УДК 519.21

В.С. КИРИЛЮК

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ МЕРЫ РИСКА ПРИ НЕТОЧНЫХ СЦЕНАРНЫХ ОЦЕНКАХ

Аннотация. Применение полиэдральных когерентных мер риска расширено на случай неточных сценарных оценок случайных величин. Рассмотрены проблемы оптимизации при неопределенности, охватывающие широкий класс задач стохастического программирования и робастной оптимизации. Показано, как в линейном случае они сводятся к задачам линейного программирования. Рассмотрены задачи оптимизации портфеля по соотношению вознаграждение–риск.

Ключевые слова: полиэдральная когерентная мера риска, conditional value-at-risk, спектральная когерентная мера риска, неточные оценки, линейное программирование, оптимизация портфеля, соотношение вознаграждение–риск.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–4] рассматривался математический аппарат полиэдральных когерентных мер риска (ПКМР), предназначенный для оценки риска в задачах оптимизации со случайными (неопределенными) параметрами.

В терминологии [5] ситуации, в которых вероятностное распределение таких параметров известно, называются условиями риска, в противном случае — условиями неопределенности. Риски различных процессов, как правило, обусловлены их неопределенностями, допускающими неблагоприятные (вплоть до наихудших) исходы. По сути, они отражают оценки реализации пессимистических сценариев развития событий в виде ущерба, потерь и пр. Существуют разные способы построения таких оценок. Они могут описываться средними или максимальными потерями либо некоторыми другими функциями [6–9].

Обычно в приложениях доступна лишь частичная информация о распределениях случайных (неопределенных) параметров, поскольку даже наличие большого набора статистических данных не гарантирует знания их вероятностного распределения. Знание прошлого не означает точной информации о будущих событиях, поэтому будущее всегда содержит неопределенности. Из таких соображений аппарат ПКМР вначале вводился для известных вероятностных распределений [1], а затем развивался на случай неточных сценарных вероятностей [2–4], когда доступны только их нижние и верхние оценки.

При моделировании возможны ситуации, когда неизвестны сценарные значения случайных параметров — определены только их оценки. К тому же это может дополняться неточными сценарными вероятностями.

В данной работе аппарат ПКМР развивается на случай неточных сценарных оценок случайных (неопределенных) величин. Это позволяет модифицировать ряд результатов, полученных с его применением для задач оптимизации, на более широкий класс неопределенностей.

1. КОНСТРУКЦИИ И ПРИМЕРЫ ПКМР

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P_0) задана случайная величина (с.в.) $X : \Omega \to R$. В [6] для оценки риска с.в. X финансового потока введено понятие когерентной меры риска (КМР), которая представляется в виде

$$\rho(X) = \sup\{E_P[-X]:\ P \in Q\}, \tag{1}$$

где $E_P[.]$ — математическое ожидание по вероятностной мере P, а Q — некоторое выпуклое замкнутое множество вероятностных мер. Такая мера интерпретирует потенциальные потери случайного потока X, описываемые величиной $(-X)$.

Если с.в. X характеризует затраты, убытки, стоимости и другие величины, упорядочиваемые по предпочтению «чем меньше, тем лучше», то в КМР используется подобное представление, но без изменения знака при с.в.:

$$\rho(X) = \sup\{E_P[X]: P \in Q\}. \tag{2}$$

Конструкция (2) применяется в задачах оптимизации, в которых в качестве критериев и ограничений используются функции минимумов, поскольку это означает именно такой порядок предпочтений. Если предпочтение заменяется противоположным, то в качестве меры риска целесообразно использовать представление (1).

Конечную дискретно распределенную (д.р.) с.в. X можно представить конечным набором сценарных значений $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с соответствующими вероятностями $p_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$. В [1] введено понятие полиэдральной КМР (ПКМР), в котором к описанию (1) (или (2)) для д.р.с.в. дополнительно постулировалась многогранность (полиэдральность) множества Q, т.е. его представление в виде

$$Q = \{p: Bp \le c,\ p \ge 0\}, \tag{3}$$

где B и c — матрица и вектор соответствующих размерностей.

Следуя [3], разделим описание множества Q из (3) на стандартную и содержательную части. Представим матрицу B и вектор c как

$$B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где B_0 и c_0, описывающие неравенства (3), являются стандартными:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix}, \quad c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а B_1 и c_1 описывают содержательную часть в соотношении (4), которая, собственно, и определяет меру риска в форме (2)–(5).

Наличие стандартной части в виде B_0 и c_0 связано с описанием в (3) стандартного условия для сценарных вероятностей $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, представленного в (5) двумя неравенствами: $\sum_{i=1}^n p_i \le 1$ и $-\sum_{i=1}^n p_i \le -1$.

Приведем примеры ПКМР.

Пример 1. Средние потери. Тогда $E_{P_0}[X]: Q = \{p_0\}$.

Пример 2. Максимальные потери (наихудший случай). Тогда Q — множество всех возможных вероятностных мер, поэтому в его описании отсутствует содержательная часть в виде B_1 и c_1.

Пример 3. Среднее на хвосте распределения, или conditional value-at-risk (CVaR) [7]. Для $CVaR_\alpha(X)$ матрица B_1 и вектор c_1 имеют вид

$$B_1 = I,\ c_1 = \frac{1}{1-\alpha} p_0,$$

в котором I — единичная матрица, p_0 — вектор сценарных вероятностей.

Пример 4. Спектральная когерентная мера риска (SCRM) [8]. Для SCRM матрица B_1 и вектор c_1 описываются как

$$B_1 = I,\ c_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_0,$$

где λ_i и α_i для сценариев $i=1,\dots,n$ и спектра $\varphi(.)$ определяются из набора соответствующих соотношений [3].

Пример 5. Представление Кусуоки инвариантных по распределению КМР (KRRM) [9]. Для KRRM матрица B_1 и вектор c_1 имеют вид

$$B_1 = I, \quad c_1 = \left(\max_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_0.$$

Нетрудно видеть, что в описаниях мер из примеров 1 и 3–5 имеется вектор сценарных вероятностей p_0 , т.е. множество Q, определяющее меру риска в (2), зависит от исходной вероятностной меры.

Рассмотрим случай неточных сценарных вероятностей, когда моделируются сценарии будущих событий с распределением по ним значений с.в., но их вероятности p_0 не определяются, а лишь оцениваются снизу и сверху. Для таких ситуаций аппарат ПКМР использует так называемые робастные конструкции мер риска.

Отмеченная зависимость множества Q от p_0 в конструкции (2) позволяет интерпретировать его как некоторое многозначное отображение (м.о.) $Q(.)$, определяющее меру риска. Это позволяет строить ПКМР в случае отсутствия точной информации о векторе сценарных вероятностей p_0.

Если известно, что p_0 принадлежит некоторому множеству, т.е. $p_0 \in U_P$, то можно построить меру риска, учитывающую увеличение риска (потенциальных потерь) за счет неопределенности, обусловленной множеством U_P. Для этого по исходной мере риска ρ_0 вида (2) и множеству U_P строится ее робастная конструкция [2]

$$\rho_{\rho_0,U_P}(X) = \sup\{E_P[X] : P \in Q(U_P)\}, \tag{6}$$

где $Q(U_P) = \overline{\text{co}}\left(\bigcup_{p_0 \in U_P} Q(p_0) \right)$, $Q(.)$ — м.о. исходной меры $\rho_0(.)$, $\overline{\text{co}}$ — выпуклая замкнутая оболочка.

Вообще говоря, построение ρ_{ρ_0,U_P} в виде (6) по исходной мере ρ_0 в форме (2) не является тривиальной задачей [2]. Но она значительно упрощается при неточных сценарных вероятностях, когда p_0 оценивается снизу и сверху некоторыми векторами p_l и p_u. Тогда множество U_P имеет вид

$$U_P = \left\{ p : p \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_l \leq p \leq p_u \right\}.$$

В этом случае робастными конструкциями для мер из примеров 1–5 являются ПКМР, описываемые в форме (2)–(5) со следующими атрибутами [3].

Пример 1'. Для средних потерь:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -I \\ I \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} -p_l \\ p_u \end{pmatrix}.$$

Пример 2'. Для максимальных потерь B_1 и c_1 отсутствуют.

Пример 3'. Для $CVaR_\alpha$: $B_1 = I,\ c_1 = \dfrac{p_u}{1-\alpha}$.

Пример 4'. Для SCRM: $B_1 = I,\ c_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{1-\alpha_i}\right) p_u$, где λ_i и α_i определяются из набора соответствующих соотношений [3].

Пример 5'. Для KRRM: $B_1 = I,\ c_1 = \left(\max\limits_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{1-\alpha_i}\right) p_u$.

2. СЛУЧАЙ НЕТОЧНЫХ СЦЕНАРНЫХ ОЦЕНОК

Допустим, известны не сценарные значения с.в., а только их нижние и верхние оценки. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P_0) с.в. X описывается своими измеримыми (случайными) нижними X_l и верхними X_u оценками как $X \in U_X$, где

$$U_X(\omega) = \{X(\omega): X_l(\omega) \le X(\omega) \le X_u(\omega)\},\ \omega \in \Omega \text{ п.в.}$$

Назовем такую ситуацию случаем неточных сценарных оценок с.в. Покажем, что в ней можно использовать аппарат ПКМР, который следует применять для оценок X_u и X_l с.в. X.

Введем соответственно нижний, верхний и взвешенный варианты ПКМР. В случае, когда в качестве ПКМР используется конструкция (2), обозначим нижнюю, верхнюю и взвешенную ПКМР с.в. X следующим образом:

$$\rho^l(X) = \sup_{P \in Q} \inf_{Y \in U_X} E_P[Y] = \sup_{P \in Q} \{E_P[X_l]\} = \rho(X_l),$$

$$\rho^u(X) = \sup_{P \in Q} \sup_{Y \in U_X} E_P[Y] = \sup_{P \in Q} \{E_P[X_u]\} = \rho(X_u),$$

$$\rho^\lambda(X) = \sup_{p \in Q} \{\lambda \inf_{Y \in U_x} E_P[Y] + (1-\lambda) \sup_{Y \in U_x} E_P[Y]\} = \sup_{p \in Q} \{E_P[\lambda X_l + (1-\lambda) X_u]\}.$$

Вводя обозначение $X_\lambda = \lambda X_l + (1-\lambda) X_u$, имеем

$$\rho^\lambda(X) = \sup_{p \in Q} \{E_P[X_\lambda]\} = \rho(X_\lambda).$$

Для конструкции (1), учитывая смену знака при X, соответствующие варианты ПКМР описываем как

$$\rho^l(X) = \sup_{p \in Q} \{E_P[-X_u]\},\ \rho^u(X) = \sup_{p \in Q} \{E_P[-X_l]\},$$

$$\rho^\lambda(X) = \sup_{p \in Q} \{E_P[-X_{(1-\lambda)})]\}.$$

Следовательно, в случае неточных сценарных оценок получим несколько вариантов меры риска (нижнюю, верхнюю и взвешенную), которые можно использовать для оценки риска в зависимости от контекста задачи.

Замечание 1. Пусть с.в. X оценивается некоторыми множествами (не обязательно интервалами), т.е. $X(\omega) \in U_X(\omega), \omega \in \Omega$ п.в., где $U_X: \Omega \to 2^R$ — некоторое измеримое м.о. $U_X(\omega)$. В таком случае величины $\rho^l(.), \rho^u(.)$ определяются аналогично предыдущему:

$$\rho^{l}(X)=\sup_{P\in Q}\inf_{Y\in U_X} E_P[Y],\ \rho^{u}(X)=\sup_{P\in Q}\sup_{Y\in U_X} E_P[Y],$$

$$\rho^{\lambda}(X)=\sup_{p\in Q}\{\lambda\inf_{Y\in U_x} E_P[Y]+(1-\lambda)\sup_{Y\in U_x} E_P[Y]\},$$

однако при этом усложняется поиск внутренних экстремумов.

Рассмотрим случай комбинации неточных сценарных оценок с.в. и неточных вероятностей. Тогда с помощью соотношения (6) можно представить робастные конструкции $\rho^{l}(.)$, $\rho^{u}(.)$, $\rho^{\lambda}(.)$ в следующем виде:

$$\rho^{j}_{\rho_0,U_P}(X)=\sup\{E_P[X_j]: P\in Q(U_P)\},\ j=l,u,\lambda .$$

Если доступна информация только о множестве разброса значений с.в. X, т.е. $X(\omega)\in U$, где $U=\bigcup_{\omega\in\Omega\ \text{п.в.}} U_X(\omega)$, оценки меры риска $\rho^{l}(.)$ и $\rho^{u}(.)$ сводятся соответственно к случаям наименьшего и наибольшего риска независимо от м.о. Q.

Нетрудно видеть, что в ситуации неточных сценарных оценок с.в. возникает нестрогий частичный (рефлексивный, антисимметричный и транзитивный) порядок «$\geq$», связанный с их исходным предпочтением. Например, для предпочтения «чем меньше, тем лучше» он определяется как

$$X\geq Y \Leftrightarrow X_l(\omega)\leq Y_l(\omega)\,\&\, X_u(\omega)\leq Y_u(\omega)\ \text{п. в.}$$

В случае обратного исходного предпочтения неравенства для оценок значений с.в. заменяются противоположными.

Частичный порядок «$\geq_{\rho}$», определяемый с помощью ПКМР $\rho(.)$ в виде

$$X\geq_{\rho} Y \Leftrightarrow \rho(X_l)\leq\rho(Y_l)\,\&\,\rho(X_u)\leq\rho(Y_u),$$

за счет соответствующей смены знака при с.в. учитывает оба варианта исходных предпочтений и оказывается слабее предыдущего порядка в следующем смысле: $X\geq Y \Rightarrow X\geq_{\rho} Y$. Очевидно, что обратная импликация, вообще говоря, неверна.

Если применяем для оценивания риска с.в. X величины $\rho^{l}(.)$ и $\rho^{u}(.)$, то фактически используем порядок «$\geq_{\rho}$».

3. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПКМР

Как известно из [10], широкий класс задач стохастического программирования (СП) и робастной оптимизации (РО) можно с применением ПКМР свести к оптимизационной задаче

$$\rho_0(f_0(x,\cdot))\to\min_x,$$
$$\rho_i(f_i(x,\cdot))\leq 0_i,\ i=1,\dots,m,\ x\in M, \tag{7}$$

где $\rho_i(.)$, $i=0,1,\dots,m,$ — ПКМР вида (2)–(5), которые строятся по с.в. $f_i(x,\omega)$, $i=0,1,\dots,m.$ При этом переход от одной постановки задачи к другой достигается в (7) использованием соответствующей ПКМР. Технически это реализуется выбором в (4) необходимых матрицы B_1 и вектора c_1.

В случае неточных вероятностей для оценивания риска можно воспользоваться робастными вариантами мер из примеров 1'–5'. Тогда меры $\rho_i(.)$, $i=0,1,\dots,m,$ в (7) понимаются в этом смысле.

Задача (7) представляет собой некоторую минимаксную постановку, в которой внутренний максимум порождается конструкцией меры риска. Поиск ее решений значительно упрощается, когда эти функции линейны по x [10].

В случае неточных сценарных оценок с.в. можно применить конструкции описанных ранее вариантов ПКМР: $\rho^l(X)$, $\rho^u(X)$, $\rho^\lambda(X)$. Если используется порядок «$\geq_\rho$» из разд. 2, то применим $\rho^l(X)$ и $\rho^u(X)$. Тогда аналог (7) имеет вид двухкритериальной задачи

$$\begin{pmatrix} \rho_0^u(f_0(x,\cdot)) \\ \rho_0^l(f_0(x,\cdot)) \end{pmatrix} \to \min,$$

$$\rho_i^u(f_i(x,\cdot)) \leq \delta_i^u, \quad i=1,\ldots,m,$$

$$\rho_i^l(f_i(x,\cdot)) \leq \delta_i^l, \quad i=1,\ldots,m, \quad x \in M,$$

решение которой нужно выбирать на множестве ее парето-оптимальных вариантов. Отметим очевидность условий $0 \leq \delta_i^l \leq \delta_i^u$, $i=1,\ldots,m$.

Одним из простых приемов для многокритериальных постановок является сворачивание критериев в скаляр с помощью весовых коэффициентов, т.е. решение следующей задачи:

$$\mu\rho_0^u(f_0(x,\cdot)) + (1-\mu)\rho_0^l(f_0(x,\cdot)) \to \min,$$

$$\rho_i^u(f_i(x,\cdot)) \leq \delta_i^u, \quad i=1,\ldots,m,$$

$$\rho_i^l(f_i(x,\cdot)) \leq \delta_i^l, \quad i=1,\ldots,m, \quad x \in M.$$

Изменяя соотношение весовых коэффициентов подбором параметра $\mu \in [0,1]$, получаем то или иное парето-оптимальное решение.

Можно также оптимизировать один из критериев при ограничениях на второй:

$$\begin{gathered} \rho_0^u(f_0(x,\cdot)) \to \min, \\ \rho_i^u(f_i(x,\cdot)) \leq \delta_i^u, \quad i=1,\ldots,m, \\ \rho_i^l(f_i(x,\cdot)) \leq \delta_i^l, \quad i=0,\ldots,m, \quad x \in M, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \rho_0^l(f_0(x,\cdot)) \to \min, \\ \rho_i^u(f_i(x,\cdot)) \leq \delta_i^u, \quad i=0,\ldots,m, \\ \rho_i^l(f_i(x,\cdot)) \leq \delta_i^l, \quad i=1,\ldots,m, \quad x \in M. \end{gathered} \tag{9}$$

В случае линейных по x функций $f_i(x,\omega)$, $i=0,\ldots,m$, эти проблемы можно свести к некоторым задачам линейного программирования (ЛП), как это было сделано в [10] для задачи (7).

Действительно, пусть $f_i(x,\omega) = \langle l_i(\omega), x \rangle - a_i(\omega)$, $i=0,\ldots,m$, где с.в. $l_i(\omega)$ и $a_i(\omega)$, $i=0,\ldots,m$, распределенные по n сценариям $(\omega_1,\ldots,\omega_n)$, оцениваются сверху и снизу величинами $l_i^u(\omega)$, $a_i^u(\omega)$ и $l_i^l(\omega)$, $a_i^l(\omega)$ соответственно.

Обозначим

$$L_i^u = \begin{pmatrix} l_{i1}^u(\omega_1) & \cdots & l_{ik}^u(\omega_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{i1}^u(\omega_n) & \cdots & l_{ik}^u(\omega_n) \end{pmatrix}, \quad a_i^u = \begin{pmatrix} a_i^u(\omega_1) \\ \cdots \\ a_i^u(\omega_n) \end{pmatrix}, \quad i = 0, \ldots, m,$$

$$L_i^l = \begin{pmatrix} l_{i1}^l(\omega_1) & \cdots & l_{ik}^l(\omega_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{i1}^l(\omega_n) & \cdots & l_{ik}^l(\omega_n) \end{pmatrix}, \quad a_i^l = \begin{pmatrix} a_i^l(\omega_1) \\ \cdots \\ a_i^l(\omega_n) \end{pmatrix}, \quad i = 0, \ldots, m.$$

С учетом конструкции ПКМР задачи (8) и (9) описываем соответственно как

$$\begin{gathered} \max_p \{< L_0^u x - a_0^u, p >: p \in Q_0\} \to \min_x, \\ \max_p \{< L_i^u x - a_i^u, p >: p \in Q_i\} \le \delta_i^u, \ i = 1, \ldots, m, \\ \max_p \{< L_i^l x - a_i^l, p >: p \in Q_i\} \le \delta_i^l, \ i = 0, \ldots, m, \ x \in M \subseteq R^k, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \max_p \{< L_0^l x - a_0^l, p >: p \in Q_0\} \to \min_x, \\ \max_p \{< L_i^l x - a_i^l, p >: p \in Q_i\} \le \delta_i^l, \ i = 1, \ldots, m, \\ \max_p \{< L_i^u x - a_i^u, p >: p \in Q_i\} \le \delta_i^u, \ i = 0, \ldots, m, \ x \in M \subseteq R^k, \end{gathered} \tag{11}$$

где $\delta_i^u \ge \delta_i^l \ge 0$, $i = 0, \ldots, m$, — некоторые фиксированные величины.

Пусть, как и ранее, каждое полиэдральное множество Q_i, $i = 0, \ldots, m$, в конструкции меры $\rho_i(.)$ представлено в форме (3) соответственно матрицей B_i и вектором c_i:

$$Q_i = \{p : B_i p \le c_i, \ p \ge 0\}, \ i = 0, \ldots, m.$$

Теорема 1. Если задачи (10) и (11) совместны, их оптимальными решениями являются соответственно компоненты x решений $(v_0^l, \ldots, v_m^l, v_0^u, \ldots, v_m^u, x)$ следующих задач ЛП:

$$\begin{gathered} \min_{(v_0^l, \ldots, v_m^l, v_0^u, \ldots, v_m^u, x)} \quad < c_0, v_0^u >, \\ -B_0^{\mathrm{T}} v_0^u + L_0^u x \le a_0^u, \\ < c_i, v_i^u > \le \delta_i^u, \ i = 1, \ldots, m, \\ -B_i^{\mathrm{T}} v_i^u + L_i^u x \le a_i^u, \ i = 1, \ldots, m, \\ < c_i, v_i^l > \le \delta_i^l, \ i = 0, \ldots, m, \\ -B_i^{\mathrm{T}} v_i^l + L_i^l x \le a_i^l, \ i = 0, \ldots, m, \\ x \in M, v_i^l \ge 0, \ v_i^u \ge 0, \ i = 0, \ldots, m, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \min_{(v_0^l, \ldots, v_m^l, v_0^u, \ldots, v_m^u, x)} \quad < c_0, v_0^l >, \\ -B_0^{\mathrm{T}} v_0^l + L_0^l x \le a_0^l, \\ < c_i, v_i^l > \le \delta_i^l, \ i = 1, \ldots, m, \\ -B_i^{\mathrm{T}} v_i^l + L_i^u x \le a_i^l, \ i = 1, \ldots, m, \\ < c_i, v_i^u > \le \delta_i^u, \ i = 0, \ldots, m, \\ -B_i^{\mathrm{T}} v_i^u + L_i^u x \le a_i^u, \ i = 0, \ldots, m, \\ x \in M, v_i^l \ge 0, \ v_i^u \ge 0, \ i = 0, \ldots, m, \end{gathered}$$

а значения по функциям в решениях задач совпадают.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [10]. Подставляя в полученные задачи ЛП различные варианты содержательных частей матриц и векторов, представляющих ПКМР, можно технологично решать задачи вида (10), (11) для всего класса ПКМР.

Рассмотрим в качестве приложения задачу оптимизации портфеля по соотношению доходность–риск. Отметим, что по содержательным соображениям для построения ПКМР используется конструкция (1), (3)–(5).

Пусть имеется k финансовых инструментов, называемых компонентами портфеля, распределение доходности которых описывается матрицей H размера $n \times k$, где j-й столбец описывает распределение j-й компоненты. Вектор $u = (u_1, \ldots, u_k)$, описывающий структуру портфеля при $\sum_1^k u_i = 1$, $u_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$, рассматривается как переменная. Необходимо найти структуру портфеля u, оптимизирующую его совокупный результат по соотношению доходность–риск.

При известных распределениях, кроме матрицы распределений прибыльности компонент по сценариям H, известен также вектор сценарных вероятностей p_0. В таких условиях имеем две связанные постановки задач: минимизацию ПКМР портфеля при гарантированной средней прибыльности и максимизацию средней доходности портфеля при ограничениях на ПКМР.

Обозначим допустимое значение ожидаемой доходности портфеля $E_{P_0}[Hu]$ как μ_0, выбранную ПКМР — $\rho(Hu)$, допустимое значение ПКМР портфеля — ρ_0. Тогда такие задачи формулируются соответственно в виде

$$\begin{array}{ll} \min & \rho(Hu), \\ \sum_1^n u_i = 1,\ u_i \geq 0, & \\ E_{p_0}[Hu] \geq \mu_0, & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & E_{p_0}[Hu], \\ \sum_1^n u_i = 1,\ u_i \geq 0, & \\ \rho(Hu) \leq \rho_0. & \end{array} \tag{12}$$

В случае неточных сценарных вероятностей в [3] по исходной мере $\rho(.)$ и множеству неопределенности U_P в соответствии с (6) строились робастные варианты мер риска $\rho_{\rho, U_P}(.)$, а в качестве робастного аналога ожидаемой доходности использовалась функция вознаграждения

$$r(X) = \min\{E_P[X] : P \in U_P\},$$

где U_P в случае неточных вероятностей представляется в форме простого полиэдрального множества, описанного ранее. Тогда имеем

$$r(X) = \min\{E_P[X] : P \in Q\},$$

где Q описывается в форме (3) со следующими атрибутами:

$$B = \begin{pmatrix} -I \\ I \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} -p_l \\ p_u \end{pmatrix}.$$

Робастные варианты задач минимизации ПКМР портфеля при его гарантированной функции вознаграждения r_0 и максимизации функции вознаграждения портфеля при ограничениях на ПКМР уровнем ρ_0 имеют вид

$$\begin{array}{ll} \min & \rho_{\rho, U_p}(Hu), \\ \sum_1^n u_i = 1,\ u_i \geq 0, & \\ r[Hu] \geq r_0, & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & r[Hu], \\ \sum_1^n u_i = 1,\ u_i \geq 0, & \\ \rho_{\rho, U_p}(Hu) \leq \rho_0. & \end{array} \tag{13}$$

Рассмотрим задачу оптимизации портфеля при неточных сценарных оценках. Матрица H распределений доходности компонент финансовых инструментов по сценариям неизвестна, а определены только ее верхние и нижние оценки, представленные соответственно матрицами H^l и H^u, т.е. $H=\{r_{ij}\}_{i=1,\, j=1}^{n,k}$ поэлементно оценивается матрицами $H^l=\{r_{ij}^l\}_{i=1,\, j=1}^{n,k}$ и $H^u=\{r_{ij}^u\}_{i=1,\, j=1}^{n,k}$, где

$$r_{ij}^l \le r_{ij} \le r_{ij}^u,\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,k.$$

Тогда аналогами проблем (12) с использованием нижних и верхних оценок ПКМР и средней доходности являются следующие задачи:

$$\begin{array}{ll} \min \quad \rho(H^u u), & \min \quad \rho(H^l u), \\ \sum_1^n u_i=1,\ u_i\ge 0, & \sum_1^n u_i=1,\ u_i\ge 0, \\ \rho(H^l u)\le \rho_0^l, & \rho(H^u u)\le \rho_0^u, \\ E_{p_0}[H^u u]\ge \mu_0^u, & E_{p_0}[H^u u]\ge \mu_0^u, \\ E_{p_0}[H^l u]\ge \mu_0^l, & E_{p_0}[H^l u]\ge \mu_0^l, \end{array} \qquad (14)$$

$$\begin{array}{ll} \max \quad E_{p_0}[H^u u], & \max \quad E_{p_0}[H^l u], \\ \sum_1^n u_i=1,\ u_i\ge 0, & \sum_1^n u_i=1,\ u_i\ge 0, \\ E_{p_0}[H^l u]\ge \mu_0^l, & E_{p_0}[H^u u]\ge \mu_0^u, \\ \rho(H^l u)\le \rho_0^l, & \rho(H^l u)\le \rho_0^l, \\ \rho(H^u u)\le \rho_0^u, & \rho(H^u u)\le \rho_0^u, \end{array} \qquad (15)$$

в которых $\mu_0^j, \rho_0^j,\ j=l,u$, соответственно ограничения снизу на среднюю доходность и ограничения сверху на меру риска.

Если случай неточных сценарных оценок дополняется неточными вероятностями, то в качестве меры риска используем робастную конструкцию $\rho_{\rho,U_P}(.)$, а в качестве средней доходности — функцию вознаграждения $r(.)$. Тогда аналогами проблем (13) с применением верхних и нижних оценок ПКМР и функции вознаграждения $r(.)$ являются следующие задачи:

$$\begin{array}{ll} \min \quad \rho_{\rho,U_p}(H^u u), & \min \quad \rho_{\rho,U_p}(H^l u), \\ \sum_1^n u_i=1,\ u_i\ge 0, & \sum_1^n u_i=1,\ u_i\ge 0, \\ \rho_{\rho,U_p}(H^l u)\le \rho_0^l, & \rho_{\rho,U_p}(H^u u)\le \rho_0^u, \\ r(H^u u)\ge r_0^u, & r(H^u u)\ge r_0^u, \\ r(H^l u)\ge r_0^l, & r(H^l u)\ge r_0^l, \end{array} \qquad (16)$$

$$\begin{array}{ll} \max \quad r(H^u u), & \max \quad r(H^l u), \\ \sum_1^n u_i=1,\ u_i\ge 0, & \sum_1^n u_i=1,\ u_i\ge 0, \\ r(H^l u)\ge r_0^l, & r(H^u u)\ge r_0^u, \\ \rho_{\rho,U_P}(H^l u)\le \rho_0^l, & \rho_{\rho,U_P}(H^l u)\le \rho_0^l, \\ \rho_{\rho,U_P}(H^u u)\le \rho_0^u, & \rho_{\rho,U_P}(H^u u)\le \rho_0^u, \end{array} \qquad (17)$$

в которых $r_0^j, \rho_0^j,\ j=l,u$, соответственно ограничения снизу на функцию вознаграждения и ограничения сверху на меру риска.

Уточним обозначения для матриц B и векторов c из описания полиэдральных множеств в виде (3): B_r и c_r — для функций вознаграждения $r(.)$; B_ρ и c_ρ — для робастных вариантов мер риска $\rho_{\rho,U_P}(.)$.

Теорема 2. Если проблемы (16), (17) совместны, их оптимальными портфелями являются соответственно компоненты u решений (v^l, v^u, w^l, w^u, u) следующих задач ЛП:

$$
\begin{array}{ll}
\min_{(v^l,v^u,w^l,w^u,u)} \; <c_\rho, v^l>, & \min_{(v^l,v^u,w^l,w^u,u)} \; <c_\rho, v^u>, \\
-B_\rho^{\mathrm{T}} v^l - H^l u \le 0, & -B_\rho^{\mathrm{T}} v^u - H^u u \le 0, \\
<c_\rho, v^u> \le \rho_0^u, & <c_\rho, v^l> \le \rho_0^l, \\
-B_\rho^{\mathrm{T}} v^u - H^u u \le 0, & -B_\rho^{\mathrm{T}} v^l - H^l u \le 0, \\
-<c_r, w^l> \le -r_0^l, & -<c_r, w^l> \le -r_0^l, \\
-B_r^{\mathrm{T}} w^l - H^l u \le 0, & -B_r^{\mathrm{T}} w^l - H^l u \le 0, \\
-<c_r, w^u> \le -r_0^u, & -<c_r, w^u> \le -r_0^u, \\
-B_r^{\mathrm{T}} w^u - H^u u \le 0, & -B_r^{\mathrm{T}} w^u - H^u u \le 0, \\
\sum_1^n u_i = 1, \; u \ge 0, & \sum_1^n u_i = 1, \; u \ge 0, \\
v^l \ge 0, v^u \ge 0, w^l \ge 0, w^u \ge 0, & v^l \ge 0, v^u \ge 0, w^l \ge 0, w^u \ge 0,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max_{(v^l,v^u,w^l,w^u,u)} \; <-c_r, w^l>, & \max_{(v^l,v^u,w^l,w^u,u)} \; <-c_r, w^u>, \\
-B_r^{\mathrm{T}} w^l - H^l u \le 0, & -B_r^{\mathrm{T}} w^u - H^u u \le 0, \\
<c_\rho, v^l> \le \rho_0^l, & <c_\rho, v^l> \le \rho_0^l, \\
-B_\rho^{\mathrm{T}} v^l - H^l u \le 0, & -B_\rho^{\mathrm{T}} v^l - H^l u \le 0, \\
<c_\rho, v^u> \le \rho_0^u, & <c_\rho, v^u> \le \rho_0^u, \\
-B_\rho^{\mathrm{T}} v^u - H^u u \le 0, & -B_\rho^{\mathrm{T}} v^u - H^u u \le 0, \\
-<c_r, w^u> \le -r_0^u, & -<c_r, w^l> \le -r_0^l, \\
-B_r^{\mathrm{T}} w^u - H^u u \le 0, & -B_r^{\mathrm{T}} w^l - H^l u \le 0, \\
\sum_1^n u_i = 1, \; u \ge 0, & \sum_1^n u_i = 1, \; u \ge 0, \\
v^l \ge 0, v^u \ge 0, w^l \ge 0, w^u \ge 0, & v^l \ge 0, v^u \ge 0, w^l \ge 0, w^u \ge 0.
\end{array}
$$

Утверждение можно получить применением теоремы 1, а также с помощью доказательства, аналогичного доказательству теоремы 3 из [3].

Нетрудно видеть, что задачи (14), (15) — частные случаи задач (16), (17), поэтому их сведение к задачам ЛП можно представить как следствие теоремы 2.

Следствие 1. Если задачи (14), (15) совместны, их оптимальными портфелями являются соответственно компоненты решений (v^l, v^u, u) следующих задач ЛП:

$$
\begin{array}{ll}
\min_{(v^l,v^u,u)} \; <c, v^l>, & \min_{(v^l,v^u,u)} \; <c, v^u>, \\
-B^{\mathrm{T}} v^l - H^l u \le 0, & -B^{\mathrm{T}} v^u - H^u u \le 0, \\
<c, v^u> \le \rho_0^u, & <c, v^l> \le \rho_0^l, \\
-B^{\mathrm{T}} v^u - H^u u \le 0, & -B^{\mathrm{T}} v^l - H^l u \le 0, \\
-p_0^{\mathrm{T}} H^u u \le -\mu_0^u, & -p_0^{\mathrm{T}} H^u u \le -\mu_0^u, \\
-p_0^{\mathrm{T}} H^l u \le -\mu_0^l, & -p_0^{\mathrm{T}} H^l u \le -\mu_0^l. \\
\sum_1^n u_i = 1, \; u \ge 0, & \sum_1^n u_i = 1, \; u \ge 0, \\
v^l \ge 0, \; v^u \ge 0, & v^l \ge 0, \; v^u \ge 0,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max_{(v^l, v^u, u)} \; < (H^u)^{\mathrm{T}} p_0, u >, & \max_{(v^l, v^u, u)} \; < (H^l)^{\mathrm{T}} p_0, u >, \\
-B^{\mathrm{T}} v^u - H^l u \le 0, & -B^{\mathrm{T}} v^l - H^l u \le 0, \\
< c, v^l > \le \rho_0^l, & < c, v^l > \le \rho_0^l, \\
-B^{\mathrm{T}} v^l - H^l u \le 0, & -B^{\mathrm{T}} v^l - H^l u \le 0, \\
< c, v^u > \le \rho_0^u, & < c, v^u > \le \rho_0^u, \\
-p_0^{\mathrm{T}} H^l u \le -\mu_0^l, & -p_0^{\mathrm{T}} H^u u \le -\mu_0^u, \\
\sum_1^n u_i = 1, \; u \ge 0, & \sum_1^n u_i = 1, \; u \ge 0, \\
v^l \ge 0, \; v^u \ge 0, & v^l \ge 0, \; v^u \ge 0.
\end{array}
$$

Отметим, что при известном векторе p_0 размерность полученных задач ЛП существенно (на $4n$, где n — количество сценариев) ниже, чем при неточных сценарных вероятностях.

Замечание 2. Иногда в задачах оптимизации портфеля целесообразно использовать не одну, а несколько мер риска. В этом случае несложно модифицировать формулировки как исходных постановок задач, так и соответствующих им задач ЛП.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описано использование аппарата ПКМР при неточных сценарных оценках с.в., что позволяет расширить условия неопределенности для его применимости. Такими условиями, помимо случаев известных вероятностных распределений и неточных сценарных вероятностей, являются случаи неточных сценарных оценок, а также комбинации неточных сценарных оценок и неточных вероятностей.

Рассмотрены проблемы оптимизации с использованием ПКМР, охватывающие широкий класс задач СП и РО. Показано, как в линейном случае они сводятся к соответствующим задачам ЛП, что позволяет эффективно их решать. В качестве приложения рассмотрены проблемы оптимизации портфелей по соотношению вознаграждение–риск.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирилюк В.С. О классе полиэдральных когерентных мер риска. *Кибернетика и системный анализ*. 2004. № 4. С. 155–167.
2. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимизация инвестиционного портфеля. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 2. С. 120–133.
3. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимальные портфели по соотношению вознаграждение–риск. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 5. С. 85–103.
4. Кирилюк В.С. Теория ожидаемой полезности, оптимальные портфели и полиэдральные когерентные меры риска. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 6. С. 63–72.
5. Knight F.H. Risk, uncertainty and profit. Boston: Houghton Miffin, 1921. 381 p.
6. Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*. 1999. Vol. 9, N 3. P. 203–228.
7. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*. 2000. Vol. 2, N 3. P. 21–41.
8. Acerbi C. Spectral measures of risk: a coherent representation of subjective risk aversion. *J. Banking & Finance*. 2002. Vol. 26, N 7. P. 1505–1518.

9. Kusuoka S. On law invariant coherent risk measures. Kusuoka S., Maruyama T. (Eds.). *Advances in Mathematical Economics*. Tokyo: Springer, 2001. Vol. 3. P. 83–95.

10. Кирилюк В.С. Меры риска в задачах стохастической и робастной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 6. С. 46–59.

Надійшла до редакції 09.06.2017

В.С. Кирилюк

ПОЛІЕДРАЛЬНІ КОГЕРЕНТНІ МІРИ РИЗИКУ З НЕТОЧНИМИ СЦЕНАРНИМИ ОЦІНКАМИ

Анотація. Застосування поліедральних когерентних мір ризику розповсюджено на випадок неточних сценарних оцінювань випадкових величин. Розглянуто проблеми оптимізації з невизначеностю, що охоплюють широкий клас задач стохастичного програмування та робастної оптимізації. Показано, як в лінійному випадку вони зводяться до задач лінійного програмування. Розглянуто задачі оптимізації портфеля за співвідношенням винагорода–ризик.

Ключові слова: поліедральна когерентна міра ризику, conditional value-at-risk, спектральна когерентна міра ризику, неточні оцінки, лінійне програмування, оптимізація портфеля, співвідношення винагорода–ризик.

V.S. Kirilyuk

POLYHEDRAL COHERENT RISK MEASURES IN THE CASE OF IMPRECISE SCENARIO ESTIMATES

Abstract. Polyhedral coherent risk measures are extended to the case of imprecise scenario estimates of random variables. Optimization problems under uncertainty are considered that cover a wide class of stochastic programming and robust optimization problems. It is shown how they are reduced to linear programming problems in the linear case. Problems of portfolio optimization by the reward-to-risk ratio are considered.

Keywords: polyhedral coherent risk measure, conditional value-at-risk, spectral coherent risk measure, imprecise estimate, linear programming, portfolio optimization, reward-to-risk ratio.

Кирилюк Владимир Семенович,
доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: vlad00@ukr.net.