СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

І.В. СЕРГІЄНКО, О.М. ЛИТВИН

УДК 519.6

НОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ ОПЕРАТОРИ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ (Огляд)

Анотація. Досліджено методи побудови математичних моделей процесів, явищ та об'єктів з використанням інформації про них в об'єктах, що узагальнюють точки (локуси), лінії (смуги в двовимірному випадку та туби в тривимірному випадку) та площини (шари). Одночасно з операторами інтерполяції запропоновано використовувати оператори інтерлокації; з операторами інтерлінації — оператори інтерстріпації та інтертубації; з операторами інтерфлетації — оператори інтерлаєризації.

Ключові слова: інтерлінація, інтерфлетація, інтерстріпація, інтертубація, інтерлокація, інтерлаєризація.

У 1637 році Рене Декарт опублікував книгу [1], у якій метод координат покладено в основу нової математичної дисципліни — аналітичної геометрії. Користуючись сучасною термінологією, можна сказати, що аналітична геометрія надає інструментарій математичного моделювання геометричних об'єктів, зокрема математичною моделлю точки на прямій є рівняння $x-a=0$, а математичною моделлю точки на площині — рівняння $(x-a)^2+(y-b)^2=0$.

Математичною моделлю лінії на площині Oxy є рівняння цієї лінії $y=f(x)$ або $x=g(y)$ у явній формі, або рівняння $f(x, y)=0$ в неявній формі, або два рівняння: $x=f(t),\ y=g(t),\ a \le t \le b$, у параметричній формі, де t — параметр.

Математичну модель поверхні в декартовій системі координат у явній формі можна записати одним з трьох рівнянь: $z=f(x, y)$, $y=g(x, z)$ або $x=h(y, z)$, та в неявній формі — рівнянням $f(x, y, z)=0$. У параметричній формі поверхню можна задати у вигляді трьох рівнянь: $z=f(u, v)$, $y=g(u, v)$, $x=h(u, v)$, де u, v — параметри. Аналогічно лінію у тривимірному евклідовому просторі можна записати у загальній формі у вигляді системи двох рівнянь: $f(x, y, z)=0$, $g(x, y, z)=0$, кожне з яких визначає одну з двох поверхонь, перетином яких є відповідна лінія. Математичною моделлю лінії у тривимірному просторі в параметричній формі є сукупність трьох рівнянь: $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$, $a \le t \le b$, де t — параметр.

Як відомо, деякі поверхні або лінії необов'язково представляти у декартовій системі координат. Інколи використовують полярні, циліндричні, сферичні, тороїдальні та інші системи координат.

Слід зазначити, що незважаючи на зручність використання різних систем координат при описі тих або інших ліній або поверхонь, на практиці не завжди є очевидним, яку систему координат можна використати в тому або іншому конкретному випадку. Як приклад, наведемо практично важливу задачу побудови математичної моделі поверхні або лінії за допомогою системи точок на цій лінії або поверхні. Інший приклад: треба побудувати неявне рівняння поверхні за допомогою неявних рівнянь деякої системи поверхонь, з частин яких складається основна поверхня. В останньому прикладі інформацію про поверхню задають не в окремих точках, а рівняннями поверхонь, об'єднанням яких є досліджувана поверхня. Метод, що використовує таку інформацію, запропонований і розвинутий у працях В.Л. Рвачова та його учнів, називається методом R-функцій [2]. Основу цього методу складають такі R-функції:

$$x \wedge_\alpha y = 0.5\,(x + y - \sqrt{x^2 + 2\alpha xy + y^2}\,),$$

$$x \vee_\alpha y = 0.5\,(x + y + \sqrt{x^2 + 2\alpha xy + y^2}\,),$$

$$\bar{x} = -x.$$

Вони замінюють операції алгебри логіки $x \wedge y$, $x \vee y$, $\bar{x}$ у логічній формулі, яка описує задану складну область у вигляді об'єднань та перетинів відомих областей D_i, заданих нерівностями $w_i(x, y, z) \geq 0$, $i = \overline{1, M}$.

Зауважимо, що нескінченна множина елементарних підобластей, які вивчають в аналітичній геометрії, а також множина різноманітних складних областей, опис яких можна виконати у вигляді нерівностей методом R-функцій, є підмножинами всієї множини областей, які вимагає практика. Крім того, сучасна практика конструювання поверхонь часто використовує інформацію про поверхню у заданій системі точок, розміщених за деяким законом або довільним чином. У результаті для наближеного представлення функції, що описує деякий процес, явище або об'єкт, виникає відома задача інтерполяції. Якщо об'єктом конструювання є поверхня, то крім координат точок на ній можна використовувати також нові інформаційні оператори. Наприклад, можна вимагати, щоб функція $f(x, y)$, яка описує відновлювану поверхню $\Sigma: z = f(x, y)$, зберігала ізогеометричні властивості — була неперервною і мала неперервні частинні похідні першого та другого порядків, монотонно зростала або спадала в деяких підобластях області задання, була опуклою або увігнутою в деяких підобластях області задання, деякі точки, лінії або частини відомих поверхонь повинні належати конструйованій поверхні тощо.

Знімки з космічних апаратів підтвердили форму планети Земля, математична модель якої була використана для побудови її фізичної моделі — глобуса. Але важливо зазначити, що для математичного моделювання ця поверхня була розділена на локуси [3] — частини поверхні: океани, моря, материки, острови тощо. Важливою особливістю таких інформаційних операторів, які використовують для математичного моделювання, є не тільки їхня величезна кількість, але і їхня різна щільність у різних локусах. Наприклад, для відновлення поверхні океану або моря з прийнятною для практики точністю у вигляді функції $r = f(\varphi, \theta, t, c_1, \ldots, c_M)$ кількість M параметрів $c_1, \ldots, c_M$ може бути незначною навіть при врахуванні періодичних припливів і відпливів, пов'язаних з силою тяжіння Місяця. Таким чином, виникає задача відновлення поверхні за допомогою інформаційних операторів, які характеризують зображення поверхні на відомих її частинах. Інколи можна розглядати випадок, коли на деяких локусах інформація про досліджувану поверхню невідома або відома лише в деяких точках чи на деяких лініях. У цьому випадку маємо інформаційні оператори, в яких інформацію про поверхню задають на підмножинах розмірності 0 (точках), розмірності 1 (лініях), розмірності 2 (поверхнях).

Якщо інформаційні оператори представлено множинами пар (лінія, слід функції двох змінних, що описує досліджувану поверхню на вказаній лінії), то метод відновлення поверхні дна моря або океану можна побудувати на основі використання інтерлінації функцій [4]. Яскравим прикладом такої задачі є відновлення поверхні дна моря або океану за даними про рельєф дна, які отримано на курсах корабля з гідролокатором. Така задача картографування виникає в різних частинах планети після чергового урагану і має важливе практичне значення для безпеки судноплавства. Оскільки на цей час системи навігації GPS використовують дані, які отримані за допомогою інформації, що надходить з штучних супутників планети і дозволяє з високою точністю фіксувати координати корабля, то разом з даними з гідролокатора отримуємо високоточну інформацію про геометричне розміщення лінії — курсів корабля і відповідні їм сліди — рельєфи дна під цими курсами корабля з гідролокатором. Оскільки рельєф дна моря або океану, як правило, досить гладкий, то він під кожним курсом корабля може бути описаний функціями з обмеженою кількістю параметрів поліномів алгебраїчних, тригонометричних; сплайнів; вейвлетів тощо. У цьому випадку можна отримати значне стиснення інформації про ці функції відповідно до їхніх графіків, зроблених самописом гідролокатора.

Інший важливий приклад надає збір та оброблення даних, отриманих метеорологічними станціями. Якість прогнозування температури, тиску, швидкості вітру, кількості опадів у вигляді дощу, граду, снігу, відносної вологості тощо істотно залежить від щільності розміщення мережі метеорологічних станцій на планеті в цілому і в досліджуваному регіоні зокрема. Точність прогнозу також істотно залежить від кількості та висоти шарів повітря, у яких вимірюють потрібні параметри. Для підтвердження цього достатньо зазначити, що вибір місця розміщення вітрових електростанцій і висоти над поверхнею осі обертання лопатей вітряків та їхньої довжини істотно впливає на потужність електростанції. Якщо інформація про вказані вище параметри отримується кожною метеорологічною станцією з різними кроками по висоті над поверхнею, то її обсяг істотно залежатиме від кроку, з яким відраховують різні висоти при зборі даних за допомогою метеорологічних зондів. Очевидно, що зберігання такої величезної кількості даних вимагає великого обсягу пам'яті і багато часу для їхнього оброблення. Тому доцільно, з нашої точки зору, групувати експериментальні дані, розбиваючи увесь простір над поверхнею на підобласті. Ці підобласті можуть бути наперед невідомими, і їхнє визначення диктують експериментальні дані. Наприклад, ці області можуть бути шарами атмосфери, у яких швидкість вітру найбільша. Оскільки на різних висотах швидкість вітру може бути різною, доцільно експериментальні дані, отримані в кожному з шарів повітря над досліджуваною областю, замінити деякими формулами, які з потрібною точністю характеризують напрям повітряного потоку, а також швидкість його переміщення. Таким чином, виникає задача інтерлаєризації (тобто відновлення, від англ. layer — шар). У цьому випадку кількість функцій, які описують швидкість руху в різних шарах, може бути різною, але для свого зберігання ці функції вимагатимуть значно меншого обсягу пам'яті.

Аналогічно можна описати температуру течії Гольфстрім в Атлантичному океані, умовно вважаючи цю течію повністю розміщеною у деякій трубі із змінними боковими стінками. Якщо вважати, що радіоактивне пальне на атомних електростанціях розміщене в твелах — геометричних об'єктах у вигляді труб деякого діаметра, то дослідження і аналіз температури між вказаними твелами можна виконати за допомогою операторів інтертубації (англ. tube — труба) — відновлення температури між твелами — трубами, якщо вона відома в цих твелах, трубах.

Сформулюємо загальну стратегію, яка лежить в основі отримання даних для побудови нових інформаційних операторів, запропонованих у цій статті.

1. Точки в тривимірному просторі, які описуються рівняннями $w_k^2(x, y, z) \equiv \equiv (x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2 = 0$, $k = \overline{1, M}$, замінюються локусами, описаними нерівностями $w_k(x, y, z) \le R_k(x, y, z)$, $k = \overline{1, M}$. При цьому деяку досліджувану функцію $f(x, y, z)$, що описує відповідну характеристику явища, процесу або предмету, потрібно відновити за допомогою значень у вказаній системі точок або за допомогою слідів на вказаній системі локусів.

2. Систему ліній $\Gamma_k : y = f_k(x)$ або $w_k(x, y) = 0$, або $x = \varphi_k(t)$, $y = \psi_k(t)$, $a \le t \le b$, $k = \overline{1, M}$, замінюють системою смуг $D_k : (y - f_k(x))^2 \le c_k^2$ або $(w_k(x, y) - - c_k)^2 \le 0$, або $(x - \varphi_k(t))^2 + (y - \psi_k(t))^2 \le c_k^2$, $k = \overline{1, M}$, у двовимірному випадку.

Якщо на кожному з таких об’єктів задано функцію $f(x, y, z)$, яку треба відновити за допомогою вказаної інформації між цими геометричними об’єктами, то отримуємо інтерполяцію, інтерлінацію, інтерстріпацію [5] у двовимірному випадку; інтерполяцію, інтерлінацію, інтерфлетацію, інтерлокацію, інтерлаєризацію, інтертубацію — в тривимірному випадку.

Інтертубацію можна використати для опису процесу розповсюдження тепла між твелами, якщо в кожному із твелів атомної електростанції, розміщених у басейні з водою, задано температуру. Цей випадок пов’язаний з розповсюдженням частинок, що виникають після розпаду радіоактивних речовин з виділенням тепла, і він відрізняється від випадку, коли для вказаних туб задано інформацію про об’єкт, який не змінює навколишнє середовище, наприклад у цих тубах задають дані з кернів свердловин, які отримано після буріння кори планети у напрямку вказаних ліній — туб.

Інша ситуація виникає, коли в точках ліній або поверхонь, або шарів, або смуг задають інформацію про характеристику об’єкта, яка не впливає на навколишнє середовище, наприклад на смугах, отриманих за допомогою дистанційного зондування Землі, зображують висоту або освітленість поверхні Землі над рівнем океану. Тоді задача інтерстріпації полягає у відновленні рельєфу поверхні між смугами за допомогою відомих рельєфів поверхні на смугах.

Для зручності опишемо типи вказаних операторів в табл. 1, 2.

Детальніше зупинимось на напрямку математичного оброблення багатовимірних масивів даних, які вимагають спеціальних методів цифрового оброблення (аерокосмічне зондування, комп’ютерна та сейсмічна томографія).

З появою літаків та штучних супутників з’явився новий тип інформації — аерофотознімки та знімки зі штучного супутника планети. На основі такої інформації побудовано карту невидимої поверхні Місяця, карту поверхні Венери, прихованої за щільним шаром атмосфери тощо. Загальна кількість таких знімків складає сотні тисяч, до того ж не можна застосовувати для їхнього оброблення класичні методи, які не враховують геометричного розміщення частин поверхні, зображених на знімках вздовж смуг, що відповідають траєкторії штучного супутника. Урахування цієї інформації може бути виконане з використанням методу інтерстріпації функцій двох змінних [6].

Детальніше зупинимось на інтерстріпації між системою вертикальних та горизонтальних смуг. Вважаємо, що зображення поверхні Σ відоме лише на системі m $(m \ge 2)$ вертикальних смуг вигляду

$$D_{1,k} = \{\alpha_k \le x \le \beta_k,\ y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}]\},\ k = \overline{1, m},$$

та на системі $n\,(n \ge 2)$ горизонтальних смуг вигляду

$$D_{2,l} = \{\gamma_l \le y \le \delta_l,\ x \in [\alpha_1, \beta_{m+1}]\},\ l = \overline{1, n}.$$

Введемо позначення: $\overline{D}_{1,k} = R^2 \setminus D_{1,k}$, $k = \overline{1, m}$, $\overline{D}_{2,l} = R^2 \setminus D_{2,l}$, $l = \overline{1, n}$. Тоді об’єднання множин $D_{1,k}$, $k = \overline{1, m}$, та $D_{2,l}$, $l = \overline{1, n}$, утворює область $\overline{D}$ незаповнених ділянок зображення. У точках зображення D, які не потрапили до $\overline{D}$, зберігається вся наявна інформація про зображення.

Поверхня Σ: $z = f(x, y)$, $f(x, y) \in C^{N,N}(R^2)$, яку ми хочемо відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах, тобто

$$f(x, y)|_{\alpha_k \le x \le \beta_k} = f_{1,k}(x, y),\ \alpha_k \le x \le \beta_k,\ \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1},$$
$$f(x, y)|_{\gamma_l \le y \le \delta_l} = f_{2,l}(x, y),\ \gamma_l \le y \le \delta_l,\ \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}.$$

При цьому

$$\alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1} < \beta_{k+1},\ k = \overline{1, m},\ \gamma_l < \delta_l < \gamma_{l+1} < \delta_{l+1},\ l = \overline{1, n};$$

$C^{N,N}(R^2)$ — клас функцій, які мають неперервні похідні $f^{(p,q)}(x, y)$ для $0 < p,\ q \le N$.

Т а б л и ц я 1. Типи 2D інформації про функцію $f(x, y)$

Тип геометричного об'єкта	**Спосіб задання**	**Інформація про задану функцію**	**Оператор відновлення $f(x, y)$**
Точка	$(x-a)^2+(y-b)^2=0$	$f(a,b)$ — значення $f(x, y)$ у точці (a, b) та значення її похідних до порядку $0 \le s+p \le n$ у точці (a, b)	Оператор Тейлора
Система точок (x_k, y_k), $k=\overline{1, M}$	$(x-x_k)^2+(y-y_k)^2=0$	Значення функції $f(x_k, y_k)$, $k=\overline{1, M}$, та значення її похідних $f^{(p,s)}(x_k, y_k)$, $0 \le p+s \le n$, до порядку $0 \le s+p \le n$ в точках (x_k, y_k)	Інтерполяція Лагранжа для $n=0$ та інтерполяція Ерміта для $n \ge 1$
Лінія	$y=y(x)$, явне задання лінії	Слід $f(x, y(x))$ функції $f(x, y)$ на вкааній лінії	Узагальнена формула Тейлора в околі лінії
	$w(x, y)=0$, неявне задання лінії	Слід $f(x, y)\|_{w(x, y)=0}$ функції $f(x, y)$ на вказаній лінії	
	$x=u(t)$, $y=v(t)$, параметричне задання лінії	Слід $f(x(t), y(t))$ функції $f(x, y)$ на вказаній лінії	
Система ліній	$y=y_k(x)$, $k=\overline{1, M}$, явне задання ліній	Сліди $f^{(p,s)}(x, y_k(x))$, $0 \le p+s \le n$, функції $f(x, y)$ та її частинних похідних або інших диференціальних операторів на заданій системі ліній до заданого порядку	Інтерлінація Лагранжа $(n=0)$ та інтерлінація Ерміта $(n \ge 1)$
	$w_k(x, y)=0$, $k=\overline{1, M}$, неявне задання ліній	Сліди $f(x, y)\|_{w_k(x, y)=0}$, $k=\overline{1, M}$, функції $f(x, y)$ на системі ліній	
	$x=u_k(t)$, $y=v_k(t)$, параметричне задання ліній	Сліди $f(x_k(t), y_k(t))$, $k=\overline{1, M}$, функції $f(x, y)$ на системі ліній	
Система локусів	$w_k(x, y) \ge 0$, $k=\overline{1, M}$	Сліди $f^{(p,s)}(x, y)\|_{w_k(x,y) \le R_k(x,y)}$, $0 \le p+s \le n$, функції $f(x, y)$ та її частинних похідних на множинах $w_k(x, y) \le R_k$, $k=\overline{1, M}$	Інтерлокація лагранжевого типу для $n=0$ та ермітового типу для $n \ge 1$ на системі локусів
Система смуг	$\Pi_k : \alpha_k \le w_k(x, y) \le \beta_k$, $k=\overline{1, M}$	Сліди $f^{(p,s)}(x, y)\|_{\Pi_k}$, $0 \le p+s \le n$, функції $f(x, y)$ та її частинних похідних на системі смуг Π_k, $k=\overline{1, M}$	Інтерстріпація лагранжевого типу для $n=0$ та ермітового типу для $n \ge 1$

Введемо до розгляду такі оператори:

$$L_1 f(x, y)=\begin{cases} f_{1,k}(x, y), & \alpha_k \le x \le \beta_k,\ \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1}, \\ E_{1,k,k+1} f(x, y), & \beta_k \le x \le \alpha_{k+1},\ 1 \le k \le m-1; \end{cases}$$

Таблиця 2. Типи 3D інформації про функцію $f(x, y, z)$

Тип геометричного об'єкта	**Спосіб задання**	**Інформація про задану функцію**	**Оператор відновлення $f(x, y, z)$**
Точка (a, b, c)	$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$	$f^{(p,s,r)}(a,b,c)$ — значення функції та її похідних у точці (a, b, c) функції $f(x, y, z)$ та значення її похідних до порядку $0 \le s+p+r \le n$ у точці (a, b, c)	Відновлення $f(x, y, z)$ за допомогою полінома Тейлора степеня n
Система точок (x_k, y_k, z_k), $k=\overline{1, M}$	$(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2 = 0$	Значення функції $f(x_k, y_k, z_k)$, $k=\overline{1, M}$, та значення її похідних $f^{(p,s,r)}(x_k, y_k, z_k)$, $0 \le p+s+r \le n$, в точках (x_k, y_k, z_k)	Інтерполяція Лагранжа для $n=0$ та інтерполяція Ерміта для $n \ge 1$
Система ліній	$\Gamma : w_1(x, y, z) = 0$, $w_2(x, y, z) = 0$. Загальне задання ліній — перетину двох поверхонь	Сліди $f(x, y, z)\vert_\Gamma$ функції $f(x, y, z)$ на лінії	Інтерлінація Лагранжа для $n=0$ та інтерлінація Ерміта для $n \ge 1$
	$x = u_k(t)$, $y = v_k(t)$, $z = w_k(t)$, $k=\overline{1, M}$, $a \le t \le b$. Параметричне задання системи ліній	Сліди $f^{(p,s,r)}(u_k(t), v_k(t), w_k(t))$, $k=\overline{1, M}$, $0 \le p+s+r \le n$, функції $f(x, y, z)$ та її частинних похідних	
Система локусів	$w_k(x, y, z) \ge 0$, $k=\overline{1, M}$	Сліди $f^{(p,s,r)}(x, y, z)\vert_{w_k(x,y,z)=0}$, $0 \le p+s+r \le n$, функції $f(x, y, z)$ та її частинних похідних або інших диференціальних операторів	Інтерлокація лагранжевого типу для $n=0$ та ермітового типу для $n \ge 1$ на системі локусів
Система туб	$\Pi_k : (x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 \le R_k^2(z)$, $k=\overline{1, M}$, $z=\overline{a, b}$	Сліди $f^{(p,s,r)}(x, y, z)\vert_{\Pi_k}$, $0 \le p+s+r \le n$, функції $f(x, y, z)$ та її частинних похідних на системі туб Π_k	Інтертубація лагранжевого типу для $n=0$ та ермітового типу для $n \ge 1$
Система шарів	$L_k : u_k(x, y) \le z \le v_k(x, y)$, $(x, y) \in R^2$, $k=\overline{1, M}$, $u_k(x, y) < v_k(x, y) < u_{k+1}(x, y) < v_{k+1}(x, y) < \ldots < u_M(x, y) < v_M(x, y)$	Сліди $f^{(p,s,r)}(x, y, z)\vert_{L_k}$, $0 \le p+s+r \le n$, функції $f(x, y, z)\vert_{L_k}$ та її частинних похідних	Інтерлаєризація лагранжевого типу для $n=0$ та ермітового типу для $n \ge 1$

$$L_2 f(x, y) = \begin{cases} f_{2,l}(x, y), & \gamma_l \le y \le \delta_l, \ \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}, \\ E_{2,l,l+1} f(x, y), & \delta_l \le y \le \gamma_{l+1}, \ 1 \le l \le n-1; \end{cases}$$

$$L_{1,2} f(x, y) = \begin{cases} f_{1,k}(x, y), & (x, y) \in \overline{D}_{1,k}, \ k=\overline{1, m}, \\ f_{2,l}(x, y), & (x, y) \in \overline{D}_{2,l}, \ l=\overline{1, n}, \\ E_{1,2,k,l} f(x, y), & (x, y) \in D, \end{cases}$$

де

$$E_{1,2,k,l}f(x,y)=[E_{1,k,k+1}+E_{2,l,l+1}-E_{1,k,k+1}E_{2,l,l+1}]\,f(x,y),$$

$$E_{1,k,k+1}f(x,y)=\sum_{s=0}^{N}[f^{(s,0)}(\beta_k,y)\,\ell_{1,k,s}(x)+f^{(s,0)}(\alpha_{k+1},y)\,\ell_{2,k+1,s}(x)],$$

$$E_{2,l,l+1}f(x,y)=\sum_{p=0}^{N}[f^{(0,p)}(x,\delta_l)\,\ell_{2,l,p}(y)+f^{(0,p)}(x,\gamma_{l+1})\ell_{2,l+1,p}(y)],$$

$$\ell_{1,k,s}(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}(x-x_j)^N\,\frac{(x-x_k)^s}{s!}\left\{1/\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}(x-x_j)^N\right\}_{(x_k)}^{N-s-1},$$

$$\ell_{2,l,p}(y)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n}(y-y_i)^N\,\frac{(y-y_l)^p}{p!}\left\{1/\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n}(y-y_i)^N\right\}_{(y_l)}^{N-p-1}.$$

Тут $E_{1,k,k+1}f(x,y)$, $E_{2,l,l+1}f(x,y)$ та $E_{1,2,k,l}f(x,y)$ — оператори двовимірної інтерполяції Ерміта, $\ell_{1,k,s}(x)$ та $\ell_{2,l,p}(y)$ — поліноми Ерміта.

У випадку, якщо відома інформація лише на системі горизонтальних смуг, то згідно з [6] поверхня $z=L_2f(x,y)$ є наближеною математичною моделлю поверхні Σ, яка на кожній смузі $D_{2,l}$, $l=\overline{1,n}$, точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $E_{2,l,l+1}f(x,y)$, $l=\overline{1,n-1}$. Аналогічно для випадку вертикальних смуг згідно з [6] поверхня $z=L_1f(x,y)$ є наближеною математичною моделлю поверхні Σ, яка на кожній смузі $D_{1,k}$, $k=\overline{1,m}$, точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $E_{1,k,k+1}f(x,y)$, $k=\overline{1,m-1}$. У випадку, коли інформація про поверхню відома на системі взаємно перпендикулярних смуг, наближеною математичною моделлю поверхні Σ згідно з [6] є поверхня $z=L_{1,2}f(x,y)$.

Наведені вище оператори інтерстріпації описано для функцій двох змінних, які мають неперервні похідні до порядку N включно. При обробленні двовимірних сигналів застосовують інтерстріпацію Лагранжа вигляду:

$$E_{1,k,k+1}f(x,y)=\frac{x-\beta_k}{\alpha_{k+1}-\beta_k}f(\alpha_{k+1},y)+\frac{x-\alpha_{k+1}}{\beta_k-\alpha_{k+1}}f(\beta_k,y),$$

$$E_{2,l,l+1}f(x,y)=\frac{y-\delta_l}{\gamma_{l+1}-\delta_l}f(x,\gamma_{l+1})+\frac{y-\gamma_{l+1}}{\delta_l-\gamma_{l+1}}f(x,\delta_l),$$

$$E_{1,2,k,l}f(x,y)=[E_{1,k,k+1}+E_{2,l,l+1}-E_{1,k,k+1}\mathrm{E}_{2,l,l+1}]f(x,y)=$$
$$=\frac{x-\beta_k}{\alpha_{k+1}-\beta_k}f(\alpha_{k+1},y)+\frac{x-\alpha_{k+1}}{\beta_k-\alpha_{k+1}}f(\beta_k,y)+\frac{y-\delta_l}{\gamma_{l+1}-\delta_l}f(x,\gamma_{l+1})+$$
$$+\frac{y-\gamma_{l+1}}{\delta_l-\gamma_{l+1}}f(x,\delta_l)-\frac{x-\beta_k}{\alpha_{k+1}-\beta_k}\frac{y-\delta_l}{\gamma_{l+1}-\delta_l}f(\alpha_{k+1},\gamma_{l+1})-$$
$$-\frac{x-\beta_k}{\alpha_{k+1}-\beta_k}\frac{y-\gamma_{l+1}}{\delta_l-\gamma_{l+1}}f(\alpha_{k+1},\delta_l)-\frac{x-\alpha_{k+1}}{\beta_k-\alpha_{k+1}}\frac{y-\delta_l}{\gamma_{l+1}-\delta_l}f(\beta_k,\gamma_{l+1})-$$
$$-\frac{x-\alpha_{k+1}}{\beta_k-\alpha_{k+1}}\frac{y-\gamma_{l+1}}{\delta_l-\gamma_{l+1}}f(\beta_k,\delta_l).$$

У роботах авторів Литвина О.М. та Славіка О.В. наведено оператори інтерстріпації для відновлення зображення за неповною інформацією із врахуванням шуму вхідного сигналу [7, 8], на системі смуг із криволінійними границями [9], на системі смуг, розташованих під довільним кутом [10], та на системі смуг, розташованих під довільним кутом із врахуванням інформації про структуру поверхні на відомих областях [11].

Слід зазначити, що на цей час у світі існує низка методів для відновлення пошкоджених зображень (inpainting), які можна умовно поділити на такі групи [12]: текстурні, шаблонні, основані на рівняннях в частинних похідних, гібридні та швидкі напівавтоматичні.

Текстурні методи відновлення зображень. Методи цієї групи для заповнення невідомої області безпосередньо використовують пікселі з відомої області зображення. Особливість цих алгоритмів полягає в забезпеченні неперервності на границі відомої області [12]. У роботах [13, 14] запропоновано методи текстурного відновлення зображення, які відрізняються способом відновлення різних кольорів, інтенсивності, градієнта та навіть статистичних характеристик.

Шаблонні методи відновлення зображень. Основна ідея роботи алгоритмів цього класу базується на припущені про наявність повторюваних фрагментів даних на зображенні, які зазвичай називаються шаблонами. Відновлення області виконується частинами шляхом копіювання значень яскравості з найбільш схожого шаблону. Невідома область може містити як текстурну, так і структурну інформацію. У роботі [15] показано, що для досягнення більш високого рівня відновлення необхідно вміти знаходити та відрізняти структурну та текстурну складові з метою відновлення в першу чергу саме структурної складової. У роботі [16] запропоновано ітераційний алгоритм для заповнення невідомої області. Особливо виокремимо роботу [17], де на відміну від усіх інших досліджень для заповнення пошкодженої області використано базу даних зображень, яка містить мільйони зображень-шаблонів для відновлення.

Методи відновлення зображень, які базуються на рівняннях з частинними похідними. Метод вперше було запропоновано в роботі [18], де відновлення даних невідомої області здійснюється за допомогою даних, що є природним продовженням інформації, яка міститься у відомій області зображення. Цей підхід став основою для наступних робіт. Так, наприклад, в роботі [19] було запропоновано алгоритм анізотропної вектор-регуляризації.

Гібридні методи відновлення зображень. Методи цього класу являють собою поєднання двох класів методів, а саме текстурних методів та методів, які основані на використанні диференціальних рівнянь з частинними похідними. Основна ідея алгоритму полягає в тому, що перш за все виділяють текстурну та структурну складові зображення. Потім відповідні алгоритми заповнюють ці складові.

Швидкі напівавтоматичні методи відновлення зображення. Недоліком більшості наведених вище методів є їхня висока обчислювальна складність, тому в деяких дослідженнях застосовують алгоритми для прискорення обчислень. У роботі [20] описано метод відновлення зображення за допомогою виділеної структури. Автори роботи [21] запропонували відновлення зображення з використанням ітеративної згортки зображення з дифузним ядром.

Зауважимо, що згідно із наведеною вище класифікацією операторів відновлення образів за допомогою інформації у частинах, де образ відомий, метод інтерстріпації функцій можна зарахувати до текстурних.

Зазначимо також новий тип інформації, який широко застосовують при дослідженні явищ, процесів, предметів і який пов'язують з використанням проекцій — інтегралів від невідомої функції вздовж заданої системи ліній [22–27]. Особливо слід наголосити, що новими інформаційними операторами можуть бути такі, які використовують проекції, томограми, що надходять з комп'ютерного томографа, або рентгенівські знімки внутрішньої структури тривимірного тіла, які отримують у взаємно перпендикулярних напрямках [28].

Важливим кроком у подальшому використанні нових інформаційних операторів для цифрового оброблення багатовимірних даних є застосування проекцій для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох та трьох змінних в [29–32]. Ці роботи визначають новий науковий напрямок у побудові кубатурних формул з використанням проекцій.

Нові інформаційні оператори в розвідці корисних копалин. Загальновідомим методом розвідки та дослідження родовищ корисних копалин є метод сейсмічної томографії [33–38], в якому запропоновано використовувати дані сейсмічної томографії як на поверхні планети, так і в системі свердловин. Ці дані можуть значно покращити результативність сейсморозвідки.

Таким чином, у цій роботі запропоновано огляд робіт, присвячених використанню нових інформаційних операторів для побудови наближувальних операторів функцій багатьох змінних (включаючи оператори інтерполяції, інтерлінації, інтерфлетації, як окремий випадок). Це такі оператори:

— інтерлокації, які відновлюють функції двох змінних між системою локусів — системою неперетинних відрізків у одновимірному випадку або системою обмежених неперетинних областей, що складаються із заданої системи точок у випадку наближення функції більшого числа змінних;

— інтерстріпації, які відновлюють функції двох змінних між системою смуг, використовуючи інформацію про наближувану функцію, задану лише в точках смуг;

— інтерлаєризації, які відновлюють наближувану функцію трьох змінних між шарами за допомогою інформації про неї лише в точках вказаної системи шарів;

— інтертубації, які відновлюють функції трьох змінних у точках між заданою системою туб, взагалі кажучи, змінного діаметру за допомогою інформації про цю функцію, задану лише в точках вказаних туб.

Зауважимо, що класифікація вказаних інформаційних операторів є умовною у тому розумінні, що запропоноване у цій статті математичне означення локусів, смуг, туб, шарів можна задати в однотипному вигляді $w_k(x, y) \ge 0$, $k = \overline{1, m}$, або $w_k(x, y, z) \ge 0$, $k = \overline{1, m}$. Але на практиці важливо мати на увазі, що у випадку локусів відповідні нерівності будуть визначати обмежені двовимірні або тривимірні області, що є узагальненням кругів та куль. У випадку смуг відповідні нерівності можуть описувати як обмежені, так і необмежені двовимірні області, які є узагальненнями звичайних смуг зі змінною шириною $y_k(x) - c(x) \le y \le y_k(x) + c(x)$, $-\infty < x < +\infty$. У випадку туб ці нерівності можуть описувати як обмежені, так і необмежені тривимірні області, які є відповідними узагальненнями циліндрів зі сталими та змінними вздовж осі діаметрами.

Зауваження 1. При математичному моделюванні можуть виникнути випадки, коли інформацію про досліджуване явище, процес або об'єкт задають у вигляді вектор-функції за відомою лише в точках різної геометричної структури (наприклад, на поверхні планети і в системі похилих свердловин можна задавати інформацію про сейсмічні коливання, а математична модель повинна відновити коливання в точках між свердловинами в довільний момент часу t).

Зауваження 2. При математичному моделюванні структури 3D-тіла, яка може змінюватися з часом, інформаційними операторами можуть бути математичні моделі 3D-тіла у різні моменти часу або навіть математичні моделі його окремих частин, отримані, зокрема, за допомогою комп'ютерного томографа.

Зауваження 3. Важливу роль в математичному моделюванні відіграє інформація про аналітичний опис форми об'єкта (об'єктів). Наприклад, якщо ми знаємо аналітичний опис руки людини, яка складається з м'язів, кісток з відомим поперечним перерізом тощо, то для побудови математичної моделі руки реальної людини потрібно буде всього декілька проекцій. Цей факт широко використовують у малоракурсній комп'ютерній томографії (наприклад, при відновленні структури полум'я або при відновленні 3D-структури деяких об'єктів на митниці за допомогою проникального опромінення у двох або трьох взаємно перпендикулярних напрямах).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Декарт Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. Москва: URSS, 2010. 296 с.
2. Рвачов В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Техніка, 1967. 213 с.
3. Уваров Р.О. Інтерлокаційні формули RFM та їх реалізація в системах POLYE: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. Ін-т проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. Харків, 2002. 20 с.
4. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків: Основа, 2002. 544 с.
5. Литвин О.Н., Сергиенко И.В. Методы аппроксимации функций и современные компьютерные технологии. *Кибернетика и системный анализ*. 2007. № 1. С. 64–81.
6. Литвин О.Н., Матвеева С.Ю. Обработка аэрокосмических снимков с помощью интерстрипации функций двух переменных. *Проблемы управления и информатики*. 2013. № 2. С. 111–124.
7. Литвин О.М., Литвин О.О., Лісний Г.Д., Славік О.В. Відновлення зображень в зонах відсутності попіксельної інформації з використанням інтерстріпації функцій. *Біоніка інтелекту*. 2016. № 2. С. 88–93.
8. Литвин О.М., Литвин О.О., Лісний Г.Д., Славік О.В. Новий метод відновлення зображень в зонах відсутності попіксельної інформації. *Управляющие системы и машины*. 2017. № 1. С. 46–58.
9. Литвин О.М., Литвин О.О., Славік О.В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі неперервних смуг з криволінійними границями. *Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: Тези доповідей IV науково-технічної конференції*, 2016. С. 21–24.
10. Литвин О.М., Славік О.В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі перетенних смуг, розташованих під довільним кутом. *Вісник Запорізького національного університету. Сер. Фізико-математичні науки*. 2016. № 2. С. 175–182.
11. Литвин О.М., Славік О.В. Застосування узагальненої інтерстріпації функцій двох змінних для відновлення зображення поверхні. *Інформатика та системні науки: Матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю*, 2017. С. 180–182.
12. Joshua J., Darsan G. Digital inpainting techniques — a survey. *International Journal of Latest Research in Engineering and Technology*. 2016. Vol. 2. P. 34–36.
13. Heeger D.J., Bergen J.R. Pyramid-based texture analysis (synthesis). *Proc. of ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH).* 1995. Vol. 29. P. 229–233.
14. Yamauchi H., Haber J., Seidel H. Image restoration using multiresolution texture synthesis and image inpainting. *Computer Graphics International* (CGI). 2003. P. 120–125.
15. Criminisi A., Perez P., Toyama K. Region filling and object removal by exemplar-based inpainting. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2004. Vol. 13, N 9. P. 1200–1212.
16. Drori I., Cohen-Or D., Yeshurun H. Fragment-based image completion. *Proc. of ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH)*. 2003. Vol. 22. P. 303–312.
17. Hays J., Efros A. Scene completion using millions of photographs. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*. 2007. Vol. 26, N 3. P. 87–94.
18. Bertalmio M., Sapiro G., Caselles V., Ballester C. Image inpainting. *Proc. of ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH)*, 2000. P. 417–424.
19. Tschumperl D., Deriche R. Vector-valued image regularization with PDE's. *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.* 2005. Vol. 27, N 4. P. 506–517.
20. Sun J., Yuan L., Jia J., Shum H. Image completion with structure propagation. *Proc. of ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH)*. 2005. Vol. 24. P. 861–868.
21. Oliviera M., Bowen B., McKenna R., Chang Y.-S. Fast digital image inpainting. *Proc. of Int. Conf. on Visualization, Imaging and Image Processing*. 2001. P. 261–266.
22. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. Москва: Мир, 1990. 288 с.
23. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографии. Москва: Мир, 1983. 352 с.
24. Терещенко С.А. Методы вычислительной томографии. Москва: Физматлит, 2004. 320 с.
25. Левин Г.Г., Вишняков Г.Н. Оптическая томография. Москва: Радио и связь, 1989. 224 с.
26. Сергієнко І.В., Литвин О.М., Першина Ю.І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетації функцій. Харків: ХНУРЕ, 2008. 160 с.
27. Першина Ю.І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетації функцій: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. ХНУРЕ. Харків, 2007. 20 с.

28. Литвин О.О. Математичне моделювання в малоракурсній комп'ютерній томографії на основі інтерлінації та мішаної апроксимації функцій: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. Київ, 2008. 20 с.
29. Gottlieb D., Gustafsson B. On the direct Fourier method for computer tomography. Sweden: Uppsala Univ., 1998. 207 p.
30. Литвин О.М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язування плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії. *Вестник Харьковского национального политехнического университета.* 2000. Т. 125. С. 27–35.
31. Кулік С.І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. ХНУРЕ. Харків, 2009. 20 с.
32. Кулік С.І., Литвин О.М. Мішана вейвлет-апроксимація Хаара функцій трьох змінних. *Вестник Харьковского национального политехнического университета*. 2012. № 2. С. 115–122.
33. Боганик Г.Н., Гурвич И.И. Сейсморазведка. Тверь: АИС, 2006. 744 с.
34. Анциферов А.В. Теория и практика шахтной сейсморазведки. Донецк: Алан, 2003. 311 с.
35. Nolet G. A breviary of seismic tomography. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. 344 p.
36. Иванссон С. Межскважинная томография на проходящих волнах. Москва: Мир, 1990. 415 с.
37. Сергиенко И.В., Дейнека В.С., Литвин О.Н., Литвин О.О. Метод интерлинации вектор-функций $\vec{w}(x, y, z, t)$ на системе вертикальных прямых и его применение в межскважинной сейсмической томографии. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 3. С. 61–73.
38. Литвин О.О. Математична модель вектора прискорення за його слідами в сейсморозвідці. *Доповіді Національної академії наук України.* 2016. № 11. С. 24–27.

Надійшла до редакції 29.06.2017

И.В. Сергиенко, О.Н. Литвин

НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ (Обзор)

Аннотация. Исследуются методы построения математических моделей процессов, явлений и объектов с использованием информации о них в объектах, которые обобщают точки (локусы), линии (полосы в двумерном случае и тубы в трехмерном случае) и плоскости (слои). Одновременно с операторами интерполяции предлагается использовать операторы интерлокации; с операторами интерлинации — операторы интерстрипации и интертубации; с операторами интерфлетации — операторы интерлайеризации.

Ключевые слова: интерлинация, интерфлетация, интерстрипация, интертубация, интерлокация, интерлайеризация.

I.V. Sergienko, O.M. Lytvyn

NEW INFORMATION OPERATORS IN MATHEMATICAL MODELING (Review)

Abstract. The methods of constructing mathematical models of processes, phenomena, and objects with the use of information about them in objects summarizing points (locuses), lines (strips in two-dimensional case and tubes in three-dimensional case) and planes (layers) are investigated. It is suggested to use interlocation operators simultaneously with interpolation operators; operators of interstripation and intertubation with operators of interlination; and interlayerization with operators of interflatation.

Keywords: interlination, interflatation, interstripation, intertubation, interlocation, interlayerization.

Сергієнко Іван Васильович,
академік НАН України, професор, директор Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: aik@public.icyb.kiev.ua.

Литвин Олег Миколайович,
доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: academ_mail@ukr.net.