СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

Е.Ф. ГАЛБА, Н.А. ВАРЕНЮК

УДК 512.61

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ СО СМЕШАННЫМИ ВЕСАМИ ЧЕРЕЗ ДРУГИЕ ПСЕВДООБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Аннотация. Рассматривается взвешенная псевдообратная матрица, когда обе весовые матрицы симметричные, причем одна из них положительно-определенная, а вторая — невырожденная знаконеопределенная. Получены формулы для представления этих матриц через псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза и через другие взвешенные псевдообратные матрицы.

Ключевые слова: взвешенные псевдообратные матрицы со знаконеопределенными весами, псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза, взвешенные псевдообратные матрицы со смешанными весами.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] определена и исследована взвешенная псевдообратная матрица с невырожденными знаконеопределенными весами. Дано представление взвешенных псевдообратных матриц с индефинитными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, получены разложения взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и произведения, а также предельные представления этих матриц.

В настоящей статье получены формулы представления взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенной и положительно-определенной симметричными весовыми матрицами через псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза [2, 3] и через другие псевдообратные матрицы.

Отметим, что в работе [4] получена формула представления взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами через матрицу Мура–Пенроуза, а в [5, 6] получены соответственно формулы представления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными и вырожденными весами через псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза и различных видов взвешенных псевдообратных матриц.

ВЗВЕШЕННЫЕ ПСЕВДООБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ С ИНДЕФИНИТНЫМИ ВЕСАМИ

Определение 1. Квадратную вещественную матрицу U назовем симметризуемой слева или справа, если существует такая симметричная невырожденная матрица H, что выполняются соответственно равенства $HU = U^T H$, $UH = HU^T$.

Определение 2. Квадратную вещественную матрицу Q назовем H-взвешенной ортогональной (ортогональной с весом H), если выполняется условие $Q^T HQ = E$, где H — симметричная невырожденная матрица, E — единичная матрица.

В [1] дано взвешенное спектральное разложение симметризуемой слева положительно-определенным симметризатором квадратной вещественной матрицы. Симметризуемая слева положительно-определенным симметризатором H матрица U может быть приведена к диагональной форме с помощью H-взвешенного ортогонального преобразования, т.е. существует такая H-взвешенная ортогональная матрица Q, что

$$Q^T HUQ = \Lambda, \tag{1}$$

и матрица U представима в виде

$$U = Q\Lambda Q^T H, \tag{2}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, λ_i — собственные значения матрицы U, а столбцы матрицы Q образуют полную систему собственных векторов матрицы U.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и пусть $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные знаконеопределенные невырожденные матрицы. Взвешенную псевдообратную матрицу к матрице A определим как единственную матрицу, удовлетворяющую системе матричных уравнений

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (BAX)^T = BAX,\ (CXA)^T = CXA \tag{3}$$

при выполнении условий

$$rk(A^T BA) = rk(AC^{-1}A^T) = rk(A). \tag{4}$$

Следовательно, согласно определению 1 рассматривается вариант взвешенной псевдоинверсии, когда выполняются условия (4) и AX и XA — матрицы, симметризуемые слева соответственно знаконеопределенными невырожденными симметризаторами B и C.

Если матрицы B и C — положительно-определенные, то система матричных уравнений (3) имеет единственное решение без дополнительных условий. Можно показать, что в этом случае условия (4) выполняются. При $B = E_m$, $C = E_n$, где нижний индекс при единичной матрице означает ее размерность, система матричных уравнений (3) будет представлять псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза к матрице A, которую обозначим A_{EE}^+.

Если весовые матрицы B и C — положительно-определенные или одна из них положительно определена, то это будет частный случай взвешенной псевдоинверсии с индефинитными весами. В дальнейшем будем предполагать, что одна из весовых матриц в (3) будет положительно-определенной.

В [1] отмечено, что задача (3), (4) имеет единственное решение $X = A_{BC}^+$, причем

$$A_{BC}^+ = C^{-1}SA^T B, \tag{5}$$

где $S = f(A^T BAC^{-1})$ — многочлен от матрицы $A^T BAC^{-1}$ вида

$$S = -\alpha_k^{-1}[(A^T BAC^{-1})^{k-1} + \alpha_1(A^T BAC^{-1})^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1}E], \tag{6}$$

α_p, $p = 1, 2, \dots$, — коэффициенты характеристического многочлена

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n = \det[\lambda E - A^T BAC^{-1}],$$

α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

В работе [1] для случая, когда матрица C — положительно-определенная, а B — знаконеопределенная, дано следующее предельное представление для взвешенной псевдообратной матрицы

$$A_{BC}^+ = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{p}\delta^{k-1}(C^{-1}A^T BA + \delta E)^{-k}C^{-1}A^T B,\ 0 < |\delta| < \frac{1}{2}\mu(C^{-1}A^T BA),\quad p = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

а для случая, когда B — положительно-определенная, C — знаконеопределенная, имеем

$$A_{BC}^+ = \lim_{\delta\to 0} C^{-1}A^T B\sum_{k=1}^{p}\delta^{k-1}(AC^{-1}A^T B + \delta E)^{-k},\ 0 < |\delta| < \frac{1}{2}\mu(AC^{-1}A^T B),\quad p = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

где $\mu(L) = \min\{|\lambda| : \lambda \ne 0 \in \sigma(L)\}$, λ_i — собственные значения матрицы $C^{-1}A^T BA$ в (7) и $AC^{-1}A^T B$ в (8).

Докажем утверждения, которые будут использоваться при обосновании формул представления взвешенных псевдообратных матриц через другие псевдообратные матрицы.

Лемма 1. Пусть A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица с индефинитными весами B и C, определенная с помощью условий (3), (4). Тогда имеют место равенства

$$SA^T BAC^{-1} = A^T BAC^{-1}S\,,\ SA^T BAC^{-1}A^T = A^T\,, \tag{9}$$

где матрица S определена формулой (6).

Доказательство. Первое равенство из (9) непосредственно следует из определения матрицы S формулой (6). Для доказательства второго равенства в (9) будем использовать равенство

$$A^T BAA_{BC}^{+} = A^T B, \tag{10}$$

которое следует из первого и третьего равенств в (3), определяющих взвешенную псевдообратную матрицу (3), (4).

Действительно, $A^T BAA_{BC}^{+} = A^T (A_{BC}^{+} BC)^T A^T B = (AA_{BC}^{+} BCA)^T B = A^T B$.

Далее, учитывая равенства (5), (10), получаем $SA^T BAC^{-1}A^T B = {}$ $= A^T BAC^{-1}SA^T B = A^T BAA_{BC}^{+} = A^T B$, откуда в силу невырожденности матрицы B имеем второе равенство в (9), что и завершает доказательство леммы 1.

Лемма 2. Пусть U — симметризуемая слева положительно-определенным симметризатором матрица, причем $U+\delta E$ — невырожденная матрица, где δ — числовой параметр. Тогда имеет место соотношение

$$U = \lim_{\delta\to 0}(U+\delta E)^{-1}U^2 = \lim_{\delta\to 0}U^2(U+\delta E)^{-1}\,. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $U\in\mathbb{R}^{n\times n}$ — знаконеопределенная матрица, симметризуемая слева положительно-определенным симметризатором H. Выше представлено взвешенное спектральное разложение матрицы U (см. (1), (2)). Обозначим $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_i)$, где λ_i, $i=1,\ldots,n$, — собственные значения матрицы U. Поскольку по условию леммы 2 матрица $U+\delta E$ — невырождена, то она имеет обратную матрицу. С учетом определения взвешенной ортогональной матрицы, а также (1), (2) легко убедиться, что матрица $(U+\delta E)^{-1}$ также симметризуема с матрицей симметризации H и

$$(U+\delta E)^{-1} = Q(\Lambda+\delta E)^{-1}Q^T H\,. \tag{12}$$

Собственные значения матрицы $U+\delta E$ и $(U+\delta E)^{-1}$ будут соответственно равны $\lambda_i+\delta$ и $(\lambda_i+\delta)^{-1}$.

Тогда, учитывая определение взвешенной ортогональной матрицы, формулы (2), (12), вид матриц Λ и $(\Lambda+\delta E)^{-1}$, а также перестановочность матриц U^2 и $(U+\delta E)^{-1}$, получаем

$$\lim_{\delta\to 0}(U+\delta E)^{-1}U^2 = \lim_{\delta\to 0}Q(\Lambda+\delta E)^{-1}Q^T HQ\Lambda^2 Q^T H =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}Q(\Lambda+\delta E)^{-1}\Lambda^2 Q^T H = Q\Lambda Q^T H = U = \lim_{\delta\to 0}U^2(U+\delta E)^{-1},$$

т.е. формулу (11) и, следовательно, утверждение леммы 2.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ СО СМЕШАННЫМИ ВЕСАМИ ЧЕРЕЗ ПСЕВДООБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ МУРА–ПЕНРОУЗА

Обоснуем представление взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами через псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза, когда обе весовые матрицы симметричные, причем одна из них положительно-определенная, а вторая — невырожденная знаконеопределенная. Отметим, что эти задачи являются частным случаем задачи (3), (4). Сначала рассмотрим случай, когда матрица C положительно-определенная, а B — знаконеопределенная, т.е. представим взвешенные псевдообратные матрицы, которые удовлетворяют системе матричных уравнений

$$AXA = A\,,\ XAX = X\,,\ (BAX)^T = BAX\,,\ (CXA)^T = CXA \tag{13}$$

при выполнении условия

$$rk(A^T BA) = rk(A). \tag{14}$$

Теорема 1. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — произвольная действительная матрица, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — симметричная знаконеопределенная невырожденная матрица, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричная положительно-определенная матрица. Тогда взвешенная псевдообратная матрица к матрице A, определенная условиями (13), (14), представляется в виде

$$A^+_{BC} = C^{-1/2}(C^{-1/2}A^T BAC^{-1/2})^+_{EE}C^{-1/2}A^T B. \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим $L = C^{-1/2}A^T BAC^{-1/2}$. Второе, третье и четвертое уравнения в (3) будем проверять подстановкой $X = A^+_{BC} = C^{-1/2}L^+_{EE}C^{-1/2}A^T B$ в эти уравнения, учитывая определения взвешенной псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза. Сначала подставим X во второе уравнение формулы (13). Получим

$$XAX = C^{-1/2}L^+_{EE}C^{-1/2}A^T BAC^{-1/2}L^+_{EE}C^{-1/2}A^T B = C^{-1/2}L^+_{EE}LL^+_{EE}C^{-1/2}A^T B =$$

$$= C^{-1/2}L^+_{EE}C^{-1/2}A^T B = X\,.$$

Поскольку L — симметричная матрица, то и псевдообратная к ней матрица Мура–Пенроуза также является симметричной [7]. С учетом этого получим $BAX = BAC^{-1/2}L^+_{EE}C^{-1/2}A^T B$ — симметричную матрицу, т.е. третье условие в определении взвешенной псевдообратной матрицы также выполнимо.

Проверим выполнение четвертого условия. Матрица

$$CXA = CC^{-1/2}L^+_{EE}C^{-1/2}A^T BA = C^{1/2}L^+_{EE}C^{-1/2}A^T BA =$$
$$C^{1/2}L^+_{EE}C^{-1/2}A^T BAC^{-1/2}C^{1/2} = C^{1/2}L^+_{EE}LC^{1/2}$$

является симметричной, поскольку матрица $L^+_{EE}L$ — симметричная согласно определению псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза.

Первое условие в (3) следует из второго. Действительно, из второго условия в (3) имеем $AXAXA = AXA$, откуда следует $AXA = A$.

Из второго условия в (13) следует, что $rk(A^+_{BC}) = rk(A^+_{BC}A)$. Покажем, что ранг матрицы A^+_{BC} (см. (15)) при выполнении условия (14) равен рангу матрицы $A^+_{BC}A$.

Для доказательства используем неравенство Фробениуса

$$rk(PQ) + rk(QL) \le rk(Q) + rk(PQL),$$

справедливое для всех тех матриц P, Q, L, для которых определено произведение PQL. Обозначим $M = C^{-1/2}L^+_{EE}C^{-1/2}$. Тогда $A^+_{BC} = MA^T B$. Рассмотрим матрицу $A^+_{BC}A = MA^T BA$. На основании неравенства Фробениуса имеем

$$rk(MA^T B) + rk(A^T BA) \le rk(A^T B) + rk(MA^T BA)\,,$$

откуда, учитывая (14), а также то, что при умножении произвольной матрицы на невырожденную матрицу ранг не изменяется, из последнего неравенства получаем $rk(MA^T B) \le rk(MA^T BA)$. Отсюда $rk(A^+_{BC}) \le rk(A^+_{BC}A) \le rk(A^+_{BC})$, т.е. $rk(A^+_{BC}) = rk(A^+_{BC}A)$. Следовательно, при выполнении условия (14) для матрицы, определенной формулой (15), выполняется такое же соотношение для рангов матриц A_{BC}^{+} и $A_{BC}^{+}A$, как и для матрицы, определенной условиями (13), (14).

Теорема 1 доказана.

Далее рассмотрим случай, когда матрица B — положительно-определенная, а C — знаконеопределенная, т.е. представим взвешенные псевдообратные матрицы, удовлетворяющие системе матричных уравнений

$$AXA = A,\; XAX = X,\; (BAX)^T = BAX,\; (CXA)^T = CXA \tag{16}$$

при выполнении условия

$$rk(AC^{-1}A^T) = rk(A). \tag{17}$$

Теорема 2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — произвольная действительная матрица, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — симметричная положительно-определеная матрица, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричная знаконеопределенная невырожденная матрица. Тогда взвешенная псевдообратная матрица A_{BC}^{+} к матрице A, определенная условиями (16), (17), представляется в виде

$$A_{BC}^{+} = C^{-1}A^T B^{1/2}(B^{1/2}AC^{-1}A^T B^{1/2})_{EE}^{+} B^{1/2}. \tag{18}$$

Доказательство. Обозначим $L = B^{1/2}AC^{-1}A^T B^{1/2}$. Как и в предыдущем случае, второе, третье и четвертое уравнения в (16) будем проверять подстановкой $X = A_{BC}^{+} = C^{-1}A^T B^{1/2}L_{EE}^{+}B^{1/2}$. Подставим X во второе уравнение из (16). Учитывая второе условие в определении псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, получаем

$$XAX = C^{-1}A^T B^{1/2}L_{EE}^{+}B^{1/2}AC^{-1}A^T B^{1/2}L_{EE}^{+}B^{1/2} = C^{-1}A^T B^{1/2}L_{EE}^{+}LL_{EE}^{+}B^{1/2} =$$

$$= C^{-1}A^T B^{1/2}L_{EE}^{+}B^{1/2} = X.$$

Подставив X в третье условие из (16), получим

$$BAX = BAC^{-1}A^T B^{1/2}L_{EE}^{+}B^{1/2} = B^{1/2}B^{1/2}AC^{-1}A^T B^{1/2}L_{EE}^{+}B^{1/2} = B^{1/2}LL_{EE}^{+}B^{1/2}$$

— симметричную матрицу, поскольку матрица $L_{EE}^{+}L$ — симметричная согласно определению псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза.

Проверим выполнение четвертого условия. Матрица $CXA = CC^{-1}A^T B^{1/2}L_{EE}^{+}B^{1/2}A = A^T B^{1/2}L_{EE}^{+}B^{1/2}A$ является симметричной, поскольку, как отмечено в теореме 1, L_{EE}^{+} — симметричная матрица.

Первое условие в (3) следует из второго (см. теорему 1).

Из второго условия в (16) следует, что $rk(A_{BC}^{+}) = rk(AA_{BC}^{+})$. Покажем, что ранг матрицы A_{BC}^{+}, определенной формулой (18), при выполнении условия (17) равен рангу матрицы AA_{BC}^{+}.

Обозначим $M = B^{1/2}L_{EE}^{+}B^{1/2}$. Тогда $A_{BC}^{+} = C^{-1}A^T M$. Рассмотрим матрицу $AA_{BC}^{+} = AC^{-1}A^T M$. Как и в теореме 1, для доказательства используем неравенство Фробениуса, на основании которого имеем

$$rk(AC^{-1}A^T) + rk(C^{-1}A^T M) \le rk(C^{-1}A^T) + rk(AC^{-1}A^T M).$$

Отсюда с учетом (17), а также утверждения того, что при умножении невырожденной матрицы на произвольную матрицу ранг последней не изменяется, из последнего неравенства получаем $rk(C^{-1}A^T M) \le rk(AC^{-1}A^T M)$. Следовательно, при выполнении условия (17) для матрицы, определенной формулой (18), выполняется такое же соотношение для рангов матриц A^+_{BC} и AA^+_{BC}, как и для матрицы, определенной условиями (16), (17).

Теорема 2 доказана.

Таким образом, для взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весовыми матрицами, т.е. когда одна из весовых матриц симметричная и положительно-определенная, а вторая — симметричная невырожденная знаконеопределенная, получены их представления через псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза для двух видов симметричных матриц (см. (15), (18)).

Отметим, что в [7] для псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза получено ее представление через псевдообратные к симметричным матрицам

$$A^+_{EE} = (A^T A)^+_{EE} A^T = A^T (AA^T)^+_{EE}.$$

Очевидно, что эти формулы для A^+_{EE} являются следствием соотношений (15), (18) при $B = E_m$, $C = E_n$.

Существует много публикаций, посвященных прямым и итерационным методам вычисления псевдообратных матриц Мура–Пенроуза (например, [7, 8–10]). Поэтому один из подходов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц может быть основан на использовании методов вычисления псевдообратных матриц Мура–Пенроуза, если взвешенные псевдообратные матрицы представить через псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза. Такое представление дано в настоящей работе формулами (15), (18).

Формулы (15), (18) можно использовать, например, для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с помощью пакета прикладных программ, в котором имеются программы вычисления псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза и корня квадратного из симметричной невырожденной матрицы.

Как отмечено выше, согласно формулам (15), (18) для вычисления взвешенных псевдообратных матриц необходимо найти псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза для симметричных матриц. Но согласно [7] эти матрицы можно построить, исходя из решения алгебраической проблемы собственных значений для симметричных матриц.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ СО СМЕШАННЫМИ ВЕСАМИ ЧЕРЕЗ ДРУГИЕ ВЗВЕШЕННЫЕ ПСЕВДООБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Формулы (15), (18) представления взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами через псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза были получены на основании их проверки на соответствия условиям (13), (14) и (16), (17), определяющим взвешенную псевдообратную матрицу со смешанными весами. Ниже получим представление взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами через другие взвешенные псевдообратные матрицы на основе приведенных выше свойств взвешенных псевдообратных матриц с индефинитными весами и лемм 1 и 2.

Теорема 3. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — произвольная действительная матрица, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — симметричная знаконеопределенная невырожденная матрица, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная положительно-определенная матрица. Тогда взвешенная псевдообратная матрица A^+_{BC} к матрице A, определенная условиями (13), (14), представляется в виде

$$A^+_{BC} = (C^{-1} A^T BA)^+_{CC} C^{-1} A^T B, \tag{19}$$

$$A^+_{BC} = (A^T BA)^+_{C^{-1}C} A^T B. \tag{20}$$

Доказательство. Отметим, что поскольку задача (13), (14) является частным случаем задачи (3), (4), то все свойства задачи (3), (4), о которых сказано выше, верны для задачи (13), (14). В частности, для взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (13), (14), верна формула (5). Обозначим $L = C^{-1}A^T BA$. Покажем, что матрицы, определенные выражениями (19), (20), представляются формулой (5), откуда и будет следовать утверждение теоремы 3. Пусть в предельном представлении (7) взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами, определенных условиями (13), (14), $p = 1$. Тогда формула (7) примет вид

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta \to 0} (L + \delta E)^{-1} C^{-1} A^T B, \quad 0 < |\delta| < \frac{1}{2} \mu(C^{-1}A^T BA). \tag{21}$$

На основании (21) и (9) получим

$$L_{CC}^{+} = \lim_{\delta \to 0} (L^2 + \delta E)^{-1} L. \tag{22}$$

Из (21), (22) следует

$$L_{CC}^{+} C^{-1} A^T B = \lim_{\delta \to 0} (L^2 + \delta E)^{-1} LC^{-1} A^T B. \tag{23}$$

Используя формулы (9), получаем $LC^{-1}A^T B = L^4 C^{-1} S^3 A^T B$ и (23) перепишем в виде

$$L_{CC}^{+} C^{-1} A^T B = \lim_{\delta \to 0} (L^2 + \delta E)^{-1} L^4 C^{-1} S^3 A^T B. \tag{24}$$

Из (24) в силу леммы 2 имеем $L_{CC}^{+} C^{-1} A^T B = L^2 C^{-1} S^3 A^T B$, откуда, используя формулы (9), (5), получим $L^2 C^{-1} S^3 A^T B = C^{-1} SA^T B = A_{BC}^{+}$ и $L_{CC}^{+} C^{-1} A^T B = A_{BC}^{+}$, т.е. формулу (19).

Теперь перейдем к обоснованию формулы (20).

Как и выше, обозначим $L = C^{-1}A^T BA$. Тогда формула (21) для матрицы $A^T BA$ примет вид

$$(A^T BA)_{C^{-1}C}^{+} = \lim_{\delta \to 0} (C^{-1}A^T BAC^{-1}A^T BA + \delta E)^{-1} C^{-1} A^T BAC^{-1} =$$
$$= \lim_{\delta \to 0} (L^2 + \delta E)^{-1} LC^{-1},$$

откуда получаем

$$(A^T BA)_{C^{-1}C}^{+} A^T B = \lim_{\delta \to 0} (L^2 + \delta E)^{-1} LC^{-1} A^T B. \tag{25}$$

Из равенств (23), (25) следует, что для матриц $(A^T BA)_{C^{-1}C}^{+} A^T B$ и $(C^{-1}A^T BA)_{CC}^{+} C^{-1} A^T BA$ получено одинаковое представление. Поэтому рассуждения, проведенные выше для обоснования формулы (19), приведут к утверждению достоверности формулы (20).

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — произвольная действительная матрица, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — симметричная положительно-определенная матрица, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная знаконеопределенная невырожденная матрица. Тогда взвешенная псевдообратная матрица A_{BC}^{+} к матрице A, определенная условиями (16), (17), представляется в виде

$$A_{BC}^{+} = C^{-1}A^T BA(AC^{-1}A^T B)_{BB}^{+}, \tag{26}$$

$$A_{BC}^{+} = C^{-1}A^T (AC^{-1}A^T)_{BB^{-1}}^{+}. \tag{27}$$

Доказательство. Отметим, что поскольку задача (16), (17) является частным случаем задачи (3), (4), то все свойства задачи (3), (4), приведенные выше, верны для задачи (16), (17). В частности, для взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (16), (17), верна формула (5). Обозначим $L = AC^{-1}A^T B$. Покажем, что матрицы, определенные формулами (26), (27), представляются формулой (5), откуда и будет следовать утверждение теоремы 4. Пусть в предельном представлении (8) взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами, определенных условиями (16), (17), $p=1$. Тогда формула (8) примет вид

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta\to 0} C^{-1}A^T B(L+\delta E)^{-1}, \quad 0<|\delta|<\frac{1}{2}\mu(AC^{-1}A^T B). \tag{28}$$

На основании (28) и (9) получим

$$L_{BB}^{+} = \lim_{\delta\to 0} L(L^2+\delta E)^{-1}. \tag{29}$$

Из (28), (29) имеем

$$C^{-1}A^T BL_{BB}^{+} = C^{-1}A^T BL \lim_{\delta\to 0}(L^2+\delta E)^{-1}. \tag{30}$$

В силу формул (9) находим $C^{-1}A^T BL = C^{-1}S^3 A^T BL^4$ и (30) переписываем в виде

$$C^{-1}A^T BL_{BB}^{+} = C^{-1}S^3 A^T BL^4 \lim_{\delta\to 0}(L^2+\delta E)^{-1}. \tag{31}$$

Из (31) на основании леммы 2 имеем $C^{-1}A^T BL_{BB}^{+} = C^{-1}S^3 A^T BL^2$, откуда в силу (9), (5) получим $C^{-1}S^3 A^T BL^2 = C^{-1}SA^T B = A_{BC}^{+}$ и $C^{-1}A^T BL_{BB}^{+} = A_{BC}^{+}$, т.е. формулу (26).

Обоснуем справедливость формулы (27). Как и выше, обозначим $L = AC^{-1}A^T B$. Тогда формула (28) для матрицы $AC^{-1}A^T$ примет вид

$$(AC^{-1}A^T)_{BB^{-1}}^{+} = \lim_{\delta\to 0} BAC^{-1}A^T B(AC^{-1}A^T BAC^{-1}A^T B+\delta E)^{-1} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} BL(L^2+\delta E)^{-1},$$

откуда имеем

$$C^{-1}A^T(AC^{-1}A^T)_{BB^{-1}}^{+} = C^{-1}A^T BL \lim_{\delta\to 0}(L^2+\delta E)^{-1}. \tag{32}$$

Из равенств (30), (32) следует, что для матриц $C^{-1}A^T(AC^{-1}A^T)_{BB^{-1}}^{+}$ и $C^{-1}A^T B(AC^{-1}A^T B)_{BB}^{+}$ получено одинаковое представление. Поэтому изложенные выше обоснования для формулы (26) приведут к утверждению достоверности формулы (27).

Теорема 4 доказана.

Таким образом, для взвешенных псевдообратных матриц, когда одна из весовых матриц симметричная положительно-определенная, а вторая симметричная невырожденная знаконеопределенная, получены их представления через взвешенные псевдообратные матрицы для двух видов симметризуемых и симметричных матриц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для взвешенных псевдообратных матриц, когда обе весовые матрицы симметричные, при этом одна из них положительно-определенная, а другая невырожденная знаконеопределенная, получены их представления через псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза для симметричных матриц и через взвешенные псевдообратные матрицы для симметричных и симметризуемых матриц. Полученные теоретические результаты можно использовать, например, при вычислении взвешенных псевдообратных матриц для произвольных действительных матриц с помощью пакета прикладных программ, в которых имеются программы вычисления псевдообратных матриц Мура–Пенроуза, и взвешенных псевдообратных матриц для симметричных и симметризуемых матриц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Химич А.Н., Галба Е.Ф., Варенюк Н.А. Взвешенные псевдообратные матрицы со знаконеопределенными весами. *Доповіді НАН України.* 2017. № 6. С. 14–20.
2. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Abstract Bull. Amer. Math. Soc.* 1920. Vol. 26. P. 394–395.
3. Penrose R. A generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1955. Vol. 51, N 3. P. 406–413.
4. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weited pseudoinverses with singular weights. *SIAM J. Appl. Math.* 1971. Vol. 21, N 3. P. 480–482.
5. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. I. Положительно-определенные веса. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 1. С. 47–73.
6. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. II. Вырожденные веса. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 3. С. 75–102.
7. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. Москва: Наука, 1977. 223 с.
8. Nashed M.Z. Generalized inverses and applications. New York: Academic Press, 1976. 1054 p.
9. Ben-Izrael A., Greville T.N.E. Generalized inverses: Theory and applications. Second edition. New York: Springer Verlag, 2003. 420 p.
10. Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. Москва: Машиностроение, 1976. 392 с.

Надійшла до редакції 10.07.2017

Є.Ф. Галба, Н.А. Варенюк

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЗВАЖЕНИХ ПСЕВДООБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ ІЗ ЗМІШАНИМИ ВАГАМИ ЧЕРЕЗ ІНШІ ПСЕВДООБЕРНЕНІ МАТРИЦІ

Анотація. Розглянуто зважену псевдообернену матрицю, коли обидві вагові матриці симетричні, причому одна із них додатно-означена, а друга — невироджена знаконевизначена. Отримано формули для представлення цих матриць через псевдообернену матрицю Мура–Пенроуза і через інші зважені псевдообернені матриці.

Ключові слова: зважені псевдообернені матриці із знаконевизначеними вагами, псевдообернені матриці Мура–Пенроуза, зважені псевдообернені матриці із змішаними вагами.

E.F. Galba, N.A. Vareniuk

REPRESENTING WEIGHTED PSEUDOINVERSE MATRICES WITH MIXED WEIGHTS IN TERMS OF OTHER PSEUDOINVERSE MATRICES

Abstract. The paper considers weighted pseudoinverse matrix, when both weighted matrices are symmetric and one of them is positive definite matrix and the other is nonsingular and indefinite. Formulas are obtained for representing these matrices in terms of the pseudoinverse Moore–Penrose matrix and other weighted pseudoinverse matrices.

Keywords: weighted pseudoinverse matrices with indefinite weights, Moore–Penrose pseudoinverse matrices, weighted pseudoinverse matrices with mixed weights.

Галба Евгений Федорович,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: e.f.galba@ukr.net.

Варенюк Наталия Анатолиевна,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: nvareniuk@ukr.net.