УДК 519.87

И.В. КОЗИН, Н.К. МАКСИШКО, В.А. ПЕРЕПЕЛИЦА

ФРАГМЕНТАРНЫЕ СТРУКТУРЫ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Аннотация. Представлен комбинаторный объект — фрагментарная структура, и исследованы свойства этого объекта. Показано, что ряд задач дискретной оптимизации можно рассматривать как задачи оптимизации на фрагментарной структуре. При этом задача оптимизации сводится к задаче безусловной комбинаторной оптимизации на множестве перестановок. Предложены варианты алгоритмов поиска приближенных решений для оптимизационных задач, имеющих фрагментарную структуру.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, фрагментарная структура, локальный алгоритм, эволюционный алгоритм, муравьиный алгоритм.

ВВЕДЕНИЕ

Для многих классов задач дискретной оптимизации неизвестны алгоритмы отыскания точного решения с полиномиальной трудоемкостью. Поэтому представляют интерес алгоритмы поиска приближенных решений с невысокой вычислительной сложностью. Наиболее простыми алгоритмами такого вида являются различные варианты жадных (greedy) алгоритмов.

Понятие жадного алгоритма впервые определено в работах Уитни [1]. Для матроидов этот простой алгоритм всегда приводит к оптимальному решению задачи. Расширением понятия матроида являются гридоиды [2] и наследственные системы [3]. Причем в последних жадный алгоритм не всегда приводит к точному решению задачи оптимизации. В общем случае решение, которое можно получить, применеяя жадный алгоритм, может быть сколь угодно далеким от оптимального. Однако комбинация жадного алгоритма со стохастическими методами позволяет получать приближенные решения, достаточно близкие к оптимальным при сравнительно низких вычислительных затратах.

В настоящей статье предлагается описание фрагментарных структур, для которых применимо понятие жадного алгоритма, и задач оптимизации на них. Показано, что множество задач дискретной оптимизации можно представить в виде оптимизационных задач на фрагментарных структурах. Это дает возможность создания класса комбинированных алгоритмов отыскания приближенных решений оптимизационных задач с низкой вычислительной сложностью.

1. ФРАГМЕНТАРНЫЕ СТРУКТУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Определение 1. Фрагментарной структурой (X, E) на конечном множестве X называется семейство его подмножеств $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, где $E_i \subset X$ такое, что $\forall E_i \in E,\ E_i \neq \varnothing\ \exists\, e \in E_i,\ E_i \setminus \{e\} \in E$.

Элементы из множества E будем называть допустимыми фрагментами. Одноэлементные допустимые фрагменты называются элементарными фрагментами. Допустимый фрагмент будем называть максимальным, если он не является подмножеством ни одного из допустимых фрагментов. Очевидно, что пустое множество есть допустимый фрагмент. Каждую фрагментарную структуру можно представить в виде ациклического ориентированного графа, вершины которого соответствуют допустимым фрагментам, две вершины соединены ребром, если соответствующие допустимые фрагменты отличаются на один элемент. Примеры таких графов приведены на рис. 1

Всякий максимальный фрагмент можно построить из пустого множества, последовательно добавляя к нему элементы таким образом, чтобы на каждом шаге этой процедуры полученное подмножество было допустимым фрагментом.

© И.В. Козин, Н.К. Максишко, В.А. Перепелица, 2017

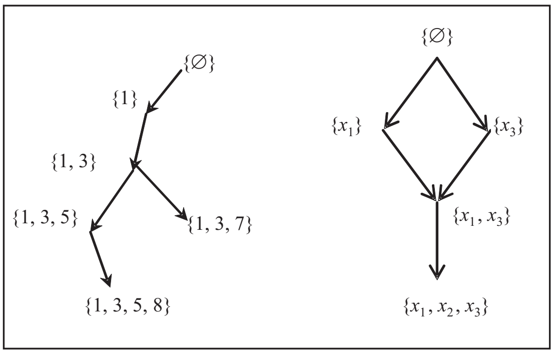

Рис. 1. Графы, представляющие фрагментарную структуру

Приведем алгоритм построения максимального фрагмента.

1. На начальном шаге выбирается пустое множество $X_0 = \varnothing$.

2. На шаге с номером $k+1$ выбирается любой элемент $x \in X \setminus X_k$, удовлетворяющий условию присоединения $X_k \bigcup \{x\} \in E$.

3. Алгоритм заканчивает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент $x \in X \setminus X_k$ с требуемым свойством.

Теорема 1. Если $\forall A \in E$ и $\forall x \in X$ существует алгоритм полиномиальной трудоемкости по числу элементов множества X для проверки условия присоединения $A \bigcup \{x\} \in E$, то задача построения максимального фрагмента является полиномиально разрешимой.

Разумеется, результат работы алгоритма зависит от выбора элементов на каждом шаге. Для однозначного результата достаточно определить некоторый линейный порядок на множестве X и на шаге 2 алгоритма выбирать первый по этому порядку элемент, который удовлетворяет условию присоединения.

Алгоритм отыскания максимального фрагмента в фрагментарной структуре при заданном упорядочении элементов в дальнейшем будем называть фрагментарным алгоритмом.

Определение 2. Упорядоченной фрагментарной структурой на множестве $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ будем называть семейство E последовательностей $\{(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})\}$ элементов множества X таких, что если $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) \in E$, то и любая ее начальная подпоследовательность $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$, $m \le k$, также принадлежит E. Соответственно элементы упорядоченной фрагментарной структуры будем называть упорядоченными фрагментами.

С каждой фрагментарной структурой можно связать множество различных упорядоченных фрагментарных структур. Для упорядоченной фрагментарной структуры результат работы фрагментарного алгоритма определен однозначно. Таким образом, задается отображение множества перестановок S_n из n элементов во множество максимальных фрагментов заданной фрагментарной структуры. Такое отображение (в дальнейшем будем его называть накрывающим) сюръективно, т.е. каждый максимальный фрагмент является образом некоторой перестановки.

2. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ НА ФРАГМЕНТАРНОЙ СТРУКТУРЕ

Пусть задана фрагментарная структура $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ на конечном множестве X. Пусть определена монотонная по включению функция — критерий $f : E \to R^1$, которая каждому допустимому фрагменту ставит в соответствие некоторое вещественное число, т.е. $\forall E_i, E_j \in E$ из условия $E_i \subseteq E_j$ следует, что $f(E_i) \le f(E_j)$ (или $f(E_i) \ge f(E_j)$). Задача оптимизации на фрагментарной структуре заключается в отыскании допустимого фрагмента с максимальным (или минимальным) значением критерия. Очевидно, оптимальным решением этой задачи будет один из максимальных фрагментов. По крайней мере, максимальный фрагмент всегда имеется среди оптимальных решений. Отметим, что условие максимальности фрагмента может быть обязательным в задаче оптимизации и без дополнительных предположений о целевой функции.

Из результатов разд. 1 следует, что любую задачу оптимизации на фрагментарной структуре можно свести к комбинаторной задаче оптимизации на множестве перестановок.

3. ДИСКРЕТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ФРАГМЕНТАРНОЙ СТРУКТУРЕ

Множество классов задач дискретной оптимизации можно рассматривать как оптимизационные задачи на фрагментарной структуре, а именно следующие задачи: покрытие графов типовыми подграфами [4]; грациозная нумерация деревьев [5]; линейный и прямоугольный раскрой [6]; упаковка пентамино [7]; однослойная и многослойная трассировка [8, 9]; землепользование [10]; теория расписаний [11]; булево программирование и др. Рассмотрим некоторые из них подробнее.

Задача землепользования. Данная задача сводится к задаче о реберном покрытии типовыми подграфами, в которой носителем являетсят двудольный граф $G=(V,E)$, $V=V_1\bigcup V_2$, $V_1\bigcap V_2=\varnothing$, $|V_1|\le|V_2|$, а типовыми подграфами — любые звезды (иногда ребра). Каждая вершина из множества вершин V_1 соответствует типу сельскохозяйственной культуры, а каждая вершина из множества вершин V_2 — участку. Множество допустимых решений $X=\{x\,|\,x=(V_x,E_x),\ E_x\subseteq E\}$ — все возможные покрытия графа звездами. Качество допустимого решения $x\in X$ оценивается векторной целевой функцией $F(x)=(F_1(x),F_2(x),\ldots,F_N(x))$, где некоторые критерии принадлежат классу аддитивных критериев MINSUM: $F_\nu(x)=\sum\limits_{e\in E_x}w_\nu(e)\to\min$, $\nu=1,2,\ldots,N_1$, $N_1\le N$, а остальные — классу MINMAX: $F_\nu(x)=\max w_\nu(e)\to\min$, $\nu=N_1+1,\ldots,N$.

Приведенную задачу можно рассматривать как задачу оптимизации на фрагментарной структуре. Каждый элементарный фрагмент представляется ориентированным ребром двудольного графа, первый конец которого принадлежит первой доле (типы культур), а второй конец — второй доле (участки) графа модели. Условие присоединения: второй конец выбранного ребра не совпадает ни с одним из вторых концов уже выбранных ребер. При таком представлении любое оптимальное решение задачи соответствует некоторому максимальному фрагменту и, следовательно, определяется некоторой перестановкой.

Задача классификации объектов. Пусть задано конечное множество объектов $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$ и определена мера различия между ними. Эта мера задается симметричной матрицей $D=\{d_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$, причем $d_{ij}\ge 0$, $d_{ij}=d_{ji}$, $d_{ii}=0$, $i,j=1,2,\ldots,N$. Каждый элемент матрицы d_{ij} определяет различие между соответствующими объектами. Задача классификации [12] состоит в разбиении множества объектов на k непустых попарно непересекающихся классов $X=X_1\bigcup X_2\bigcup\ldots\bigcup X_k$, $X_i\bigcap X_j=\varnothing$, $X_i\ne\varnothing$ $\forall\, i\ne j$, $i,j=1,2,\ldots N$. Диаметром класса X_s будем называть число $\delta_s=\max\limits_{x_i,x_j\in X_s}d_{ij}$, $s=1,2,\ldots,k$. Оптимальной классификацией называется такое разбиение множества X, при котором диаметр разбиения $\Delta=\max\limits_{s=1,2,\ldots,k}\delta_s$ минимален.

Покажем, что задачу классификации можно рассматривать как оптимизационную задачу на упорядоченной фрагментарной структуре. Упорядочим элементы множества X в определенном порядке $(x_1,x_2,\ldots,x_N)$. С каждым таким упорядочением связано C_{N-1}^{k-1} различных разбиений множества X на k непустых попарно непересекающихся подмножеств. Каждое такое разбиение Q определяется выбором $k-1$ границ из $N-1$ возможных между элементами множества X, выстроенных в заданном порядке: $x_1,x_2,\ldots,x_{s_1}|x_{s_1+1},x_{s_1+2},\ldots,x_{s_2}|\ldots$ $\ldots|x_{s_{k-1}+1},x_{s_{k-1}+2},\ldots,x_N$.

Из всех разбиений, соответствующих заданному порядку на множестве X, выберем то, диаметр которого минимален (если таких разбиений несколько, то выберем одно из них по детерминированному правилу). Это решение соответствует максимальному фрагменту, являющемуся в данном случае линейным упорядочением множества X.

Задача булева программирования. Рассмотрим эту задачу в следующей постановке: найти вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ на множестве n-мерных двоичных векторов $Z_2^n = \{x \mid x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ x_i \in \{0,1\}, \ i = 1,2, \ldots, n\}$, для которого значение линейной целевой функции $F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ максимально при условии выполнения m линейных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты c_i, a_{ij}, b_j — неотрицательные вещественные числа, $i = 1,2, \ldots, n, \ \ j = 1,2, \ldots, m$.

Упорядоченную фрагментарную структуру определим следующим образом: для заданного порядка элементов $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ допустимым фрагментом является набор переменных $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s})$, $s \le n$, для которого значения переменных $x_{i_1} = 1$, $x_{i_2} = 1, \ldots, x_{i_s} = 1$, $x_{i_{s+1}} = 0, \ldots, x_{i_s} = 0$ удовлетворяют неравенствам (1). Очевидно, оптимальному решению задачи булева программирования соответствует некоторый максимальный фрагмент.

Приведенные примеры показывают, что множество дискретных оптимизационных задач, которые можно рассматривать как задачи на фрагментарной структуре и, следовательно, сводить к задаче поиска оптимальной перестановки, достаточно велико.

4. АЛГОРИТМЫ ПОИСКА ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ФРАГМЕНТАРНОЙ СТРУКТУРЕ

Наличие фрагментарной структуры в задаче оптимизации позволяет предложить ряд универсальных методов поиска их приближенного решения. Каждый из этих методов предполагает два этапа: на первом — одним из методов комбинаторной оптимизации [13] находится перестановка, оптимизирующая накрывающее отображение, а на втором — по перестановке с помощью фрагментарного алгоритма восстанавливается решение задачи.

Рассмотрим некоторые из таких методов, которые относятся к классу метаэвристик.

Локальный алгоритм со случайным выбором начальной точки. Пусть задача оптимизации имеет фрагментарную структуру и определено накрывающее отображение $F : S_n \to R^1$, соответствующее этой структуре. На множестве перестановок S_n определим метрику Кэндала, а именно расстоянием между двумя перестановками называется минимальное число транспозиций, необходимое для перевода первой перестановки во вторую. Локальный алгоритм предполагает следующие шаги.

1. На начальном этапе выбирается случайная перестановка (например, с помощью алгоритма Фишера–Йетса) и вычисляется значение накрывающей целевой функции на этой перестановке.

2. На этапе с номером k просматривается 1-окрестность перестановки и выбирается в качестве нового приближения точка, в которой значение накрывающей целевой функции максимально в рассматриваемой окрестности.

3. Если полученная на очередном этапе перестановка совпадает с перестановкой, полученной на предыдущем этапе, то алгоритм заканчивает работу. По найденной перестановке восстанавливается решение исходной задачи.

Эволюционный алгоритм с геометрическим оператором кроссовера. Используется стандартная схема эволюционного алгоритма на перестановках. Опишем кратко принцип работы такого алгоритма [14, 15]. В качестве базового множества решений выбирается множество S_n всех перестановок из n элементов. На начальном шаге с помощью оператора начальной популяции строится множество решений $Y_0 \subseteq S_n$. На каждом очередном шаге предполагается заданным некоторое множество перестановок — текущая популяция. На первом шаге это множество $Y = Y_0$. Для каждого элемента множества Y вычисляется значение критерия селекции, который в рассматриваемом случае является накрывающим отображением исходной задачи.

Далее с помощью оператора отбора в текущей популяции Y выбирается множество пар для кроссовера. К каждой паре из выбранного множества пар применяется оператор кроссовера, а затем к результату кроссовера применяется оператор мутации. Пусть $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — две произвольные перестановки. Перестановка-потомок строится следующим образом: на начальном этапе последовательности U и V пошагово просматриваются от начала к концу. На k-м шаге выбирается наименьший из первых элементов последовательностей и добавляется в новую перестановку-потомок. Затем этот элемент удаляется из двух последовательностей-родителей. Например,

$$K((1,3,4,2,8,7,6,5),\ (3,4,6,2,1,5,8,7)) = (1,3,4,2,6,5,8,7).$$

Оператор мутации M с заданной вероятностью $\alpha \in (0,1)$ выполняет случайную транспозицию (замену местами двух элементов) в перестановке.

Таким образом находится множество элементов — потомков $\widetilde{Y}$. К промежуточной популяции $Y \cup \widetilde{Y}$, которая является объединением текущей популяции и множества потомков, применяется оператор эволюции, выделяющий на этом множестве новую текущую популяцию. Процесс эволюции повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие остановки эволюционного алгоритма. Блок-схема эволюционного алгоритма приведена на рис. 2. По найденной перестановке восстанавливается решение исходной задачи.

Муравьинный алгоритм. В основе муравьиного алгоритма лежит моделирование поведения муравьев, а именно их способность быстро находить кратчайший путь от муравейника к источнику пищи и адаптироваться к изменяющимся условиям, отыскивая новый кратчайший путь [16, 17]. Во время движения муравей метит путь феромоном, и эта информация используется другими муравьями для выбора своего пути. Это элементарное правило поведения и определяет способность муравьев находить пути, близкие к оптимальным.

Покажем, как подобный механизм применить к поиску оптимальной перестановки. Процедура вычисления состоит из ряда циклов расчета. Каждый путь муравья между позициями $1, 2, \ldots, n$ будет определяться перестановкой $s = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Муравьи имеют собственную «память». У каждого из них есть список уже посещенных позиций — список запретов. Обозначим $J_{i,k}^{t}$ список позиций, которые на цикле t необходимо посетить k-му муравью, находящемуся в позиции i.

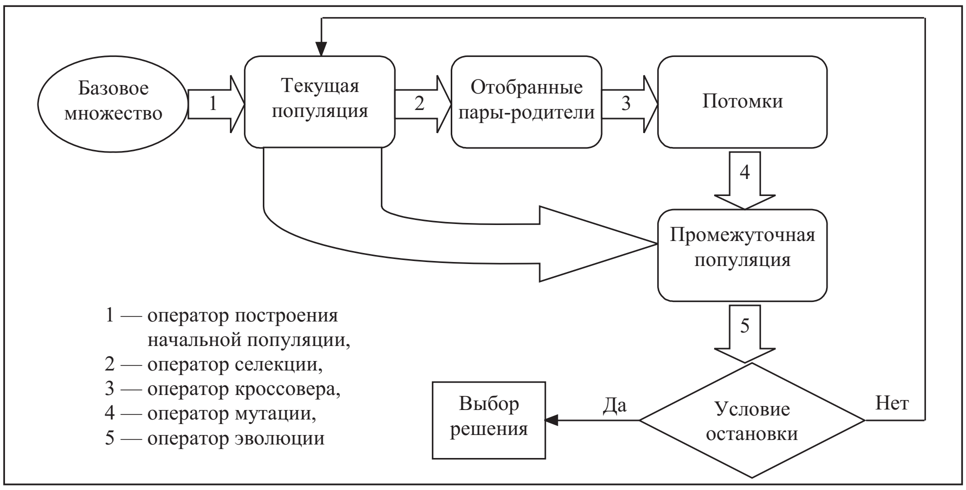

Рис. 2. Блок-схема эволюционного алгоритма

Муравьи обладают «обонянием» — они могут улавливать след феромона, подтверждающий желание муравья пройти из позиции i в позицию j на основании опыта других муравьев. Количество феромона на цикле с номером t при переходе из позиции i в позицию j определяется величиной $\tau_{ij}(t)$. На начальном этапе это количество можно задавать произвольно.

Вероятность перехода k-го муравья из позиции i в позицию j на цикле с номером t определяется следующим соотношением:

$$P_{ij,k}(t)=\begin{cases}\dfrac{[\tau_{ij}(t)]^{\alpha}}{\sum\limits_{l\in J_{i,k}^{t}}[\tau_{il}(t)]^{\alpha}}, & j\in J_{i,k}^{t},\\[2ex] 0, & j\notin J_{i,k}^{t},\end{cases}$$

где α — параметр, задающий вес следа феромона. Количество откладываемого феромона составляет

$$\Delta\tau_{ij,k}(t)=\begin{cases}\dfrac{Q}{L_k(t)}, & (i,j)\in T_k(t),\\ 0, & (i,j)\notin T_k(t),\end{cases}$$

где Q — положительный параметр, $L_k(t)$ — значение накрывающего отображения на перестановке, соответствующей маршруту k-го муравья на цикле с номером t. Изменение количества феромона определяется выражением

$$\tau_{ij}(t+1)=(1-p)\tau_{ij}(t)+\sum_{k=1}^{m}\Delta\tau_{ij,k}(t),$$

где m — количество муравьев, p — коэффициент «испарения» ($0\le p\le 1$).

Алгоритм прекращает работу, когда выполнено некоторое правило остановки, например, достигнута граница числа циклов. Минимальная по значению накрывающего отображения перестановка, найденная на последнем цикле, преобразуется в решение исходной задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы свойства дискретного объекта — фрагментарной структуры. Показано, что наличие фрагментарной структуры в задачах оптимизации позволяет создавать универсальные приближенные алгоритмы невысокой трудоемкости для поиска оптимальных решений таких задач. Причем эти алгоритмы для различных задач отличаются лишь правилом вычисления значения целевой функции по заданной перестановке. Описаны три класса метаэвристических алгоритмов поиска оптимальной перестановки. Каждый из таких алгоритмов можно применять к любой задаче дискретной оптимизации, которую удается представить как задачу с фрагментарной структурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Whitney H. On the abstract properties of linear dependence. *American Journal of Mathematics*. 1935. Vol. 57, N 3. P. 509–533.
2. Korte B., Lovasz L., Schrader R. Greedoids. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 216 p.
3. Ильев В.П. Задачи на системах независимости, разрешимые жадным алгоритмом. *Дискретная. математика*. 2009. Т. 21, № 4. С. 85–94.
4. Перепелица В.А. Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах. Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing GmbH&Co. KG, 2013. 336 с.
5. Донець Г.П. Граціозна нумерація дерев. Київ, 2017. 144 с.
6. Goncalves J.F. A hybrid genetic algorithm-heuristic for a two-dimensional orthogonal packing problem. *European Journal of Operational Research*. 2007. Vol. 183(3). P. 1212–1229.

7. Козин И.В. Эволюционно-фрагментарная модель задачи упаковки пентамино. *Дискретный анализ и исследование операций*. 2014. Т. 21, № 6. С. 35–50.
8. Лебедев Б.К., Воронин Е.И. Генетический алгоритм распределения соединений по слоям при многослойной глобальной трассировке СБИС. *Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск: интеллектуальные САПР*. 2012. № 7 (132). С. 14–21.
9. Козин И.В., Кривцун Е.В. Моделирование однослойных и двуслойных трассировок. *Управляющие системы и машины*. 2016. № 2. С. 58–64.
10. Максишко Н.К., Заховалко Т.В. Моделі та методи розв'язання прикладних задач покриття на графах та гіперграфах. Запорожье: Полиграф. 2009. 244 с.
11. Brucker P. On the complexity of clustering problems. Beckmenn M., Kunzi H.P. (Eds.). *Optimisation and Operations Research. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.* 1978. Vol. 157. P. 45–54.
12. Ruiz R., Maroto C. A comprehensive review and evaluation of permutation flowshop heuristics. *European Journal of Operational Research*, 2005. Vol 165. P. 479–494.
13. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наук. думка, 2003. 260с.
14. Holland J.H. Adaptation in natural and artificial systems. Boston, MA: MIT Press. 1992. 288 p.
15. Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. Состояние. Проблемы. Перспективы. *Известия РАН. ТиСУ*. 1999. № 1. С. 144–160.
16. Dorigo M. Optimization, learning, and natural algorithms. PhD Thesis, Dipartimento di Elettronica, Politechnico Di Milano, Italy. 1992. 140 p.
17. Штовба С.Д. Муравьиные алгоритмы: теория и применение. *Программирование*. 2005. № 4. С. 1–16.

Надійшла до редакції 23.06.2017

І.В. Козін, Н.К. Максишко, В.О. Перепелиця

ФРАГМЕНТАРНІ СТРУКТУРИ У ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Анотація. Розглянуто комбінаторний об'єкт — фрагментарну структуру, і досліджено властивості цього об'єкта. Показано, що ряд задач дискретної оптимізації можна розглядати як задачі оптимізації на фрагментарній структурі. До того ж задача оптимізації зводиться до задачі безумовної комбінаторної оптимізації на множині переставлень. Запропоновано варіанти алгоритмів пошуку наближених розв'язків для оптимізаційних задач, що мають фрагментарну структуру.

Ключові слова: дискретна оптимізація, фрагментарна структура, локальний алгоритм, еволюційний алгоритм, мурашиний алгоритм.

I.V. Kozin, N.K. Maksyshko, V.A. Perepelitsa

FRAGMENTARY STRUCTURES IN DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS

Abstract. The paper considers a combinatorial object (a fragmentary structure) and investigates the properties of this object. It is shown that a number of discrete optimization problems can be considered as optimization problems on a fragmentary structure. Optimization problem reduces to an unconditional combinatorial optimization problem on a set of permutations. Variants of algorithms to find approximate solutions for optimization problems of fragmentary structure are proposed.

Keywords: discrete optimization, fragmentary structure, local algorithm, evolutionary algorithm, ant algorithm.

Козин Игорь Викторович
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Запорожского национального университета,
e-mail: ainc00@gmail.com.

Максишко Наталия Константиновна
доктор экон. наук, профессор, заведующая кафедрой Запорожского национального университета,
e-mail: maxishko@ukr.net.

Перепелица Виталий Афанасьевич
доктор физ.-мат. наук, профессор Запорожского национального университета,
e-mail: perepel2@yandex.ru.