УДК 519.176

В.А. ПЕРЕПЕЛИЦА, Э.В. ТЕРЕЩЕНКО

О ПОЛНЫХ И КВАЗИПОЛНЫХ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ НА ГРАФАХ

Аннотация. Изучаются достаточные условия наличия свойства полноты или квазиполноты в двухкритериальных задачах дискретной оптимизации с одинаковыми и различными критериями весового вида. Вычислена оценка мощностей множеств допустимых решений, паретовского множества и полного множества альтернатив для ряда задач с двумя критериями.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, паретовское множество, полное множество альтернатив, полная задача, квазиполная задача.

В различных областях деятельности человека принимаемое решение приходится оценивать многими критериями качества, вследствие чего возникает необходимость в рассмотрении множества альтернатив. Это в общем случае приводит к ситуации, когда для каждого решения существуют альтернативы, т.е. другие решения, каждое из которых лучше рассматриваемого хотя бы по одному критерию [1–3].

Отличие многокритериальной задачи от однокритериальной состоит в том, что в первом случае получаем не одно решение, а множество решений (множество альтернатив) [2, 4]. Окончательный выбор наиболее целесообразного решения делает человек. Вопрос о принятии решений выходит за рамки формального определения понятия «оптимум», «оптимальное решение» в связи с тем, что это понятие может относиться к не менее чем двум различным элементам (в общем случае). Отсюда возникает математическая неоднозначность проблемы определения «оптимального решения» в случае числа критериев не меньше двух.

Символом Z_γ, $\gamma = \overline{1,7}$, обозначим сформулированную на n-вершинном графе $G=(V,E)$ однокритериальную задачу определения соответствующего минимума суммы весов ребер. Рассмотрим следующие задачи: Z_1 — о совершенных паросочетаниях, Z_2 — об остовных деревьях, Z_3 — о размещениях, Z_4 — о совершенных паросочетаниях на двудольном графе с равными долями, Z_5 — о гамильтоновых циклах, Z_6 — о гамильтоновых цепях, Z_7 — о назначениях. Множество всех допустимых решений (МДР) задачи Z_γ с индивидуальным критерием $F_\gamma(x)$ обозначим $X_\gamma = \{x_\gamma\}$, где x_γ — подграф (V, E_γ) графа G, $E_\gamma \subseteq E$, γ — индивидуальный номер критерия. Например, если в задаче о гамильтоновых циклах Z_5 добавить ограничение «переезд из города в город не должен превышать l единиц», то получим новую задачу Z_{γ_0}, где $\gamma_0 > 7$.

Символом Z_{γ_1,γ_2} обозначим двухкритериальную задачу на двувзвешенном n-вершинном m-реберном графе с минимизируемыми критериями $F_{\gamma_i}(x) \to \min$, $i=\overline{1,2}$, векторной целевой функции $F_{\gamma_1,\gamma_2}(x_{\gamma_1,\gamma_2})$. Индексы γ_i, $i=\overline{1,2}$, обозначают индивидуальные номера критериев, причем порядок критериев $F_{\gamma_i}(x)$ определяет очередность решения задач Z_{γ_i}. Так, в случае $Z_{1,2}$ решение начинается с рассмотрения задачи о совершенных паросочетаниях, а в случае $Z_{6,1}$ — с нахождения гамильтоновых цепей.

Множество допустимых решений задачи Z_{γ_1,γ_2} представляет собой допустимое множество пар $X_{\gamma_1,\gamma_2} = \{(x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2})\}$, где $x_{\gamma_1} \in X_{\gamma_1}$, $x_{\gamma_2} \in X_{\gamma_2}$, сформированное на основе информации о графе G и вида критериев $F_{\gamma_i}(x)$, $i=\overline{1,2}$.

Далее используем следующие обозначения: $X_{\gamma_1,\gamma_2} = \{(x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2})\}$ — МДР задачи Z_{γ_1,γ_2}, где $(x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2})$ — допустимое решение задачи Z_{γ_1,γ_2}, представляющее собой два подграфа $x_{\gamma_i} = (V, E_{\gamma_i})$, $i = \overline{1,2}$, данного графа $G = (V, E)$, $E_{\gamma_i} \subseteq E$: $|X_{\gamma_1,\gamma_2}|$ — мощность множества X_{γ_1,γ_2}; $\widetilde{X}_{\gamma_1,\gamma_2}$ — паретовское множество (ПМ) двухкритериальной задачи Z_{γ_1,γ_2}, $\widetilde{X}_{\gamma_1,\gamma_2} \subseteq X_{\gamma_1,\gamma_2}$; $X^0_{\gamma_1,\gamma_2}$ — полное множество альтернатив (ПМА), определяемое как подмножество ПМ $X^0_{\gamma_1,\gamma_2} \subseteq \widetilde{X}_{\gamma_1,\gamma_2}$ минимальной мощности $|X^0_{\gamma_1,\gamma_2}|$ и такое, что $F_{\gamma_1,\gamma_2}(X^0_{\gamma_1,\gamma_2}) = F_{\gamma_1,\gamma_2}(\widetilde{X}_{\gamma_1,\gamma_2})$ [3–5].

Рассмотрим способы перечисления МДР $X_{\gamma_1,\gamma_2} = \{x_{\gamma_1,\gamma_2}\}$, ПМ $\widetilde{X}_{\gamma_1,\gamma_2}$, ПМА $X^0_{\gamma_1,\gamma_2}$ и определения мощностей этих множеств на основании МДР X_{γ_1} и X_{γ_2} соответствующих однокритериальных задач Z_{γ_1} и Z_{γ_2} с целевыми функциями $F_{\gamma_1}(x_{\gamma_1})$, $F_{\gamma_2}(x_{\gamma_2})$. Индексы γ_1 и γ_2 условимся не использовать тогда, когда ссылаемся на известный общий случай обозначения применяемых критериев, т.е. будем писать $F, Z, X, \widetilde{X}, X^0$.

Многокритериальную задачу Z назовем полной, если для МДР $X = \{x\}$ существуют такие параметры векторной целевой функции $F(x)$, при которых выполняется равенство $X^0 = \widetilde{X} = X$.

Пусть R^S — евклидово пространство размерности $S \geq 2$. Из определения ПМ и ПМА вытекает справедливость следующего утверждения [3].

Лемма 1. Для любой задачи с векторной целевой функцией вида $F: X \to R^S$ выполняется равенство мощностей $|X^0| = |F(\widetilde{X})|$, т.е. мощность ПМА совпадает с мощностью образа ПМ $F(\widetilde{X})$ в S-критериальном пространстве.

Полное множество альтернатив является наиболее интересным математическим объектом, поскольку представляет собой обобщение классического понятия «решение оптимизационной задачи». Найти ПМА при наличии одного критерия — значит найти какой-либо оптимум. Если количество критериев не меньше двух, то для S-критериальной задачи мощность ПМ и ПМА равна или больше единицы: $|\widetilde{X}| \geq |X^0| \geq 1$. В [4, 5] дано наиболее раннее определение ПМА для дискретных многокритериальных задач. В теории многокритериальных задач проведено систематическое исследование вычислительной сложности нахождения ПМА для двухкритериальных задач [4–8]. Если векторная целевая функция задачи содержит не менее двух критериев весового вида, то получаем не только экспоненциальную трудоемкость, но и экспоненциальную память, т.е. новое (третье) свойство, которого не было в однокритериальном случае [4].

Рассматриваем класс K двухкритериальных задач на n-вершинных графах $G = (V, E)$, $|E| = m$, каждому ребру $e_t \in E$, $t = \overline{1, m}$, которого присвоена пара весов $\omega_i(e_t)$, $i = \overline{1,2}$, $t = \overline{1, m}$. Каждое допустимое решение $i = \overline{1,2}$ в отдельности состоит из одного вида компонент связности, таких как ребро, гамильтонов цикл, остовное дерево и др. Класс задач, удовлетворяющих этому условию, обозначим K^0, причем $K^0 \subset K$. В дальнейших исследованиях ограничимся двухкритериальными задачами из класса K^0.

Определим еще «специальное двувзвешивание» m-реберного графа $G = (V, E)$, или, что то же самое, двух n-вершинных m-реберных копий графа G. Эти одновзвешенные графы различаются только весами ребер. Все ребра $e \in E$ пронумеруем числами $t = \overline{1, m}$. Каждое ребро e_t имеет два веса — $\omega_1(e_t)$, $\omega_2(e_t)$, таких, что их сумма равна числу r_0, например $r_0 = 2^{m+1}$ для каждого значения $t = \overline{1, m}$.

Теорема 1. Любая двухкритериальная задача $Z_{\gamma_1,\gamma_2} \in K^0$ является полной, если ее векторная целевая функция $F_{\gamma_1,\gamma_2}(x_{\gamma_1,\gamma_2}) = (F_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}), F_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}))$, $x_{\gamma_i} = (V, E_{\gamma_i})$, состоит из весовых критериев $F_{\gamma_i}(x_{\gamma_i}) = \omega_{\gamma_i}(x_{\gamma_i}) = \sum_{e \in E_{\gamma_i}} \omega_i(e) \to \min$, $i = \overline{1,2}$, одного типа $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы 1. На МДР $X_{\gamma_1,\gamma_2} = \{(x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2})\}$ определена векторная целевая функция, состоящая из двух весовых критериев одного типа $F_{\gamma_i}(x_{\gamma_i}) = \omega_{\gamma_i}(x_{\gamma_i}) = \sum_{e \in E_{\gamma_i}} \omega_i(e) \to \min$, $i = \overline{1,2}$, которые различаются только числовыми значениями. Для тривиальных случаев ($X_{\gamma_1,\gamma_2} = \varnothing$ или $|X_{\gamma_1,\gamma_2}| = 1$) утверждение теоремы очевидно. Пусть мощность МДР $|X_{\gamma_1,\gamma_2}| \geq 2$. В графе $G = (V, E)$ ребра $e \in E$ перенумеруем числами $t = t(e) = \overline{1,m}$, $m = |E|$. Для каждого ребра $e_t \in E$ определим первый и второй вес следующим образом:

$$\omega_1(t) = 2^t, \ \omega_2(t) = r_0 - \omega_1(t), \ t = t(e) = \overline{1,m}, \ m = |E|, \ r_0 = 2^{m+1}. \tag{1}$$

С учетом того, что $Z_{\gamma_1,\gamma_2} \in K^0$ и оба критерия имеют один тип, выполняется равенство $|E_{\gamma_i}| = C_0(n) = C_0 = \text{const}$ для всех допустимых решений x_{γ_i}, $i = \overline{1,2}$, двухкритериальной задачи Z_{γ_1,γ_2}. Следовательно,

$$F_{\gamma_1}(x) + F_{\gamma_2}(x) = C_0 r_0 = 2^{m+1} C_0 \quad \forall x_{\gamma_i} \in X_{\gamma_i}, \ i = \overline{1,2}. \tag{2}$$

Обозначим разность $R^{k,l}_{\gamma_i} = E^k_{\gamma_i} \setminus E^l_{\gamma_i}$ для пары $x^k_{\gamma_i}, x^l_{\gamma_i} \in X_{\gamma_i}$, $1 \leq k < l \leq m$, $i = \overline{1,2}$. Тогда для любых $x^k_{\gamma_i}, x^l_{\gamma_i} \in X_{\gamma_i}$ имеем

$$R^{l,k}_{\gamma_i} \cap R^{k,l}_{\gamma_i} = \varnothing, \ |R^{l,k}_{\gamma_i}| = |R^{k,l}_{\gamma_i}|, \ i = \overline{1,2}. \tag{3}$$

Пусть среди элементов множества $R^{l,k}_{\gamma_i} \cup R^{k,l}_{\gamma_i}$ ребро e_t с наибольшим номером t принадлежит $R^{k,l}_{\gamma_i}$. Тогда из (1)–(3) вытекают неравенства $F_{\gamma_1}(x^k_{\gamma_1}) > F_{\gamma_1}(x^l_{\gamma_1})$, $F_{\gamma_2}(x^k_{\gamma_2}) < F_{\gamma_2}(x^l_{\gamma_2})$, означающие, что любая пара решений $x^k_{\gamma_i}, x^l_{\gamma_i} \in X_{\gamma_i}$ является векторно-несравнимой по векторной целевой функции, принятой в условиях теоремы 1. Последнее с учетом леммы 1 означает выполнение равенства $X^0_{\gamma_1,\gamma_2} = \widetilde{X}_{\gamma_1,\gamma_2} = X_{\gamma_1,\gamma_2}$.

Теорема 1 доказана.

Исследуем двухкритериальные задачи $Z_{\gamma_1,\gamma_2} \in K^0$, объединяющие не совпадающие по критериям однокритериальные задачи на графах Z_{γ_1} и Z_{γ_2}. Вначале рассмотрим постановку, когда критерии $F_{\gamma_1}(x)$, $F_{\gamma_2}(x)$ таковы, что один является частным случаем другого. Примером может служить задача $Z_{2,6}$ об отыскании минимального остовного дерева и минимальной гамильтоновой цепи. Формулировка задачи $Z_{2,6}$ объединяет две постановки задач Z_2 и Z_6. На первом этапе рассматриваем задачу Z_2, когда ее МДР X_2 представляет собой объединение двух непустых подмножеств $X_2 = X_2^6 \cup X_2^2$, где X_2^6 — подмножество гамильтоновых цепей, X_2^2 — подмножество остовных деревьев, не являющихся гамильтоновыми цепями. У подмножества X_2^2 нет «партнеров» в множестве X_6, т.е. для элементов $x_2^2 \in X_2^2$ нет соответствующих им элементов в множестве $x_6 \in X_6$ для образования пар (x_2^2, x_6). Таким образом, элементы $x_2^2 \in X_2^2$ исключаются из рассмотрения. Что касается элементов $x_2^6 \in X_2^6$, то по условию задачи $Z_{2,6}$ их количество совпадает с мощностью множества X_6: $|X_2^6| = |X_6|$. На втором этапе подмножество X_2^6 и множество X_6 образуют МДР $X_{2,6}$ задачи $Z_{2,6}$, состоящее из соответствующих пар $x_2^6 \in X_2^6$ и $x_6 \in X_6$ гамильтоновых цепей $x_{2,6} \in X_{2,6}$, $\{x_2^6, x_6\}$, причем $\max|X_{2,6}| = \frac{n!}{2}$. С использованием взвешивания (1) для графов $x_2^6 = (V, E_2^6)$, $x_6 = (V, E_6)$ и учетом (2), (3) доказана следующая теорема.

Теорема 2. Задача $Z_{2,6}$ является полной. Максимальные мощности МДР, ПМ и ПМА двухкритериальной задачи $Z_{2,6}$ «об остовном дереве и гамильтоновой цепи» равны $|X_{2,6}| = |\widetilde{X}_{2,6}| = |X_{2,6}^0| = \frac{n!}{2}$, т.е. совпадают с максимумом двухкритериальной задачи $Z_{6,6}$ «о гамильтоновой цепи».

Далее рассмотрим задачу $Z_{3,5}$ «о размещении и коммивояжере». Критерий «размещение» отличается от критерия «назначение» Z_7, рассматриваемого на квадратных матрицах, только тем, что под запрет попадают клетки главной диагонали, т.е. ставится задача о размещении n ребер на n-вершинном графе.

Доказательство сформулированной далее теоремы 3 повторяет доказательство теоремы 2 с незначительными отличиями: вместо $(n-1)$ ребер фигурируют n ребер, которые на первом этапе образуют k-циклы, $k \le n$. Для $k = n$ гамильтоновы циклы исчерпывают все множество допустимых решений задачи «о размещении и коммивояжере». Матрица смежности задачи о коммивояжере Z_5 является частным случаем задачи о размещении.

Заметим, что пара критериев $\gamma_1, \gamma_2 = 3{,}5$ не только представляет полную двухкритериальную задачу «о размещении и коммивояжере» $Z_{3,5}$, но и одновременно влечет за собой полноту задачи $Z_{2,6}$ «об остовном дереве и гамильтоновой цепи». Обратное неверно.

Теорема 3. Задача $Z_{3,5}$ является полной. Максимальные мощности МДР, ПМ и ПМА двухкритериальной задачи «о размещении и коммивояжере» $Z_{3,5}$ равны $|X_{3,5}| = |\widetilde{X}_{3,5}| = |X_{3,5}^0| = \frac{(n-1)!}{2}$, т.е. совпадают с соответствующими максимумами двухкритериальной задачи $Z_{5,5}$ «о коммивояжере».

Обобщим полученные результаты, сформулировав достаточное условие наличия свойства полноты задачи Z_{γ_1,γ_2}.

Теорема 4. Для того чтобы двухкритериальная задача Z_{γ_1,γ_2} с векторной целевой функцией $F_{\gamma_1,\gamma_2}(x_{\gamma_1,\gamma_2}) = (F_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}), F_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}))$ была полной, достаточно, чтобы ее МДР X_{γ_1,γ_2} состояло из таких подграфов $x_{\gamma_1,\gamma_2} = (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2})$, для которых выполняется равенство матриц смежности подграфов x_{γ_1} и x_{γ_2}: $X_{\gamma_1,\gamma_2} = \{x_{\gamma_1,\gamma_2} = (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}), x_{\gamma_1} = x_{\gamma_2}\}$, т.е. $X_{\gamma_1,\gamma_2} = X_{\gamma_1} \cap X_{\gamma_2}$. Мощность МДР, ПМ и ПМА двухкритериальной задачи Z_{γ_1,γ_2} равна $|X_{\gamma_1} \cap X_{\gamma_2}|$.

Доказательство аналогично приведенным для теорем 2 и 3.

Далее рассмотрим двухкритериальные задачи Z_{γ_1,γ_2}, $\gamma_1, \gamma_2 \le 7$, с МДР X_{γ_1,γ_2} вида

$$X_{\gamma_1,\gamma_2} = \{x_{\gamma_1,\gamma_2}:\ x_{\gamma_1,\gamma_2} = (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}), x_{\gamma_1} \subset x_{\gamma_2} \text{ или } x_{\gamma_1} \supset x_{\gamma_2}\}.$$

Особенность этих задач в том, что допустимые решения x_{γ_1} и x_{γ_2} имеют различное количество ребер $|E_{\gamma_1}| \ne |E_{\gamma_2}|$, причем $|E_{\gamma_1,\gamma_2}| = \max\limits_{i=1,2} |E_{\gamma_1}|$.

Рассмотрим задачу $Z_{5,6}$ «о гамильтоновом цикле–гамильтоновой цепи» на гамильтоновом n-вершинном графе $G=(V,E)$, в котором ребру e_t, $t=\overline{1,m}$, присвоен вектор весов $\omega(e_t)=(\omega_1(e_t),\omega_2(e_t))$ согласно (1). На первом этапе алгоритма решаем задачу $Z_{5,5}$. В результате получаем два спаренных множества гамильтоновых циклов $X_{5,5}=(X_5^1, X_5^2)$, из которых представляет интерес первое: $X_5^1=\{x_5^{1,\mu}\}$, $\mu=\overline{1,M}$, $M=|X_5^1|$, где $x_5^{1,\mu}$ — n-вершинный гамильтонов цикл. Согласно теореме 1 имеет место неравенство $|X_{5,5}|\le|X_5^1|$.

На втором этапе алгоритма для каждого гамильтонова цикла $x_5^{1,\mu}$, $1\le\mu\le M$, осуществляем n последовательных вычеркиваний одного ребра k, $k=\overline{1,n}$. Вычеркивание превращает гамильтонов цикл $x_5^{1,\mu}$ в гамильтонову цепь $x_6^{2,\mu,k}$, $1\le k\le n$, из которых выбираем гамильтонову цепь $\bar{x}_6^{2,\mu}$ с минимальной длиной. Определив элемент $\bar{x}_6^{2,\mu}$ для каждого μ-го гамильтонова цикла $x_5^{1,\mu}$, $\mu=\overline{1,M}$, формируем полное решение $X_{5,6}=\{(x_5^{1,\mu},x_6^{2,\mu})\}$, $\mu=\overline{1,M}$, задачи $Z_{5,6}$.

Данная задача не обладает свойством полноты, так как ее МДР не совпадает с ПМ и ПМА, что очевидно по результатам первого и второго этапов: для одного допустимого решения задачи о гамильтоновом цикле можно построить n допустимых решений задачи о гамильтоновой цепи удалением одного ребра цикла. Многокритериальные задачи, для которых максимальные мощности МДР, ПМ и ПМА подчинены соотношению $|X^0_{\gamma_1,\gamma_2}|=|\widetilde{X}_{\gamma_1,\gamma_2}|<|X_{\gamma_1,\gamma_2}|$, назовем квазиполными. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. Задача $Z_{5,6}$ «о гамильтоновом цикле–гамильтоновой цепи» является квазиполной. Максимальная мощность МДР задачи $Z_{5,6}$ равна $|X_{5,6}|=\dfrac{n!}{2}$ и не совпадает с мощностями ПМ и ПМА, равными между собой: $|\widetilde{X}_{5,6}|=|X^0_{5,6}|<|X_{5,6}|$. Максимальные мощности ПМ и ПМА задачи $Z_{5,6}$ равны $|\widetilde{X}_{5,6}|=|X^0_{5,6}|=\dfrac{(n-1)!}{2}$, т.е. совпадают с соответствующим максимумом двухкритериальной задачи $Z_{5,5}$ о гамильтоновом цикле.

Далее рассмотрим задачу $Z_{1,2}$ «о совершенном паросочетании и остовном дереве», допустимое решение x_1 которой имеет $\left[\dfrac{n}{2}\right]=\dfrac{n}{2}$ компонент связности, а допустимое решение x_2 представляет собой односвязный граф. Пусть выполняются соотношения $|E_1|\ne|E_2|$, $|E_1|=\dfrac{n}{2}=\left[\dfrac{n}{2}\right]$, а $|E_2|=n$.

Приведем без доказательства две леммы.

Лемма 2. Если в дереве можно выделить совершенное паросочетание, то оно единственно.

Лемма 3. Если в произвольном связном графе можно выделить совершенное паросочетание, то оно является ребернопорожденным подграфом не менее одного остовного дерева.

Леммы 2, 3 позволяют построить трехэтапный алгоритм решения задачи $Z_{1,2}$. Для этого перенумеруем все ребра данного $G=(V,E)$ числами $t=\overline{1,m}$, $m=|E|$, и каждому ребру $e_t\in E$ по аналогии с теоремой 1 приписываем два специальных веса: $\omega_1(e_t)=2^t$, $\omega_2(e_t)=2^{m+1}-2^t$, что в сумме дает константу $C_0=2^{m+1}$.

На первом этапе на графе $G=(V,E)$ решается задача $Z_{1,1}$ о нахождении множества совершенных паросочетаний $X_{1,1}=\{x_{1,1}^{\mu}\}=\{(x_1^{\mu,1},x_1^{\mu,2})\}=\{(V,E_1^{\mu,1}),(V,E_1^{\mu,2})\}$, $\mu=\overline{1,M}$, $M=|X_{1,1}|$. Множество совершенных паросочетаний $X_{1,1}$ понадобится для выделения «левой» части $X_1=\{x_1^{\mu,1}\}$, $\mu=\overline{1,M}$, которая соединится с правой частью $X_2=\{x_2^{\mu,2}\}$ множества пар остовных деревьев на втором этапе алгоритма. Максимальная мощность МДР $X_{1,1}$ достигается на полном графе и равна $M_0=(n-1)!!$.

Перейдем ко второму этапу решения. Согласно лемме 3 каждой μ-й паре совершенных паросочетаний $(x_1^{\mu,1},x_1^{\mu,2})\in X_{1,1}$ соответствует множество пар остовных деревьев $X_{2,2}^{\mu,\nu}=(X_2^{\mu,\nu,1},X_2^{\mu,\nu,2})=\{(x_2^{\mu,\nu,1},x_2^{\mu,\nu,2})\}$, $\mu=\overline{1,M}$, $\nu=\overline{1,N}$. Таким образом, при фиксированном μ единственному элементу $x_1^{\mu,1}$ (т.е. «левому» ребру μ-го паросочетания) ставится в соответствие «правое» μ-е множество $X_2^{\mu,\nu,2}=\{x_2^{\mu,\nu,2}\}$. Для фиксированного μ решается задача нахождения минимума $\bar{x}_2^{\mu,\nu,2}$ среди элементов $x_2^{\mu,\nu,2}$ множества $X_2^{\mu,\nu,2}$. Найденный минимум $\bar{x}_2^{\mu,\nu,2}$ в паре с фиксированным элементом $x_1^{\mu,1}$ дает решение $Z_{1,2}$ для одной точки $(x_1^{\mu,1},\bar{x}_2^{\mu,\nu,2})$, соответствующей номеру μ, $\mu\in[1,M]$. Правая часть этой точки для фиксированного μ складывается из двух составляющих: «фиксированная часть», состоящая из $\frac{n}{2}=\left[\frac{n}{2}\right]$ элементов вида $(2^N-\omega_1(e_t))$, где вес ребра e_t определяется на первом этапе, и «переменная часть» — результат работы второго этапа, за $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ шагов дополняющего «фиксированную часть». Соединение элементов $x_1^{\mu,1}$ и $\bar{x}_2^{\mu,\nu,2}$, $1\le\nu\le N$, дает допустимое решение $(x_1^{\mu,1},\bar{x}_2^{\mu,\nu,2})$ задачи $Z_{1,2}$ для фиксированного μ. Реализация алгоритма для каждого $\mu\in[1,M]$ приводит к построению МДР задачи $Z_{1,2}$. Сравнивая две «фиксированные части» у любых двух точек, обнаруживаем их несовпадение хотя бы по одному ребру, что, при выбранном способе взвешивания, однозначно приводит к несовпадению весовых значений пар $(x_1^{\mu,1},\bar{x}_2^{\mu,\nu,2})$ для различных $\mu\in[1,M]$.

При реализации третьего этапа, на котором выделяются паретовские решения и ПМА из найденных допустимых решений задачи $Z_{1,2}$, получим совпадающие множества ПМ и ПМА. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Двухкритериальная задача $Z_{1,2}$ «о совершенном паросочетании и остовном дереве» является квазиполной. Максимальная мощность МДР задачи $Z_{1,2}$ «о совершенном паросочетании и остовном дереве» равна $|X_{1,2}|=n^{n-2}$. Мощности ПМ и ПМА равны между собой и не превышают мощности МДР двухкритериальной задачи $Z_{1,1}$ «о совершенном паросочетании»: $|\widetilde{X}_{1,2}|=|X_{1,2}^0|\le(n-1)!!$.

Сформулируем достаточное условие наличия свойства квазиполноты у двухкритериальной задачи Z_{γ_1,γ_2}.

Теорема 7. Для того чтобы двухкритериальная задача Z_{γ_1,γ_2} с векторной целевой функцией $F_{\gamma_1,\gamma_2}(x_{\gamma_1,\gamma_2})=(F_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}),F_{\gamma_2}(x_{\gamma_2}))$ обладала свойством квазиполноты, достаточно, чтобы ее МДР X_{γ_1,γ_2} состояло из таких подграфов x_{γ_1,γ_2}, для которых выполняется отношение включения для подграфов x_{γ_1} и x_{γ_2}: $X_{\gamma_1,\gamma_2}=\{x_{\gamma_1,\gamma_2}:x_{\gamma_1,\gamma_2}\}=(x_{\gamma_1},x_{\gamma_2}),x_{\gamma_1}\subset x_{\gamma_2}$ или $x_{\gamma_1}\supset x_{\gamma_2}$, где x_{γ_1} — допустимое решение задачи Z_{γ_1}, x_{γ_2} — допустимое решение задачи Z_{γ_2}.

Доказательство аналогично теореме 6.

В рамках проведенных исследований выделены новые виды полных и квазиполных задач двухкритериальной дискретной оптимизации с разнотипными критериями весового вида. В статье сформулированы и доказаны достаточные условия наличия свойства полноты и свойства квазиполноты для данного класса задач.

Можно полагать, что проявление свойств полноты и квазиполноты является основным отличием многокритериального случая от однокритериального и подтверждает необходимость дальнейших исследований в этом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pareto V. Manuel d'economic politique. Paris: Giard, 1909.
2. Cooper Ch.A., Cooper W.W. Management models and industrial applications of lineal programming. New York: Wiley, 1961. Vol. 1.
3. Перепелица В.А. Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах. Saarbrücken: LAP LAMBERT Acad. Publ., 2013. 337 p.
4. Перепелица В.А. Об одном классе многокритериальных задач на графах и гиперграфах. *Кибернетика*. 1984. № 4. С. 62–67.
5. Перепелица В.А. Об эффективности использования методов дискретной оптимизации для анализа систем. *Теория, методология и практика системных исследований: Тез. докл. Всесоюз. конф*. Москва: ВНИИСИ ГКНТ и АН СССР, 1984. С. 198–200.
6. Перепелица В.А., Максишко Н.К. О многокритериальной задаче покрытия ориентированного графа контурами. *Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях*: *Тез. докл. 3-го Всесоюз. сов.* (Ташкент, 28–30 авг. 1984 г.). Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. Ч. 2. С. 97–98.
7. Сергиенко В.А., Перепелица В.А. К проблеме нахождения множеств альтернатив дискретных многокритериальных задач. *Кибернетика*. 1987. № 5. С. 85–93.
8. Емеличев В.А., Перепелица В.А. Сложность дискретных многокритериальных задач. *Дискретная математика*. 1994. Т. 6, вып. 1. С. 3–33.

Надійшла до редакції 07.07.2017

В.О. Перепелиця, Е.В. Терещенко

ПРО ПОВНІ І КВАЗІПОВНІ ДВОКРИТЕРІЙНІ ЗАДАЧІ НА ГРАФАХ

Анотація. Вивчаються достатні умови наявності властивості повноти або квазіповноти у двокритерійних задачах дискретної оптимізації з однаковими і різними критеріями вагового вигляду. Обчислено оцінку потужностей множин допустимих розв'язків, паретовської множини і повної множини альтернатив для низки задач з двома критеріями.

Ключові слова: багатокритерійна оптимізація, паретовська множина, повна множина альтернатив, повна задача, квазіповна задача.

V.A. Perepelitsa, E.V. Tereschenko

ON COMPLETE AND QUASI-COMPLETE TWO-CRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS ON GRAPHS

Abstract. This article is devoted to the study of sufficient conditions for using the completeness or quasicompleteness properties in two-criteria discrete optimization problems with the same and different weight-type criteria. The authors evaluated the cardinalities of sets of acceptable solutions, the Pareto set, and a complete set of alternatives for several two-criteria problems.

Keywords: vector optimization, Pareto set, complete set of alternatives, complete problem, quasi-complete problem.

Перепелица Виталий Афанасьевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Запорожского национального университета,
e-mail: vitalijperepelica2@gmail.com.

Терещенко Элина Валентиновна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Запорожского национального технического университета,
e-mail: elina_vt@ukr.net.