

МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ СО СКОРОПОРТЯЩИМИСЯ ПРОДУКТАМИ И СЕРВЕРОМ НА «ПРОГУЛКЕ»

Аннотация. Изучена система обслуживания-запасания со скоропортящимися продуктами, в которой после завершения обслуживания заявки сервер уходит на «прогулку» при отсутствии заявок в очереди, а после окончания «прогулки» сервер приступает к обслуживанию новых заявок, если длина их очереди превышает некоторую пороговую величину; иначе сервер снова уходит на «прогулку». Разработаны точный и приближенный методы расчета характеристик системы.

Ключевые слова: система управления запасами, скоропортящиеся продукты, «прогулка» сервера.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [1]. Напомним, что в указанной работе предложен эффективный метод расчета характеристик системы обслуживания-запасания со скоропортящимися продуктами (Perishable Queueing-Inventory System, PQIS) и сервером на «прогулке», в которой принимается, что пополнения запасов осуществляются согласно политике двух уровней.

Здесь изучаются модели PQIS, которые, в отличие от модели [1], имеют следующие особенности. Во-первых, сервер уходит на прогулки лишь тогда, когда в момент завершения его работы в системе отсутствуют заявки; во-вторых, здесь изучаются как модели с ограниченной очередью, так и модели с неограниченной очередью заявок; и, наконец, в-третьих, здесь по завершении времени прогулки сервер переходит в рабочий режим лишь тогда, когда число заявок в системе превышает некоторую пороговую величину. Учет этих особенностей позволяет изучить еще один широкий класс реальных систем обслуживания-запасания со скоропортящимися продуктами.

Основным научным результатом данной работы является разработка метода приближенного расчета стационарного распределения трехмерной цепи Маркова (ЦМ) большой размерности. В этой связи укажем некоторые известные подходы к решению данной проблемы.

Один из них использует идею агрегирования состояний цепи. Отметим, что использование этой идеи для расчета стационарного распределения ЦМ имеет долгую историю. В известной работе [2] (см. главу 6) показано, что агрегированный процесс будет марковским лишь тогда, когда для выбранного разбиения фазового пространства состояний (ФПС) исходной цепи сумма вероятностей переходов из состояний каждого класса в любой другой класс должна быть одинаковой для всех состояний исходного класса. Иными словами, класс агрегируемых ЦМ является достаточно узким. Несмотря на это, в дальнейшем эта идея использована в ряде других работ. Так, например, в работах [3–5] предполагается, что агрегированные состояния образуют такие классы, чтобы переходы (входы и выходы) между ними осуществлялись лишь через одно (фиксированное) состояние каждого класса состояний. Если удастся осуществить такое разбиение исходного ФПС, тогда предлагаются алгоритмы расчета стационарного распределения цепи.

Второй подход предназначен для расчета стационарного распределения почти полностью декомпозируемых цепей Маркова. Он использован, например,

в работах [6–8]. В них предполагается, что исходное ФПС цепи разбивается на классы, которые почти не связаны друг с другом, и с учетом этого факта предлагаются итеративные алгоритмы для решения поставленной проблемы. Третий подход предназначен для расчета стационарного распределения приближенно агрегируемых цепей Маркова. Он положен в основу метода Takahashi [9]. Отметим, что возможность применения последних двух подходов должна устанавливаться для каждой конкретной цепи. При этом проверка того, действительно ли изучаемая ЦМ является почти полностью декомпозируемой или приближенно агрегируемой, сама по себе является достаточно сложной проблемой, так как она требует нахождения всех собственных чисел матриц огромной размерности, которые зачастую являются плохо обусловленными.

Легко видеть, что практическое применение методов, предложенных в работах [3–9], требует от исследователя большой изобретательности при построении надлежащего разбиения ФПС изучаемой цепи Маркова. Сложность этой задачи особенно усугубляется при изучении многомерных цепей.

Достаточно подробный обзор работ, в которых используются указанные выше подходы, можно найти в [10–12].

Использованный нами метод базируется на теории фазового укрупнения состояний ЦМ, основы которой разработаны в начале 70-х годов прошлого века [13]. В указанной книге (с. 152–154) высказана идея необходимости разработки иерархического варианта алгоритма фазового укрупнения (АФУ) для борьбы с проблемой «тирании размерности» при вычислении стационарных распределений ЦМ большой размерности. Эта идея в течение длительного времени не была реализована на практике, и лишь начиная с 2000 годов, А.З. Меликов и Л.А. Пономаренко под руководством основоположника этой теории академика В.С. Королюка начали разработку подобных алгоритмов для двумерных цепей Маркова, которые успешно применены в конкретных моделях систем телетрафика [14, 15]. В последние годы указанный подход применяется и другими авторами, которые также указывают на высокую точность полученных результатов (см, например, [16–18]).

ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ PQIS С СЕРВЕРОМ НА «ПРОГУЛКЕ»

Изучаемая система имеет склад ограниченного объема S и содержит один сервер для обслуживания заявок. Входящий поток заявок является пуассоновским с интенсивностью λ , при этом поступившие заявки независимо от состояния сервера и уровня запасов системы принимаются в очередь и обслуживаются в порядке их поступления. Времена обслуживания заявок — независимые и одинаково распределенные случайные величины (с.в.) с общей показательной функцией распределения (ф.р.) со средним μ^{-1} , $\mu < \infty$.

Для простоты изложения предположим, что каждая заявка требует запас единичного размера, иными словами, после завершения обслуживания заявки уровень запасов на складе уменьшается на единицу. Уровень запасов также уменьшается в результате их порчи, т.е. каждая единица запаса независимо от остальных становится непригодной для использования после случайного времени, которое имеет показательную ф.р. с параметром γ , $\gamma > 0$. При этом предполагается, что запас, который уже находится на этапе выдачи по заявке, не может испортиться.

Пополнение запасами в системе осуществляется согласно политике двух уровней, т.е. (s, S) -политика, в которой вводится пороговая величина s , $s < S$, и если уровень запасов системы выше этой величины, то система не делает заказов для пополнения запасов. Когда уровень запасов системы становится равным s , отправляется заказ на поставку запасов объема $S - s$. Для исключения повторных заказов принимается, что $s < S/2$. Пополнение запасов выполняется с некоторой задержкой, т.е. время выполнения заказа — положительная с.в. с показа-

тельной ф.р., при этом его среднее значение зависит от статуса сервера, т.е. если заказ делается в период пребывания сервера на прогулке, то среднее время выполнения заказа равно ν_0^{-1} , иначе эта величина равна ν_1^{-1} .

Здесь рассматриваются модели с конечной и бесконечной очередью. В модели с конечной очередью предполагается, что поступившая заявка теряется с вероятностью единица, если в этот момент в системе уже имеются N заявок, $1 < N < \infty$. Вместе с тем, в модели с бесконечной очередью любая поступившая заявка принимается в очередь.

Предполагается, что если после завершения работы сервера в системе имеется хотя бы одна заявка, то при наличии запасов сервер немедленно выбирает одну из них для обслуживания. Вместе с тем, сервер уходит на прогулку независимо от уровня запасов системы, если после завершения обслуживания очередной заявки и/или в результате нетерпеливости заявок в системе нет ни одной заявки. Время пребывания сервера на прогулке является с.в. с показательной ф.р. со средним β^{-1} , $\beta < \infty$. После завершения прогулки сервер переходит в рабочий статус независимо от уровня запасов системы, если в очереди имеется не менее r заявок, $r \geq 1$. При этом, если в этот момент уровень запасов системы является положительной величиной, то сервер мгновенно начинает обслуживание заявок; иначе сервер опять уходит на прогулку с тем же законом пребывания на прогулке (многократная прогулка).

Заявки являются нетерпеливыми лишь во время их ожидания в очереди, т.е. заявка, которая находится в сервере, не уходит из системы, не получив обслуживание. Степень нетерпеливости заявок в очереди в общем случае зависит от статуса сервера, т.е. если сервер находится на прогулке, то допустимые времена ожидания в очереди заявок — независимые и одинаково распределенные с.в., имеющие показательную ф.р. со средним α_0^{-1} ; если сервер находится в рабочем статусе, то указанные с.в. имеют также показательную ф.р., но уже со средним α_1^{-1} . При этом, вообще говоря, $\alpha_0 \neq \alpha_1$.

Задача исследования состоит в нахождении совместного распределения уровня запасов системы, числа заявок в ней и статуса сервера. Ее решение позволит вычислить усредненные характеристики изучаемой системы: средний уровень запасов на складе (S_{av}); среднюю интенсивность порчи запасов системы (Γ_{av}); среднюю интенсивность заказов (RR); вероятность пребывания сервера на прогулке (P_{vac}); вероятность потери заявок (PL); среднюю интенсивность потери заявок из очереди из-за их нетерпеливости (RL_{av}). Определение указанных характеристик позволит выполнить стоимостный анализ системы.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ PQIS С СЕРВЕРОМ НА «ПРОГУЛКЕ»

Исходя из вида законов распределения с.в., использованных в формулировке модели, определяем, что вводимый стохастический процесс является трехмерной ЦМ (Three Dimensional Markov Chain, 3-D MC). Действительно, работа системы в произвольный момент времени описывается стохастическим процессом, состояние которого задается трехмерным вектором $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \theta)$, где первая и вторая компонента соответственно текущий уровень запасов и число заявок в системе, а третья бинарная компонента означает статус сервера, т.е.

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{если сервер находится на прогулке,} \\ 1, & \text{если сервер находится в рабочем состоянии.} \end{cases}$$

Вначале рассмотрим модель с конечной очередью, т.е. предположим, что максимальное число заявок в системе (включая заявки в сервере) равно N , $N < \infty$. В этом случае фазовое пространство состояний (ФПС) соответствующей

цепи обозначим E . Оно определяется таким образом:

$$E = E_0 \cup E_1, \quad E_0 \cap E_1 = \emptyset, \quad (1)$$

где $E_0 = \{n: n_1 = 0, 1, \dots, S; n_2 = 0, 1, \dots, N; \theta = 0\}$, $E_1 = \{n: n_1 = 0, 1, \dots, S; n_2 = 1, 2, \dots, N; \theta = 1\}$.

Из формулы (1) следует, что геометрически ФПС модели задается точками с целочисленными координатами, принадлежащими параллелепипедам высотой единица, основаниями которых являются прямоугольники со сторонами длиной N и S .

Для определения этой цепи необходимо найти ее производящую матрицу (Q -матрицу). Элементами этой матрицы являются интенсивности переходов между ее состояниями. Интенсивность перехода из состояния n в состояние n' обозначим $q(n, n')$, $n, n' \in S$.

Из описания изучаемой системы видно, что переходы между состояниями ФПС E связаны со следующими событиями: (i) поступлением заявок; (ii) завершением процесса их обслуживания; (iii) уходом заявок из очереди вследствие их нетерпеливости; (iv) завершением времени жизни запасов; (v) поступлением запасов; (vi) уходом сервера на прогулку; (vii) возвращением сервера из режима прогулки.

Для построения Q -матрицы с учетом механизма изменения уровня запасов и числа заявок в системе, а также схемы ухода сервера на прогулку и возвращения из этого режима целесообразно различать следующие случаи при определении исходного состояния $n \in E$: 1) $n \in E_0$; 2) $n \in E_1$.

Сначала рассмотрим случай $n \in E_0$. В этом случае выходы из данного состояния по причине событий типа (ii) и (vi) невозможны. Интенсивности выхода из этого состояния при остальных событиях определяются следующим образом. Если поступает некоторая заявка (события типа (i)), то она присоединяется к очереди при выполнении условия $n_2 < N$; иными словами, осуществляется переход из данного состояния в состояние $n + e_2 \in E_0$. Интенсивность такого перехода равна λ . Здесь и далее e_i означает i -й ортвектор трехмерного евклидова пространства, $i = 1, 2, 3$.

Если некоторая заявка уходит из очереди необслуженной (события типа (iii)), то происходит переход из данного состояния в состояние $n - e_2 \in E_0$; интенсивность такого перехода равна $n_2 \alpha_0$. По завершении времени жизни запаса (события типа (iv)) в состоянии $n \in E_0$, $n_1 > 0$, осуществляется переход в состояние $n - e_1 \in E_0$; интенсивность такого перехода равна $n_1 \gamma$. В момент поступления заказа из вышестоящего склада (события типа (v)) в состоянии $n \in E_0$, $n_1 \leq s$, происходит переход из этого состояния в состояние $n + (S - s)e_1 \in E_0$; интенсивность такого перехода равна ν_0 . Если в состоянии $n \in E_0$, $n_1 > 0$, $n_2 \geq r$, сервер возвращается из режима прогулки (события типа (vii)), то происходит переход из данного состояния в состояние $n + e_3 \in E_1$. Следовательно, для случаев исходного состояния $n \in E_0$, элементы Q -матрицы определяются так:

$$q(n, n') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } n' = n + e_2, \\ \beta, & \text{если } n_2 \geq r, n' = n + e_3, \\ n_1 \gamma, & \text{если } n' = n - e_1, \\ n_2 \alpha_0, & \text{если } n' = n - e_2, \\ \nu_0, & \text{если } n_1 \leq s, n' = n + (S - s)e_1. \end{cases} \quad (2)$$

Теперь рассмотрим случай $n \in E_1$. В этом случае выходы из данного состояния из-за событий типа (vii) невозможны, а интенсивности переходов для указанных выше событий типа (i), (iii) и (v) определяются аналогично соотношениям (2). Вместе с тем, поскольку запас, который находится на этапе выдачи по заявке, не может портиться, то здесь после завершения времени жизни запаса (события типа (iv)) в состоянии $n \in E_1$, $n_1 > 1$, осуществляется переход в состояние $n - e_1 \in E_1$ с интенсивностью $(n_1 - 1)\gamma$. Так как при $n_1 = 0$ невозможно выполнить

обслуживание заявок, то для определения следующего состояния после завершения обслуживания заявки (события типа (ii)) в состояниях $\mathbf{n} \in E_1, n_1 > 0$, необходимо различать следующие случаи: 1) $n_2 = 1$; 2) $n_2 \geq 2$. В случае 1) осуществляется переход в состояние $\mathbf{n} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \in E_0$, а в случае 2) следующим состоянием будет $\mathbf{n} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \in E_1$; в обоих случаях интенсивности переходов равны μ . Отметим, что здесь в случаях типа 1) происходит уход сервера на прогулку (события типа (vi)); уход сервера на прогулку также происходит из единственного состояния $(0, 1, 1) \in E_1$ из-за нетерпеливости заявки, т.е. переход в новое состояние $(0, 0, 0) \in E_0$ осуществляется с интенсивностью α_1 . Следовательно, для случаев исходного состояния $\mathbf{n} \in E_1$ элементы Q -матрицы определяются так:

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_2, \\ \mu, & \text{если } n_2 > 1, \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ & \text{или } n_2 = 1, \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ (n_1 - 1)\gamma, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_1, \\ (n_2 - 1)\alpha_1, & \text{если } n_1 > 0, n_2 > 1, \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_2, \\ n_2\alpha_1, & \text{если } n_1 = 0, n_2 > 1, \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_2 \\ & \text{или } n_1 = 0, n_2 = 1, \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \nu_1, & \text{если } n_1 \geq s, \mathbf{n}' = \mathbf{n} + (S - s)\mathbf{e}_1. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, математической моделью изучаемой системы является трехмерная цепь Маркова с ФПС (1), при этом элементы ее производящей матрицы определяются из соотношений (2) и (3).

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛИ PQIS С СЕРВЕРОМ НА «ПРОГУЛКЕ»

Пусть $p(\mathbf{n})$ означает стационарную вероятность состояния $\mathbf{n} \in E$ (существование стационарных вероятностей состояний построенной конечномерной 3-D МС вытекает из того, что она является неприводимой). Эти величины удовлетворяют системе уравнений равновесия (СУР), которая составляется на основе соотношений (2) и (3). Здесь не приводится явный вид этой СУР из-за очевидности ее составления и громоздкости.

Как уже упоминалось, характеристиками изучаемой PQIS являются следующие величины: средний уровень запасов на складе; средняя интенсивность порчи запасов системы; средняя интенсивность заказов; вероятность пребывания сервера на прогулке; вероятность потери заявок; средняя интенсивность потери заявок из очереди из-за их нетерпеливости. Эти характеристики определяются через вероятности состояний описанной 3-D МС с применением подхода, предложенного в [1].

Средний уровень запасов на складе вычисляется следующим образом:

$$S_{av} = \sum_{k=1}^S k \sum_{\mathbf{n} \in E} p(\mathbf{n}) \delta(n_1, k), \quad (4)$$

где $\delta(i, j)$ — символы Кронекера.

Поскольку запас, который находится на этапе выдачи по заявке, не может испортиться, имеем:

$$\Gamma_{av} = \gamma \left(\sum_{k=1}^S k \sum_{\mathbf{n} \in E_0} p(\mathbf{n}) \delta(n_1, k) + \sum_{k=2}^S (k-1) \sum_{\mathbf{n} \in E_1} p(\mathbf{n}) \delta(n_1, k) \right). \quad (5)$$

Вероятность пребывания сервера в режиме прогулки вычисляется следующим образом:

$$P_{vac} = \sum_{\mathbf{n} \in E_0} p(\mathbf{n}). \quad (6)$$

Используя формулы полной вероятности, находим, что вероятность потери заявок (PL) определяется так:

$$PL = P_{vac}PL_v + (1 - P_{vac})PL_s, \quad (7)$$

где PL_v — вероятность потери заявок, когда сервер находится в режиме прогулки, и PL_s — вероятность потери заявок, когда сервер находится в рабочем состоянии. Указанные величины состоят из двух слагаемых: вероятности потери заявок в моменты их поступления из-за переполнения буфера и вероятности потери заявок из очереди из-за их нетерпеливости. Иными словами, имеем:

$$PL_v = \sum_{\mathbf{n} \in E_0} p(\mathbf{n})(\delta(n_2, N) + (1 - \delta(n_2, N))P_0(n_1, n_2)), \quad (8)$$

где $P_0(n_1, n_2)$ — вероятность того, что в состоянии $(n_1, n_2, 0)$ заявка теряется из-за нетерпеливости;

$$PL_s = \sum_{\mathbf{n} \in E_1} p(\mathbf{n})(\delta(n_2, N) + (1 - \delta(n_2, N))P_1(n_1, n_2)), \quad (9)$$

где $P_1(n_1, n_2)$ — вероятность того, что в состоянии $(n_1, n_2, 1)$ заявка теряется из-за нетерпеливости.

Величины $P_k(n_1, n_2)$, $k = 0, 1$, в формулах (8) и (9) вычисляются следующим образом:

$$P_0(n_1, n_2) = \frac{n_2 \alpha_0}{n_2 \alpha_0 + \lambda I(n_2 < N) + n_1 \gamma},$$

$$P_1(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{n_2 \alpha_1}{n_2 \alpha_1 + \lambda}, & \text{если } n_1 = 0, 1 < n_2 < N, \\ \frac{(n_2 - 1) \alpha_1}{(n_2 - 1) \alpha_1 + \lambda + (n_1 - 1) \gamma I(n_1 > 1) + \mu}, & \text{если } n_1 > 0, 1 < n_2 < N, \end{cases}$$

где $I(A)$ — индикаторная функция события A .

Средняя интенсивность потери заявок из очереди из-за их нетерпеливости определяется так:

$$RL_{av} = \alpha_0 L_v + \alpha_1 L_s, \quad (10)$$

где L_v и L_s — среднее число заявок в очереди, когда сервер находится на прогулке и в рабочем состоянии соответственно, т.е.

$$L_v = \sum_{k=1}^N k \sum_{\mathbf{n} \in E_0} p(\mathbf{n}) \delta(n_2, k); \quad L_s = \sum_{k=2}^N (k-1) \sum_{\mathbf{n} \in E_1} p(\mathbf{n}) \delta(n_2, k).$$

В отличие от [1], здесь вводится новая характеристика системы — средняя интенсивность заказов для пополнения запасов (RR). Как описано выше, заказы формируются в следующих случаях: 1) если система находится в состояниях типа $\mathbf{n} \in E_0$, $n_1 = s+1$, и происходит порча запасов, и 2) если система находится в состояниях типа $\mathbf{n} \in E_1$, $n_1 = s+1$, и происходит уменьшение уровня запасов в результате порчи запасов либо в результате их отпуска по заявкам. Следовательно, указанная характеристика определяется так:

$$RR = \gamma(s+1) \sum_{\mathbf{n} \in E_0} p(\mathbf{n}) \delta(n_1, s+1) + (\mu + s\gamma) \sum_{\mathbf{n} \in E_1} p(\mathbf{n}) \delta(n_1, s+1). \quad (11)$$

Вследствие сложной структуры Q -матрицы применение известных численных методов для решения СУР изучаемой модели при большой размерности ФПС (1) влечет за собой огромные вычислительные трудности. В связи с этим ниже предлагается альтернативный путь решения данной проблемы, основанный на АФУ [1]. Кратко напомним особенности применения данного алгоритма к нашей системе.

На первом уровне иерархии вводится следующая функция укрупнения:

$$U(\mathbf{n}) = \langle \theta \rangle, \text{ если } \mathbf{n} \in E_\theta, \quad (12)$$

где $\langle \theta \rangle$ — укрупненное состояние, включающее все состояния из класса E_θ , $\theta = 0, 1$. Обозначим $\Omega = \{\langle \theta \rangle : \theta = 0, 1\}$. Тогда согласно АФУ вероятности состояний исходной модели определяются таким образом:

$$p(\mathbf{n}) \approx \rho_\theta(n_1, n_2) \pi(\langle \theta \rangle), \quad (13)$$

где $\rho_\theta(n_1, n_2)$ — вероятность состояния (n_1, n_2) внутри расщепленной модели с пространством состояний E_θ , $\pi(\langle \theta \rangle)$ — вероятность укрупненного состояния $\langle \theta \rangle \in \Omega$.

На втором уровне иерархии к каждому классу E_k , $k = 0, 1$, вновь применяется АФУ. При этом для корректного применения метода предполагается, что интенсивность поступления заявок существенно превосходит интенсивность порчи запасов системы, т.е. $\lambda \gg \gamma$. Отметим, что это допущение соответствует режиму работы реальных PQIS [1].

При выполнении указанного допущения в пространстве состояний E_0 рассматривается разбиение:

$$E_0 = \bigcup_{i=1}^S E_0^i, \quad E_0^i \cap E_0^j = \emptyset, \text{ если } i \neq j, \quad (14)$$

где $E_0^i = \{(n_1, n_2) \in E_0 : n_1 = i\}$, $i = 1, \dots, S$, т.е. класс состояний E_0^i включает те состояния из E_0 , в которых уровень запасов системы равен i независимо от числа заявок в очереди.

На этом уровне иерархии на основе расщепления (14) в пространстве состояний E_0 определяется следующая функция укрупнения:

$$U_0((n_1, n_2)) = \langle n_1 \rangle, \quad \text{если } (n_1, n_2) \in E_0^{n_1}, \quad (15)$$

где $\langle n_1 \rangle$ — укрупненное состояние, включающее все состояния из класса $E_0^{n_1}$.

Обозначим $\Omega_0 = \{\langle n_1 \rangle : i = 0, 1, \dots, S\}$.

Согласно АФУ имеем:

$$\rho_0(n_1, n_2) \approx \rho_0^{n_1}(n_2) \pi_0(\langle n_1 \rangle), \quad (16)$$

где $\rho_0^{n_1}(n_2)$ — вероятность состояния (n_1, n_2) внутри расщепленной модели с пространством состояний $E_0^{n_1}$, а $\pi_0(\langle n_1 \rangle)$ — вероятность укрупненного состояния $\langle n_1 \rangle \in \Omega_0$.

Поскольку в классе состояний E_0^i первая компонента является постоянной (она равна i), то микросостояние $(i, n_2) \in E_0^i$ задается второй компонентой $n_2, n_2 = 0, 1, \dots, N$. Интенсивности переходов между состояниями n_2 и n_2' расщепленной модели с ФПС E_0^i обозначим $q_0(n_2, n_2')$, Эти параметры определяются так:

$$q_0(n_2, n_2') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } n_2' = n_2 + 1, \\ n_2 \alpha_0, & \text{если } n_2' = n_2 - 1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (17)$$

Из соотношений (17) следует, что вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей с ФПС E_0^i , $i = 0, 1, \dots, S$, совпадают с вероятностями состояний модели Эрланга $M / M / N / 0$ с нагрузкой λ / α_0 erl., т.е.

$$\rho_0^i(n_2) = \frac{\sigma_0(n_2)}{\sum_{j=0}^N \sigma_0(j)}, \quad n_2 = 0, 1, \dots, N. \quad (18)$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения: $\sigma_k(j) = \frac{(\lambda/\alpha_k)^j}{j!}$, $k=0, 1$.

Замечание 1. Поскольку вероятности $\rho_0^i(n_2)$ не зависят от параметра i , то в дальнейшем верхний индекс у этих величин опускается.

Из (2) и (18) получаем, что интенсивности переходов $q_0(\langle i \rangle, \langle j \rangle)$, из укрупненного состояния $\langle i \rangle \in \Omega_0$ в другое укрупненное состояние $\langle j \rangle \in \Omega_0$ определяются так:

$$q_0(\langle i \rangle, \langle j \rangle) = \begin{cases} i\gamma, & \text{если } j = i - 1, \\ \nu_0, & \text{если } i \leq j, \quad j = i + S - s, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (19)$$

Таким образом, из соотношений (19) с учетом результатов работы [1] для вычисления вероятностей укрупненных состояний $\pi_0(\langle n_1 \rangle), \langle n_1 \rangle \in \Omega_0$, получаем следующие выражения:

$$\pi_0(\langle n_1 \rangle) = \begin{cases} a_{n_1}(0)\pi_0(\langle s+1 \rangle), & \text{если } 0 \leq n_1 \leq s, \\ b_{n_1}(0)\pi_0(\langle s+1 \rangle), & \text{если } s+1 \leq n_1 \leq S-s, \\ c_{n_1}(0)\pi_0(\langle s+1 \rangle), & \text{если } S-s+1 \leq n_1 \leq S, \end{cases} \quad (20)$$

где $a_{n_1}(0) = \prod_{i=n_1+1}^{s+1} \frac{i\gamma}{\nu_0 + (i-1)\gamma}$; $b_{n_1}(0) = \frac{s+1}{n_1}$; $c_{n_1}(0) = \frac{\nu_0}{n_1\gamma} \sum_{i=n_1-S+s}^s a_i(0)$.

Вероятность $\pi_0(\langle s+1 \rangle)$ вычисляется из условия нормировки, т.е.

$$\pi_0(\langle s+1 \rangle) = \left(\sum_{i=0}^s a_i(0) + \sum_{i=s+1}^{S-s} b_i(0) + \sum_{i=S-s+1}^S c_i(0) \right)^{-1}.$$

Исследуем расщепленную модель с ФПС E_1 . Аналогично (14) рассматривается разбиение:

$$E_1 = \bigcup_{i=0}^S E_1^i, \quad E_1^i \cap E_1^j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad (21)$$

где $E_1^i = \{(n_1, n_2) \in E_0 : n_1 = 0\}$, $i=0, 1, \dots, S$. Аналогично (14) здесь на основе расщепления (21) в пространстве состояний E_1 определяется следующая функция укрупнения:

$$U_1((n_1, n_2)) = \langle n_1 \rangle, \quad \text{если } (n_1, n_2) \in E_1^{n_1}, \quad (22)$$

где $\langle n_1 \rangle$ — укрупненное состояние, включающее все состояния из класса $E_1^{n_1}$.

Обозначим $\Omega_1 = \{\langle n_1 \rangle : i=0, 1, \dots, S\}$.

Отметим, что в отличие от расщепленной модели с ФПС E_0 , здесь вероятности состояний внутри расщепленной модели с ФПС E_1^0 и расщепленных моделей E_1^i , $i=1, \dots, S$, не совпадают. Вероятности состояний расщепленной модели с ФПС E_1^0 вычисляются так:

$$\rho_1^0(n_2) = \frac{\sigma_1(n_2-1)}{n_2 \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_1(j-1)}{j}}, \quad n_2 = 1, 2, \dots, N. \quad (23)$$

Вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей с ФПС E_1^i , $i=1, \dots, S$, вычисляются аналогично (не зависят от индекса i , $i=1, \dots, S$), т.е.

$$\rho_1^i(n_2) = \frac{\sigma_1(n_2-1)}{\sum_{j=0}^{N-1} \sigma_1(j)}, \quad n_2 = 1, 2, \dots, N. \quad (24)$$

С учетом (23), (24) находим, что интенсивности переходов $q_1(\langle i \rangle, \langle j \rangle)$ из укрупненного состояния $\langle i \rangle \in \Omega_1$ в укрупненное состояние $\langle j \rangle \in \Omega_1$ в данном случае вычисляются таким образом:

$$q_1(\langle i \rangle, \langle j \rangle) = \begin{cases} (i-1)\gamma + \mu(1-\rho_1^1(1)), & \text{если } j = i-1, \\ \nu_1, & \text{если } i \leq s, j = i+S-s, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (25)$$

Тогда из соотношений (25) с учетом результатов работы [1] для вычисления вероятностей укрупненных состояний $\pi_1(\langle n_1 \rangle), \langle n_1 \rangle \in \Omega_1$, получаем следующие выражения:

$$\pi_1(\langle n_1 \rangle) = \begin{cases} a_{n_1}(1)\pi_1(\langle s+1 \rangle), & \text{если } 0 \leq n_1 \leq s, \\ b_{n_1}(1)\pi_1(\langle s+1 \rangle), & \text{если } s+1 \leq n_1 \leq S-s, \\ c_{n_1}(1)\pi_1(\langle s+1 \rangle), & \text{если } S-s+1 \leq n_1 \leq S, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$a_{n_1}(1) = \prod_{i=n_1+1}^{s+1} \frac{\Lambda_i}{\nu_1 + \Lambda_{i-1}}, \quad b_{n_1}(1) = \frac{\Lambda_{s+1}}{\Lambda_{n_1}}, \quad c_{n_1}(1) = \frac{\nu_1}{\Lambda_{n_1}} \sum_{i=n_1-S+s}^s a_i(1),$$

$$\Lambda_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ (i-1)\gamma + \mu(1-\rho_1^1(1)), & 1 \leq i \leq S. \end{cases}$$

Вероятность $\pi_1(\langle s+1 \rangle)$ вычисляется из соответствующего условия нормировки, т.е.

$$\pi_1(\langle s+1 \rangle) = \left(\sum_{i=0}^s a_i(1) + \sum_{i=s+1}^{S-s} b_i(1) + \sum_{i=S-s+1}^S c_i(1) \right)^{-1}.$$

Интенсивности переходов между классами $E_k, k=0,1$, обозначим $q(\langle k \rangle, \langle k' \rangle)$. Эти параметры определяются так:

$$q(\langle k \rangle, \langle k' \rangle) = \begin{cases} \beta \sum_{i=r}^N \rho_0(i), & \text{если } k=0, k'=1, \\ \mu \rho_1^1(1)(1-\pi_1(\langle 0 \rangle)) + \alpha_1 \rho_1^0(1)\pi_1(\langle 0 \rangle), & \text{если } k=1, k'=0. \end{cases} \quad (27)$$

Из соотношений (27) легко вычисляются искомые вероятности $\pi(\langle k \rangle), \langle k \rangle \in \Omega$, т.е.

$$\pi(\langle 0 \rangle) = \frac{q(\langle 1 \rangle, \langle 0 \rangle)}{q(\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) + q(\langle 1 \rangle, \langle 0 \rangle)}, \quad \pi(\langle 1 \rangle) = 1 - \pi(\langle 0 \rangle).$$

Стационарные вероятности состояний исходной цепи определяются так [1]:

$$p(n_1, n_2, \theta) \approx \rho_\theta(n_2) \pi_\theta(\langle n_1 \rangle) \pi(\langle \theta \rangle). \quad (28)$$

Окончательно после определенных преобразований получаем следующие формулы для приближенного расчета характеристик изучаемой модели PQIS:

$$S_{av} \approx \sum_{i=0}^1 \pi(\langle i \rangle) \sum_{k=1}^S k \pi_i(\langle k \rangle); \quad (29)$$

$$\Gamma_{av} \approx \gamma \sum_{i=0}^1 \pi(\langle i \rangle) \sum_{k=i+1}^S (k-i) \pi_i(\langle k \rangle); \quad (30)$$

$$P_{vac} \approx \pi(\langle 0 \rangle); \quad (31)$$

$$PL_v \approx \pi(\langle 0 \rangle) \left(\rho_0(N) + \sum_{k=0}^S \pi_0(\langle k \rangle) \sum_{i=1}^{N-1} \rho_0(i) P_0(k, i) \right); \quad (32)$$

$$PL_s \approx \pi(\langle 1 \rangle) \left(\rho_1^0(N) \pi_1(\langle 0 \rangle) + \rho_1^1(N) (1 - \pi_1(\langle 0 \rangle)) + \sum_{k=0}^S \pi_1(\langle k \rangle) \sum_{i=2}^{N-1} \rho_1^k(i) P_1(k, i) \right); \quad (33)$$

$$RR \approx \gamma(s+1) \pi(\langle 0 \rangle) \pi_0(\langle s+1 \rangle) + (\mu + s\gamma) \pi(\langle 1 \rangle) \pi_1(\langle s+1 \rangle); \quad (34)$$

$$RL_{av} \approx \alpha_0 L_v + \alpha_1 L_s, \quad (35)$$

где

$$L_v = \pi(\langle 0 \rangle) \sum_{k=1}^N k \rho_0(k);$$

$$L_s = \pi(\langle 1 \rangle) \left(\sum_{k=2}^N (k-1) \rho_1^1(k) (1 - \pi_1(\langle 0 \rangle)) + \sum_{k=1}^N k \rho_1^0(k) \pi_1(\langle 0 \rangle) \right).$$

Теперь рассмотрим модель с бесконечной очередью расходуемых заявок, т.е. предположим, что $N = \infty$. В этом случае ФПС модели E также задается с помощью (1), но здесь классы состояний E_0 и E_1 являются бесконечномерными множествами, т.е. $E_0 = \{n: n_1 = 0, 1, \dots, S; n_2 = 0, 1, \dots; \theta = 0\}$, $E_1 = \{n: n_1 = 0, 1, \dots, S; n_2 = 1, 2, \dots; \theta = 1\}$.

Элементы Q -матрицы данной модели определяются аналогично соотношениям (2). Относительно характеристик модели отметим, что здесь невозможны потери заявок из-за переполнения буфера, но возможны потери из очереди из-за нетерпеливости заявок. Другие характеристики определяются из формул (4)–(8), (10) и (11), но при этом необходимо учитывать, что $N = \infty$.

Для вычисления приближенных значений стационарных вероятностей состояний данной модели также можно использовать описанный выше метод. Поскольку он достаточно подробно изложен для модели с конечным ФПС, ниже приводится лишь окончательный вид необходимых формул.

Так, в этом случае вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей с ФПС E_0^i , $i = 0, 1, \dots, S$, вычисляются как соответствующие вероятности состояний модели $M/M/\infty$ с нагрузкой $\lambda/\alpha_0 \text{ erl.}$, т.е.

$$\rho_0(i) = \sigma_0(i) e^{-\lambda/\alpha_0}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (36)$$

Вероятности укрупненных состояний $\pi_0(\langle n_1 \rangle)$, $\langle n_1 \rangle \in \Omega_0$, в данном случае также вычисляются с помощью соотношений (20).

После определенных преобразований получаем, что вероятности состояний расщепленной модели с ФПС E_1^0 и E_1^i , $i = 1, \dots, S$, в данном случае вычисляются так:

$$\rho_1^0(j) = \frac{\sigma_1(j-1)}{j} \frac{\lambda/\alpha_1}{e^{\lambda/\alpha_1} - 1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (37)$$

$$\rho_1^i(j) = \sigma_1(j-1) e^{-\lambda/\alpha_1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Замечание 2. При выводе формулы (37) учтено, что $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{j!} = \frac{e^x - 1}{x}$.

Вероятности укрупненных состояний $\pi_1(\langle n_1 \rangle)$, $\langle n_1 \rangle \in \Omega_1$, в данном случае также вычисляются с помощью соотношений (26), но при этом следует иметь в виду, что величина $\rho_1^1(1)$ определяется из формулы (38).

При вычислении вероятности укрупненных состояний $\pi(\langle k \rangle)$, $\langle k \rangle \in \Omega$, необходимо учитывать, что величина $q(\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)$ (см. формулы (27)) в данном слу-

чае определяется следующим образом:

$$q(\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) = \beta \left(1 - \sum_{i=0}^{r-1} \rho_0(i) \right).$$

Средний уровень ресурсов на складе, средняя интенсивность порчи запасов системы, вероятность пребывания сервера в режиме прогулки и средняя интенсивность заказов для пополнения запасов в данной модели вычисляются с помощью формул (29)–(32) соответственно. В данной модели вероятности потери заявок при условии нахождения сервера в прогулке и рабочем состоянии определяются так:

$$PL_v \approx \pi(\langle 0 \rangle) e^{-\lambda/\alpha_0} \sum_{k=0}^S \pi_0(\langle k \rangle) \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_0(i) P_0(k, i); \quad (39)$$

$$PL_s \approx \pi(\langle 1 \rangle) \left(\frac{\lambda/\alpha_1}{e^{\lambda/\alpha_1} - 1} \pi_1(\langle 0 \rangle) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\sigma_1(i-1)}{i} P_1(0, i) + e^{-\lambda/\alpha_1} \sum_{k=1}^S \pi_1(\langle k \rangle) \sum_{i=2}^{\infty} \sigma_1(i-1) P_1(k, i) \right). \quad (40)$$

После определенных преобразований находим, что среднее число заявок в очереди, когда сервер находится в режиме прогулки и в рабочем состоянии, вычисляются с помощью следующих формул:

$$L_v \approx \pi(\langle 0 \rangle) \frac{\lambda}{\alpha_0}; \quad L_s \approx \pi(\langle 1 \rangle) \frac{\lambda}{\alpha_1} e^{\lambda/\alpha_1} \left(1 - \pi_1(\langle 0 \rangle) \left(1 - \frac{1}{e^{\lambda/\alpha_1} - 1} \right) \right). \quad (41)$$

Далее с помощью (35) с учетом (41) вычисляется средняя интенсивность потери заявок из очереди из-за их нетерпеливости при различных статусах сервера.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Разработанные алгоритмы позволяют изучить поведение характеристик исследуемых систем относительно изменения как их нагрузочных, так и структурных параметров. Вследствие ограниченности объема статьи здесь приводятся результаты только для системы с ограниченной очередью. При этом для конкретности изложения изучается поведение характеристик исследуемых систем относительно изменения критического уровня запасов (s) и порогового значения длины очереди, при которой сервер, возвращающийся из режима прогулки, переходит в рабочий режим (r).

Сначала рассмотрим зависимости характеристик системы от параметра s . Входные параметры системы выбираем следующим образом [19]:

$$S = 50, \quad N = 200, \quad \lambda = 15, \quad \mu = 4, \quad \nu_0 = 4, \quad \nu_1 = 6, \quad \beta = 1.3, \quad \gamma = 1, \quad \alpha_0 = 2, \quad \alpha_1 = 1.$$

Заметим, что входные параметры удовлетворяют принятым выше условиям для корректного применения разработанного асимптотического метода, т.е. $\lambda \gg \max\{\beta, \gamma, \mu\}$.

Здесь приводятся результаты для двух различных значений параметра r , т.е. в первой серии экспериментов принимается, что $r = 5$, а во второй — $r = 20$. Результаты приведены на рис. 1–5, где обозначения \times и \circ соответствуют первой и второй серии экспериментов соответственно.

Как и следовало ожидать, функция S_{av} является неубывающей относительно увеличения критического уровня запасов (см. рис. 1). Вместе с тем, здесь на первый взгляд неожиданным является расположение графиков функции S_{av} при

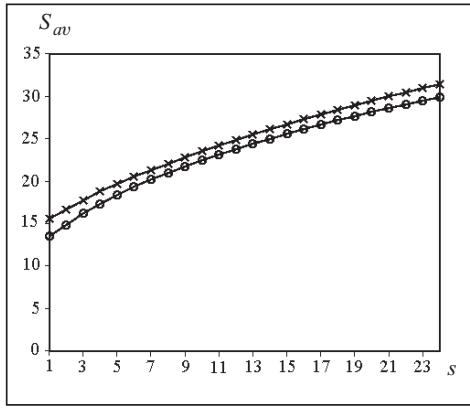


Рис. 1. Зависимость S_{av} от параметра s

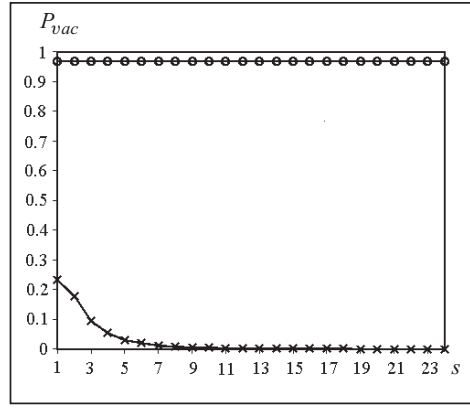


Рис. 2. Зависимость P_{vac} от параметра s

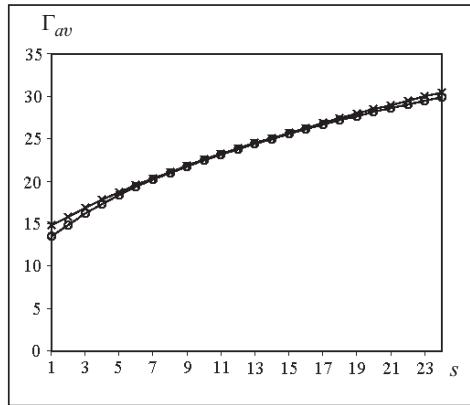


Рис. 3. Зависимость Γ_{av} от параметра s

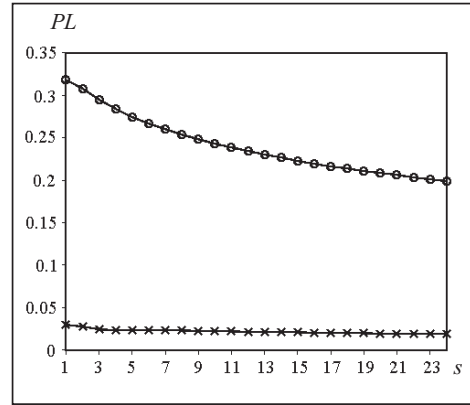


Рис. 4. Зависимость PL от параметра s

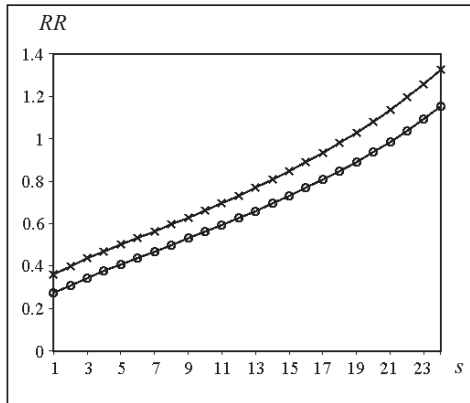


Рис. 5. Зависимость RR от параметра s

различных значениях параметра r , (см. рис. 1), т.е. из этих графиков видно, что чем меньше значения этого параметра, тем больше значения указанной функции. Иными словами, следовало ожидать, что чем раньше сервер после возвращения из режима прогулки переходит в рабочий режим (т.е. сервер включается в рабочий режим при малых значениях длины очереди заявок), тем интенсивнее будет обслуживаться очередь заявок, и, как следствие, меньшим должен быть средний уровень запасов. Однако здесь наблюдается обратная картина. Она объясняется тем, что для выбранных исходных данных (на которых основываются все последующие рассуждения) вероятность того, что сервер находится в режиме прогулки (P_{vac}), при $r = 20$ почти равна единице (см. рис. 2). Это — следствие того, что в этом случае $L_S \approx 0$, т.е. при $r = 20$ сервер почти всегда находится в режиме прогулки, т.е. не обслуживает заявки, поэтому средний уровень запасов во второй серии экспериментов оказывается меньшим, чем в первой серии экспериментов (в этой серии экспериментов $L_S \approx 1$).

С ростом критического уровня запасов функция Γ_{av} также растет (см. рис. 3), при этом значения этой функции в первой серии экспериментов оказываются чуть большими, чем во второй серии экспериментов (иногда почти совпадают с ними), так как средний уровень запасов в первой серии экспериментов оказывается большим, чем во второй серии экспериментов (см. рис. 1). Эти факты полностью соответствуют нашим ожиданиям.

Функция PL является убывающей относительно роста критического уровня запасов, при этом ее значения в первой серии экспериментов оказываются существенно меньшими, чем во второй серии экспериментов (см. рис. 4). Это объясняется тем, что при $r=20$ имеет место соотношение $P_{vac} \approx 1$ (см. также формулы (7)).

Функция RR является возрастающей относительно роста критического уровня запасов, при этом ее значения в первой серии экспериментов оказываются чуть большими, чем во второй серии экспериментов (см. рис. 5). Это объясняется тем, что чем выше значения критического уровня запасов, тем чаще уровень запасов системы оказывается равным $s+1$, при этом увеличение значения параметра r приводит к уменьшению значений этой функции (смотри комментарии к формуле (11)).

Теперь рассмотрим зависимости характеристик системы от параметра r . Здесь также приводятся результаты для двух различных значений параметра s , т.е. в первой серии экспериментов принимается, что $s=24$, а во второй — $s=12$. Результаты показаны на рис. 6–10, где обозначения \times и \circ соответствуют первой и второй серии экспериментов соответственно.

Здесь в обеих сериях экспериментов функция S_{av} является почти кусочно-постоянной относительно увеличения параметра r (см. рис. 6), при этом в пер-

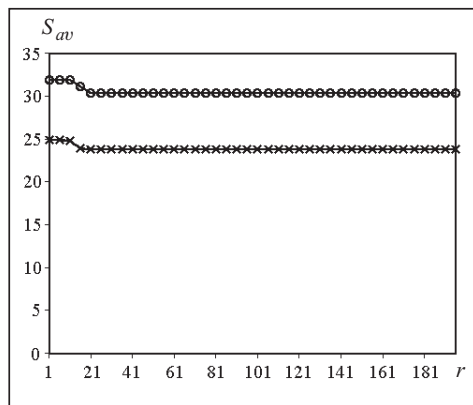


Рис. 6. Зависимость S_{av} от параметра r

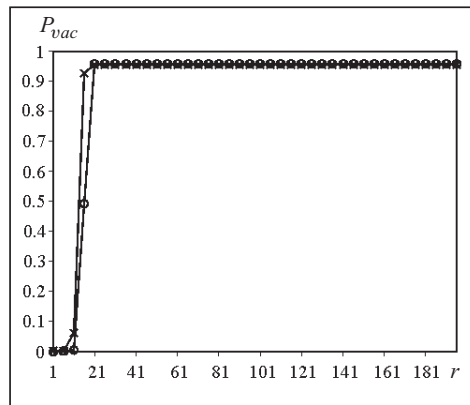


Рис. 7. Зависимость P_{vac} от параметра r

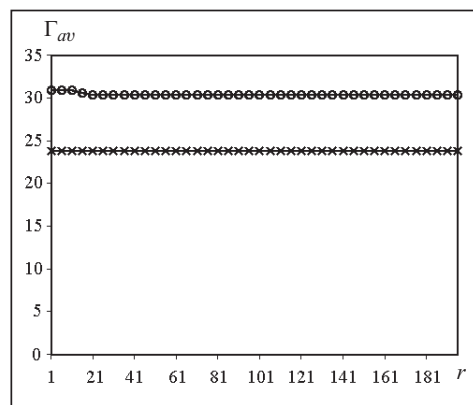


Рис. 8. Зависимость Γ_{av} от параметра r

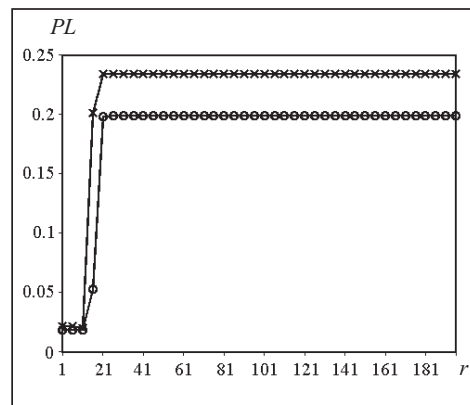


Рис. 9. Зависимость PL от параметра r

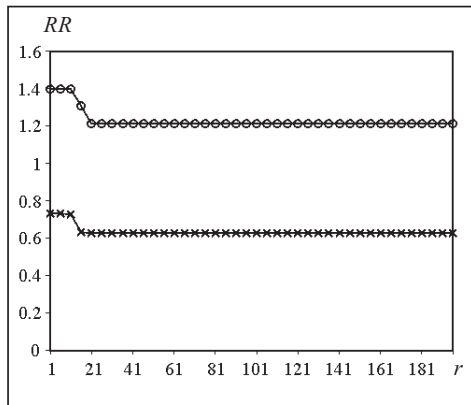


Рис. 10. Зависимость RR от параметра r

к единице (см. рис. 7). Это означает, что при больших значениях параметра r уровень запасов почти не уменьшается в результате их выдачи по заявкам, а интенсивность порчи запасов, как и следовало ожидать, почти не зависит от параметра r (см. рис. 8). То, что значения функции S_{av} в первой серии экспериментов больше, чем во второй серии экспериментов, имеет вполне логическое объяснение, т.е. чем выше критический уровень запасов, тем выше средний уровень запасов.

Здесь функция PL является неубывающей относительно увеличения параметра r , при этом ее значения в первой серии экспериментов оказываются чуть меньшими, чем во второй серии экспериментов (см. рис. 9). Функция RR является невозрастающей относительно увеличения параметра r , при этом ее значения в первой серии экспериментов оказываются почти в два раза большими, чем во второй серии экспериментов (см. рис. 10). Объяснение этого факта дано в комментарии к рис. 5.

В конце данного раздела отметим, что в модели с неограниченной очередью заявок в формулу для расчета вероятности потери заявок входят три бесконечных ряда (см. формулы (39) и (40)), и поэтому не удастся найти явные формулы для вычисления их суммы. Эти ряды сходятся, так как сходятся мажорантные ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_k(i)$, $k=0, 1$. Поэтому здесь используется метод отсечения хвоста ряда [20], т.е. верхние границы каждой суммы заменяются достаточно большими (конечными) величинами, далее они постепенно увеличиваются, и эта процедура продолжается до тех пор, пока значения соответствующих сумм практически перестают изменяться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучена модель системы обслуживания-запасания с одним сервером и скоропортящимися запасами, в которой нетерпеливые расходуемые заявки могут образовывать очереди ограниченной или неограниченной длины. В случае отсутствия очереди заявок сервер уходит на многократную прогулку с показательным временем пребывания в режиме прогулки, т.е. возвращающийся из режима прогулки сервер опять уходит на прогулку, если в этот момент число заявок в очереди ниже определенной пороговой величины. Изучены модели, в которых используется политика пополнения двух уровней, при этом предполагается, что время выполнения заказов является положительной с.в. с показательной ф.р. Разработаны точный и приближенный методы для определения характеристик изучаемых моделей, с их помощью проведены численные эксперименты.

вой серии экспериментов (при $r \leq 16$) имеем $S_{av} \approx 32$, а при $r > 16$ значение этой функции приблизительно равно 30; во второй серии экспериментов при $r \leq 16$ имеем $S_{av} \approx 24$, а при $r > 16$ значение этой функции приблизительно равно 23. Такой результат имеет следующее объяснение: на значения этой функции в основном влияют два фактора: вероятность нахождения сервера в рабочем состоянии (или в режиме прогулки) и интенсивность порчи запасов. Для выбранных исходных данных вероятность пребывания сервера в режиме прогулки при $r > 16$ очень близка

Предложенный приближенный метод позволяет изучать модели PQIS с другими политиками пополнения запасов и повторными заявками, с отсроченной и рабочей прогулками сервера и т.д., а также решать задачи их оптимизации. Такие задачи могут быть предметом дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Королюк В.С., Меликов А.З., Пономаренко Л.А., Рустамов А.М. Асимптотический анализ системы с сервером на «прогулке» и скоропортящимися запасами. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 4. С. 59–70.
2. Kemeny J.G., Snell J.L. *Finite Markov chains*. Princeton: University Press, 1960. 210 p.
3. Guardabassi G., Rinaldi S. The problems in Markov chains: A topological approach. *Operations Research*. 1970. Vol. 18, N 2. P. 324–333.
4. Feinberg B.N., Chiu S.S. A method to calculate steady-state distributions of large Markov chains by aggregating states. *Operations Research*. 1987. Vol. 35, Iss. 2. P. 282–290.
5. Kim D.S., Smith R.L. An exact aggregation/disaggregation algorithm for large scale Markov chain. *Naval Research Logistics*. 1995. Vol. 42, Iss. 7. P. 1115–1128.
6. Courtois P.J. *Decomposability — Queueing and computer system applications*. New York; London; San Francisco: Academic Press, 1977. 216 p.
7. Koury J.R., McAllister D.F., Stewart W.J. Iterative methods for computing stationary distribution of nearly completely decomposable Markov chains. *SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods*. 1984. Vol. 5, Iss. 2. P. 164–186.
8. Haviv M. Aggregation/disaggregation methods for computing the stationary distributions of a Markov chain. *SIAM J. on Numerical Analysis*. 1987. Vol. 24, Iss. 4. P. 952–966.
9. Stewart W.J. *Introduction to the numerical solution of Markov chains*. Princeton: University Press, 1994. 539 p.
10. Rogers D.F., Plante R. Estimating equilibrium probabilities for band diagonal Markov chains using aggregation and disaggregation techniques. *Computers & Operations Research*. 1993. Vol. 20, Iss. 8. P. 857–877.
11. Dianne P.O. Iterative methods for finding the stationary vector for Markov chain. IMA Preprint Series. 1992. N 932. 13 p.
12. Sumita U., Rieders M. Application of the replacement process approach for computing the ergodic probability vector of large scale row-continuous Markov chains. *J. of the Operations Research Society of Japan*. 1990. Vol. 33, Iss. 4. P. 279–307.
13. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Киев: Наук. думка. 1976. 184 с.
14. Ponomarenko L., Kim C.S., Melikov A. *Performance analysis and optimization of multi-traffic on communication networks*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 208 p.
15. Melikov A., Ponomarenko L. *Multi-dimensional queueing models in telecommunication networks*. Heidelberg: Springer, 2014. 204 p.
16. Liang C., Luh H. Optimal services for content delivery based on business priority. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*. 2013. Vol. 36, Iss. 4. P. 422–440.
17. Liang C., Luh H. Efficient method for solving a two-dimensional Markov chain model for call centers. *Industrial Management & Data Systems*. 2015. Vol. 115, Iss. 5. P. 901–922.
18. Haddad M.E., Belarbi F. Approximate analysis of an unreliable $M/M/c$ retrial queue with phase merging algorithm. *New Trends in Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 4, Iss. 3. P. 9–21.
19. Jajaraman B., Sivakumar B., Arivarignan G. A perishable inventory system with postponed demands and multiple server vacations. *Modeling and Simulation in Engineering* (Hindawi Publishing Corporation). Vol. 2012. Article ID 620960. 17 p.
20. Меликов А.З., Пономаренко Л.А., Багирова С.А. Марковские модели систем обслуживания-запасания с переменным объемом заказов. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 3. С. 49–66.

Надійшла до редакції 02.03.2017

В.С. Королюк, А.З. Меліков, Л.А. Пономаренко, А.М. Рустамов
МОДЕЛІ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ З ШВИДКОПСУВНИМИ ПРОДУКТАМИ
ТА СЕРВЕРОМ НА «ПРОГУЛЯНЦІ»

Анотація. Вивчено систему обслуговування-запасання з швидкопсувними продуктами, в якій після завершення обслуговування вимоги сервер йде на «прогулянку» за відсутності вимог у черзі, а після закінчення «прогулянки» береться за обслуговування нових вимог, якщо довжина їхньої черги перевищує певну встановлену величину; інакше сервер знову йде на «прогулянку». Розроблено точний і наближений методи розрахунку характеристик системи.

Ключові слова: система управління запасами, швидкопсувні продукти, «прогулянка» сервера.

V.S. Koroliuk, A.Z. Melikov, L.A. Ponomarenko, A.M. Rustamov
MODELS OF PERISHABLE QUEUEING-INVENTORY SYSTEMS WITH SERVER VACATIONS

Abstract. The model of perishable queueing-inventory system with server vacations is studied. Upon service completion, server takes vacation if there are no customers in the system and it starts to service at the end of the vacation if the number of customers in the system exceeds some threshold; otherwise, it takes new vacation. Exact and approximate methods to calculate the characteristics of the system are proposed.

Keywords: inventory control, perishable items, server vacation.

Королюк Владимир Семенович,

академик НАН України, професор, советник при дирекции Института математики НАН України, Киев, e-mail: vskorol@yahoo.com.

Меликов Агаси Зарбали оглы,

чл.-кор. НАН Азербайджана, доктор техн. наук, профессор, заведующий отделом Института систем управления НАН Азербайджана, Баку, e-mail: agassi.melikov@rambler.ru.

Пономаренко Леонид Анатольевич,

доктор техн. наук, профессор, главный научный сотрудник Международного научно-учебного центра информационных технологий и систем НАН Украины и МОН Украины, Киев, e-mail: laponomarenko@ukr.net.

Рустамов Анар Муршид оглы, кандидат техн. наук, доцент Бакинского инженерного университета, Азербайджан, e-mail: anar.rustamov@gmail.com.