+\int_R (\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)I_{\{v\le 1\}})\hat{\Gamma}(u, dv; x)\right| .$$

Тому

$$\sup_{|\varphi|\le 1} |b(u)\varphi'(u)| \to \sup_{|\varphi|\le 1} |\hat{b}(u)\varphi'(u)|,$$

$$\sup_{|\varphi|\le 1} |(b(u)-\hat{b}(u))\varphi'(u)| \to |b(u)-\hat{b}(u)| \sup_{|\varphi|\le 1} |\varphi'(u)| \to 0.$$

Отже,

$$|b(u)-\hat{b}(u)| \to 0,$$

$$b(u)-\hat{b}(u)=b(u)-\Pi b(u)=(\mathrm{I}-\Pi)b(u)=\begin{cases}0, \; b(u)\in N_Q,\\ b(u), \; b(u)\in R_Q.\end{cases}$$

Згідно з умовою EL1 маємо

$$b(u)=(b_{\varepsilon}-g_1(\varepsilon)b_1)(g_2(\varepsilon))^{-1}-\theta_b^{\varepsilon}\to 0,$$

$$\frac{b_{\varepsilon}-g_1(\varepsilon)b_1}{g_2(\varepsilon)}-\theta_b^{\varepsilon}=$$

$$=\frac{\int_R v\Gamma^{\varepsilon}(u, dv; x)-g_1(\varepsilon)b_1}{g_2(\varepsilon)}-\theta_b^{\varepsilon}=\frac{g_2(\varepsilon)\int_R v\Gamma(u, dv; x)-g_1(\varepsilon)b_1}{g_2(\varepsilon)}-\theta_b^{\varepsilon}=$$

$$=\int_R v\Gamma(u, dv; x)-\frac{g_1(\varepsilon)}{g_2(\varepsilon)}b_1-\theta_b^{\varepsilon}=0.$$

Таким чином,

$$\frac{g_1(\varepsilon)}{g_2(\varepsilon)}=\frac{\int_R v\Gamma(u, dv; x)+\theta_b^{\varepsilon}}{b_1}.$$

Аналогічно розглянемо інтегральну збіжність

$$\sup_{|\varphi|\le 1}\left| \int_R (\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u))\Gamma^{\varepsilon}(u, dv; x)\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{|\varphi|\le 1}\left| \int_R (\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)I_{\{v\le 1\}})\Gamma(u, dv; x)\right| ,$$

$$\sup_{|\varphi|\le 1}\left| \int_R (\varphi(u+v)-\varphi(u))(\Gamma^{\varepsilon}(u, dv; x)-\hat{\Gamma}(u, dv; x))\right| \to 0.$$

Звідси

$$\Gamma^{\varepsilon}(u, x)\to \hat{\Gamma}(u, x).$$

Згідно з умовою EL2

$$g_2(\varepsilon)(\Gamma(u, x)+\theta_{\Gamma}^{\varepsilon})-\Pi\Gamma(u, x)=0, \quad g_2(\varepsilon)=\frac{\Pi\Gamma(u, x)}{\Gamma(u, x)+\theta_{\Gamma}^{\varepsilon}}=\frac{\int_R \pi(dx)\Gamma(u, dv; x)}{\Gamma(u, x)+\theta_{\Gamma}^{\varepsilon}}.$$

Запишемо нормувальну функцію $g_1(\varepsilon)$ у вигляді:

$$g_1(\varepsilon) = \frac{\int_R \upsilon\Gamma(u, d\upsilon; x) + \theta_b^{\varepsilon}}{b_1} \; g_2(\varepsilon) = \frac{\left(\int_R \upsilon\Gamma(u, d\upsilon; x) + \theta_b^{\varepsilon}\right)\int_R \pi(dx)\Gamma(u, d\upsilon; x)}{b_1(\Gamma(u, x) + \theta_{\Gamma}^{\varepsilon})}.$$

Отже, знайдено нелінійні нормувальні функції для випадкових еволюцій у схемах апроксимації Леві.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Koroliuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005. 348 p.
2. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Киев: Наук. думка, 1976. 184 с.
3. Королюк В.С., Самойленко І.В. Потенціальний оператор процесу Орнштейна–Уленбека та його застосування. *Доповіді НАН України.* 2013. № 3. С. 21–27.
4. Королюк В.С. Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії. *Український математичний журнал.* 2010. Т. 62, № 5. С. 643–650.
5. Свищук А.В. Решение мартингальной проблемы для полумарковских случайных эволюций. Асимптотические и прикладные задачи теории случайных эволюций. Киев: Институт математики АН УССР, 1990. С. 102–111.
6. Свищук А.В. Слабая сходимость полумарковских случайных эволюций в схеме усреднения (мартингальный подход). *Украинский математический журнал.* 1989. № 12. С. 1680–1686.
7. Cinlar E., Jacod J., Protter P., Sharpe M.J. Semimartingale and Markov processes. *Z. Wahrschein. verw. Gebiete.* 1980. N 54. P. 161–219.

Надійшла до редакції 17.07.2017

О.А. Яровая

НЕЛИНЕЙНОЕ НОРМИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ЭВОЛЮЦИИ В СХЕМЕ АППРОКСИМАЦИИ ЛЕВИ

Аннотация. Рассмотрены случайные эволюции в схеме аппроксимации Леви. Эволюции определены непрерывным справа марковским процессом. Предложено нормирование процесса бесконечно малой нелинейной функцией. Показана слабая сходимость генератора случайной эволюции к предельному генератору. Найдены функции нормирования.

Ключевые слова: случайная эволюция, аппроксимация Леви, процесс с независимыми приращениями, процесс Маркова.

O.A. Yarova

NONLINEAR NORMALIZATION OF RANDOM EVOLUTION IN THE SCHEME OF LEVY APPROXIMATION

Abstract. Random evolutions in the Levy approximation scheme are considered. The evolutions are determined by a continuous Markov process. The normalization of the process by an infinitely small nonlinear function is proposed. The weak convergence of the random evolution generator to the limit generator is shown. Normalizing functions are found.

Keywords: random evolution, Levi approximation, process with independent increments, Markov process.

Ярова Оксана Анатоліївна,
аспірантка Львівського національного університету імені Івана Франка,
e-mail: oksanayarova93@gmail.com.