УДК 517.95:519.86:539.3

В.А. СТОЯН

О ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ НЕПОЛНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ТРЕХМЕРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ. II. СЛУЧАЙ ДИСКРЕТНО ЗАДАННОГО ЖЕЛАЕМОГО СОСТОЯНИЯ

Аннотация. Решены задачи управления линейно преобразованной вектор-функцией смещений точек трехмерного упругого тела в целях среднеквадратического приближения ее к дискретно заданным значениям. Задачи решаются без ограничений на геометрию тела и при дискретно определенных наблюдениях за его начально-краевым состоянием. В качестве управляющих факторов рассматриваются объемно-, поверхностно- и начально-распределенные внешнединамические возмущения. Выполнена оценка точности и однозначности управления.

Ключевые слова: пространственно распределенные динамические системы, пространственные задачи теории упругости, псевдоинверсия, управление.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением исследований автора [1] в области динамики трехмерных упругих тел, функционирующих в условиях неполноты информации об их начально-поверхностном состоянии. В работах [2, 3] решены задачи построения математических моделей динамики таких тел при условии вырожденности их по одной пространственной координате для случаев, когда за начальным состоянием внутренних и текущем состоянием поверхностных точек тела проводятся дискретно и непрерывно определенные наблюдения, с которыми построенная математическая модель согласуется по среднеквадратическому критерию.

В работах [4, 5] решены задачи управления рассматриваемыми телами по среднеквадратическому приближению их состояния к наперед заданному. Рассмотрены случаи управления объемно-, поверхностно- и начально-распределенными внешнединамическими возмущениями, взятыми по одному, по два и по три. В [1] эти проблемы решены для трехмерных упругих тел с произвольной геометрией их поверхности. При этом по среднеквадратическому критерию учитываются непрерывно заданное желаемое состояние и непрерывно определенные наблюдения за гранично-поверхностным состоянием тела. Это новые, интересные и не решенные ранее задачи механики твердого деформируемого тела, имеющие важную практическую направленность.

Еще более сложными являются задачи управления динамикой рассматриваемых тел для случая, когда информация об их начально-поверхностном и желаемом состояниях задана дискретно, а управление выполняется как дискретно, так и непрерывно определенными внешнединамическими управляющими факторами — начальными, поверхностными и объемными. Построению решений названных задач и посвящена настоящая публикация. Здесь получены аналитические выражения как управляющих внешнединамических воздействий, так и поля динамических смещений точек тела, среднеквадратически согласованного с желаемым, а также даны оценки точности полученных решений и исследованы условия их однозначности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим пространственно определенное упругое тело, внутренняя область S_0 которого в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 ограничена поверхностью Γ [1–3].

Обозначим $u = \mathrm{col}(u_1, u_2, u_3)$ вектор-функцию динамических смещений точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ в направлении координатных осей Ox_1, Ox_2, Ox_3, а через

$$f = \mathrm{col}(f_1, f_2, f_3)$$

— связанную с ней вектор-функцию объмно-распределенных внешнединамических факторов; динамику смещения точек тела опишем системой уравнений Ляме [6]

$$L(\partial_s)\, u(s) = f(s). \tag{1}$$

Здесь

$$L(\partial_s) =$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\partial^2_{x_1} + \mu(\partial^2_{x_2} + \partial^2_{x_3}) - \rho\partial^2_t & (\lambda+\mu)\partial_{x_1}\partial_{x_2} & (\lambda+\mu)\partial_{x_1}\partial_{x_3} \\ (\lambda+\mu)\partial_{x_1}\partial_{x_2} & (\lambda+2\mu)\partial^2_{x_2} + \mu(\partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_3}) - \rho\partial^2_t & (\lambda+\mu)\partial_{x_2}\partial_{x_3} \\ (\lambda+\mu)\partial_{x_3}\partial_{x_1} & (\lambda+\mu)\partial_{x_3}\partial_{x_2} & (\lambda+2\mu)\partial^2_{x_3} + \mu(\partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2}) - \rho\partial^2_t \end{pmatrix}$$

является матричным дифференциальным оператором, в котором $s = (x, t)$, $\partial_s = (\partial_x, \partial_t) = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, \partial_t)$, ρ — удельная плотность, а λ и μ — константы Ляме, характеризующие упругие свойства материала тела.

Для удобства решения рассматриваемых ниже задач дифференциальную модель (1) заменим следующим интегральным эквивалентом [1–3]:

$$u(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s - s')\, f(s')\, ds', \tag{2}$$

где при мнимом i, $p = (p_1, p_2, p_3)$ имеем

$$D(p, q, s - s') = \mathrm{diag}(e^{p(x-x') + q(t-t')},\ \ l = \overline{1, 3}),$$

$$G(s - s') = \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} L^{-1}(p, q) D(p, q, s - s')\, dp dq.$$

Предположим, что за начальным состоянием тела и текущим состоянием его граничных поверхностей проводятся следующие наблюдения:

$$L_r^0(\partial_t)\, u(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x = x_l^0 \in S_0}} = U_{rl}^0 \ \ (l = \overline{1, L_0};\ r = \overline{1, R_0}), \tag{3}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, u(s)\Big|_{s = s_l^\Gamma \in \Gamma \times [0, T]} = U_{\rho l}^\Gamma \ \ (l = \overline{1, L_\Gamma};\ \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \tag{4}$$

где $L_r^0(\partial_t)\, (r = \overline{1, R_0})$ и $L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, (\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ — линейные дифференциальные операторы, а U_{rl}^0 $(l = \overline{1, L_0}; r = \overline{1, R_0})$ и $U_{\rho l}^\Gamma$ $(l = \overline{1, L_\Gamma}; \rho = \overline{1, R_\Gamma})$ — заданные значения.

Дискретно соотношением

$$L_i(\partial_s)\, u(s)\big|_{s = s_i \in S_0^T = S_0 \times [0, T]} = U_i \ \ (i = \overline{1, I}) \tag{5}$$

при заданных $L_i(\partial_s)$ $(i=\overline{1,I})$ и U_{il} $(l=\overline{1,L};\, i=\overline{1,I})$ определим желаемое состояние тела.

Поставим задачу определения пакета управляющих внешнединамических факторов, т.е. объемно-распределенных возмущений $f(s)$, начально-поверхностных воздействий $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0};\; x\in S_0)$ и $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma};\; s\in\Gamma\times[0,\mathrm{T}])$, выбранная комбинация которых по среднеквадратическому критерию выполняет соотношение (5), рассматриваемое совместно с наблюдениями (3), (4).

При наличии названных внешнединамических факторов (как известных, так и управляющих) вектор-функцию динамических смещений точек тела представим суммой

$$u(s)=u_\infty(s)+u_0(s)+u_\Gamma(s)\,, \tag{6}$$

слагаемые которой соответствуют объемным, начальным и поверхностным внешнединамическим возмущениям.

По аналогии с

$$u_\infty(s)=\int\limits_{S_0^T} G(s-s')f(s')ds', \tag{7}$$

$$u_\infty(s)=\sum_{m=1}^{M} G(s-s_m)f_m\,, \tag{8}$$

где $s_m\in S_0^T=S_0\times[0,T]$ при $m=\overline{1,M}$, представим составляющие

$$u_0(s)=\int\limits_{S^0} G(s-s')f_0(s')ds'\,, \tag{9}$$

$$u_\Gamma(s)=\int\limits_{S^\Gamma} G(s-s')f_\Gamma(s')ds', \tag{10}$$

$$u_0(s)=\sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0)f_{0m}\,, \tag{11}$$

$$u_\Gamma(s)=\sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s-s_m^\Gamma)f_{\Gamma m}\;. \tag{12}$$

Здесь $f_0(s)$ $(s\in S^0\times(-\infty,0])$ и $f_\Gamma(s)$ $(s\in S^\Gamma=(R^3\setminus S_0)\times(0,T])$ — «фиктивные» внешнединамические возмущающие факторы, используемые далее для моделирования (имитации) действий начальных и поверхностно-определенных воздействий на тело, а

$$u_{0m}=u_0(s_m^0)\;\;(s_m^0\in S^0;\, m=\overline{1,M_0})\,,$$

$$u_{\Gamma m}=u_\Gamma(s_m^\Gamma)\;\;(s_m^\Gamma\in S^\Gamma;\, m=\overline{1,M_\Gamma})\,.$$

Поскольку представленная согласно (6), (9), (10) или (6), (11), (12) вектор-функция $u(s)$ удовлетворяет уравнению (1) точно [7] при любых $f_0(s)$, $f_\Gamma(s)$, $f_0=\mathrm{col}(f_{0m}, m=\overline{1,M_0})$, $f_\Gamma=\mathrm{col}(f_{\Gamma m}, m=\overline{1,M_\Gamma})$, то для определения последних будем далее использовать начально-поверхностные наблюдения (3), (4) и соотношение (5), которые необходимо выполнить по среднеквадратическому критерию.

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ УПРУГИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ОБЪЕМНО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕШНЕДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Постановка задач. Рассмотрим блок задач управления системой (1) при выводе вектор-функции $u(s)$ динамических смещений точек системы в окрестность состояния U_{il} $(l=\overline{1, L}; i=\overline{1, I})$ так, чтобы

$$\Phi \to \min_{u(s)} \tag{13}$$

при

$$\Phi = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} || L_i(\partial_s) u(s) \big|_{s=s_l} - U_{il} ||^2 .$$

Обязательным элементом пакета внешнединамических управляющих воздействий будем считать объемно-распределенное внешнединамическое воздействие $f(s)$, определенное непрерывно или вектором

$$f = \mathrm{col}(f(s_m), m=\overline{1, M})$$

его значений в точках $s_m \in S_0^T$ $(m=\overline{1, M})$.

Рассмотрим возможности дополнительного использования управляющих внешнединамических воздействий $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1, R_0}; x \in S_0)$ и $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma}; s \in \Gamma \times [0, T])$, которые определим согласно (3), (4) с учетом предварительно найденной вектор-функции $u(s)$. Не используемые в управлении начально-поверхностные внешнединамические воздействия будем считать известными. При этом необходимо, чтобы вектор-функция $u(s)$ дополнительно к (13) минимизировала функционалы

$$\Phi_0 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} || L_r^0(\partial_t) u(s) \big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - U_{rl}^0 ||^2 \to \min_{u(s)}, \tag{14}$$

$$\Phi_\Gamma = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} || L_\rho^\Gamma(\partial_x) u(s) \big|_{s=s_l^\Gamma} - U_{\rho l}^\Gamma ||^2 \to \min_{u(s)}. \tag{15}$$

Управление объемно-распределенными внешнединамическими воздействиями. Рассмотрим решение задачи (1)–(5) с учетом управления состоянием трехмерного упругого тела S_0 с использованием (как управляющего) объемно-распределенного внешнединамического воздействия. Проанализируем также случай, когда это управляющее воздействие определяется непрерывно функцией $f(s)$ и дискретно — вектором f его значений. При известных начально-поверхностных наблюдениях (3), (4) за телом потребуем, чтобы

$$\Phi + \Phi_0 + \Phi_\Gamma \to \min_{u(s)} \tag{16}$$

при Φ_0, Φ_Γ, определенных в (14), (15).

Представляя вектор-функцию $u(s)$ состояния рассматриваемого тела соотношениями (6), (9), (10) или (6), (11), (12), от задачи (16) легко переходим [7] к задаче определения управляюще-моделирующей вектор-функции

$$\bar{f}(s) = \mathrm{col}((f_0(s)(s \in S^0)),\ (f_\Gamma(s)\ (s \in S^\Gamma)),\ (f(s)\ (s \in S_0^\Gamma)))$$

или вектора

$$\bar{f} = \mathrm{col}(f_0, f_\Gamma, f),$$

которые являются решением (результатом среднеквадратического обращения) соответственно систем

$$\int_{(\bullet)} A(s)\bar{f}(s)\,ds = \overline{U} \tag{17}$$

и

$$A\bar{f} = \overline{U}. \tag{18}$$

Здесь символом $(\bullet)$ обозначено интегрирование по области изменения подынтегральной функции,

$$\overline{U} = \mathrm{col}(U_0, U_\Gamma, U),$$

$$A = [A_{ij}]_{i,\,j=1}^{i,\,j=3}, \quad A(s) = [A_{ij}(s)]_{i,\,j=1}^{i,\,j=3}$$

при

$$U_0 = \mathrm{col}((U_{rl}^0, l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}),$$

$$U_\Gamma = \mathrm{col}((U_{\rho l}^\Gamma, l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$U = \mathrm{col}(U_{i,}\ i = \overline{1, I});$$

$$A_{1j}(s'_j) = \mathrm{col}((L_r^0(\partial_t)\, G(s - s'_j)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}}, l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{2j}(s'_j) = \mathrm{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, G(s - s'_j)\Big|_{s=s_l^\Gamma}, \ l = \overline{1, L_\Gamma}), \ \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{3j}(s'_j) = \mathrm{col}((L_i(\partial_s)\, G(s - s'_j)\Big|_{s=s_i}, \ i = \overline{1, I}),$$

$$A_{1j} = \mathrm{col}((\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)\, G(s - \sigma_{jm})\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}}, m = \overline{1, M_j}), l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{2j} = \mathrm{col}((\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, G(s - \sigma_{jm})\Big|_{s=s_l^\Gamma}, \ m = \overline{1, M_j}), \ l = \overline{1, L_\Gamma}), \ \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{3j} = \mathrm{col}((\mathrm{str}(L_i(\partial_s)\, G(s - \sigma_{jm})\Big|_{s=s_i}, \ m = \overline{1, M_j}), \ i = \overline{1, I}),$$

$s'_1 \in S^0$, $s'_2 \in S^\Gamma$, $s'_3 \in S_0^T$ и $\sigma_{1m} = s_m^0$, $M_1 = M_0$, $\sigma_{2m} = s_m^\Gamma$, $M_2 = M_\Gamma$, $\sigma_{3m} = s_m$, $M_3 = M$.

Решением (18), при котором

$$\| A\bar{f} - \overline{U} \| \to \min_{\bar{f}},$$

находим [7] управляюще-моделирующий вектор $\bar{f}$ с компонентами

$$f_0 = A_1^T P^+ (\overline{U} - A\bar{v}) + v_0,$$

$$f_\Gamma = A_2^T P^+ (\overline{U} - A\bar{v}) + v_\Gamma, \tag{19}$$

$$f = A_3^T P^+ (\overline{U} - A\bar{v}) + v,$$

где при произвольных $3M_0$-, $3M_\Gamma$- и $3M$-мерных векторах v_0, v_Γ, v тождественно равных нулю, если $\det A^T A > 0$, имеем

$$\bar{v} = \mathrm{col}(v_0, v_\Gamma, v),$$

$$A_i = \mathrm{col}(A_{ji}, j = \overline{1,3}), \; P = AA^T,$$

а

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)}(\Phi + \Phi_0 + \Phi_\Gamma) = \bar{U}^T \bar{U} - \bar{U}^T PP^+ \bar{U}. \quad (20)$$

Аналогично из решения системы (17) такого, что

$$\| \int_{(\bullet)} A(s)\bar{f}(s)ds - \bar{U} \|^2 \to \min_{\bar{f}(s)},$$

находим [7] компоненты

$$f_0(s) = A_1^T(s)P^+(\bar{U} - A_v) + v_0(s)$$
$$f_\Gamma(s) = A_2^T(s)P^+(\bar{U} - A_v) + v_\Gamma(s) \quad (21)$$
$$f(s) = A_3^T(s)P^+(\bar{U} - A_v) + v(s)$$

непрерывно определенной управляюще-моделирущей вектор-функции $\bar{f}(s)$, при которой с точностью

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)}(\Phi + \Phi_0 + \Phi_\Gamma) = \bar{U}^T \bar{U} - \bar{U}^T PP^+ \bar{U} \quad (22)$$

решается рассматриваемая задача. Здесь, как и выше, $v_0(s)$ $(s \in S^0)$, $v_\Gamma(s)$ $(s \in S^\Gamma)$, $v(s)$ $(s \in S_0^T)$ — произвольные интегрируемые в области изменения своих аргументов функции, тождественно равные нулю, если

$$\lim_{N \to \infty} \det[A^T(s_i)A(s_j)]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$$

при

$$A_i(s) = \mathrm{col}(A_{ji}(s), j = \overline{1,3} \;\; (i = \overline{1,3})),$$

$$P = \int_{S^0} A_1(s)A_1^T(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_2(s)A_2^T(s)ds + \int_{S_0^T} A_3(s)A_3^T(s)ds,$$

$$A_v = \int_{S^0} A_1(s)v_0(s)ds + \int_{S^\Gamma} A_2(s)v_\Gamma(s)ds + \int_{S_0^T} A_3(s)v(s)ds.$$

Управление с учетом начально-поверхностных возмущающих факторов. Рассмотрим случай управления трехмерным упругим телом, полагая, что состояние U_i $(i = \overline{1, I})$ точек тела достигается совместным действием объемно-распределенных внешнединамических управляющих факторов $\bar{f}$ и $\bar{f}(s)$, дополненных начальными $U_r^0(x)$ $(r = \overline{1, R_0})$, поверхностными $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ и начально-поверхностными $U_r^0(x)$ $(r = \overline{1, R_0})$, $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ внешнединамическими управляющими факторами.

Задача 1. Проблема управления системой (1) — (5) решается при известном наблюдении $U_{\rho l}^\Gamma$ $(l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma})$ объемно- и начально-распределенными внешнединамическими управляющими воздействиями.

В этом случае в разрешающих системах (17), (18) для определения управляюще-моделирующих вектора $\bar{f}$ и вектор-функции $\bar{f}(s)$ будут отсутствовать первые $3R_0 L_0$ уравнения или (что эквивалентно) блоки U_0, A_{1j}, $A_{1j}(s)$ $(j=\overline{1,3})$ вектора $\overline{U}$, матрицы A и матричной функции $A(s)$. В результате упрощаются выражения (19), (21) для векторов f_0, f_Γ, f и вектор-функций $f_0(s)$, $f_\Gamma(s)$, $f(s)$. С использованием последних согласно (3) определим управляющие функции $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1, R_0})$. Точность решения задачи определяется соотношениями (20), (22), записанными с учетом упомянутых изменений в определении вектора $\overline{U}$, матрицы A и матричной функции $A(s)$.

Задача 2. Управление системой (1)–(5) выполняется при наблюдаемом согласно (3) начальном состоянии исследуемого тела объемно- и поверхностно-распределенными внешнединамическими управляющими функциями $f(s)$ и $U_\rho^\Gamma(s)$.

Как и выше, управляюще-моделирующие вектор $\bar{f}$ и вектор-функцию $\bar{f}(s)$ определим после среднеквадратического обращения систем (17), (18), в которых теперь будут отсутствовать $3R_\Gamma L_\Gamma$ уравнения, соответствующие ненаблюдаемому здесь вектору U_Γ. Аналогичные изменения имеют место и при определении матрицы A, матричной функции $A(s)$, а также при найденных через них соотношениями (19), (21) векторах f_0, f_Γ, f и вектор-функциях $f_0(s)$, $f_\Gamma(s)$, $f(s)$, моделирующих начально-, поверхностно- и объемно-распределенные управляющие воздействия. С помощью этих векторов и вектор-функций соотношениями (6)–(12) определим вектор-функцию $u(s)$, а через нее согласно (4) найдем и поверхностно-распределенное управление $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma}, s\in\Gamma\times[0,T])$.

Задача 3. Среднеквадратическое приближение вектор-функции $u(s)$ состояния рассматриваемого упругого тела к значениям U_i $(i=\overline{1,I})$, определенным в (5), выполним комплексно, воздействуя на него начально-, поверхностно- и объемно-распределенными внешнединамическими управляющими факторами одновременно.

Отсутствие наблюдений (3), (4), а следовательно и составляющих U_0, U_Γ в (17), (18), приводит к соотношениям $A_i \equiv A_{3i}$, $A_i(s) \equiv A_{3i}(s)$ для $i=\overline{1,3}$. Аналогично упрощаются и выражения (19), (21) для управляюще-моделирующих векторов f_0, f_Γ, f и вектор-функций $f_0(s)$, $f_\Gamma(s)$, $f(s)$. Управляющие внешнединамические воздействия $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1, R_0})$ и $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$, как и выше, получим из (3), (4) после подстановки в них соотношений (6)–(12), что и решит задачу. Точность полученного решения определим согласно (20), (22) с учетом названных здесь упрощений в разрешающих уравнениях (17), (18).

Управление в установившемся пространственно-временном режиме. Постановки и решения рассмотренных выше задач по управлению трехмерным упругим телом S_0 будут более простыми, если влиянием начально- и поверхностно-определенных внешнединамических воздействий $u(s)$ на поле объемнодинамических смещений в области S_0 можно пренебречь. В этом случае в уравнениях (17), (18) можно не учитывать векторы U_0 и U_Γ, что, как и выше, упростит структуру матрицы A, а также матричной функции $A(s)$. При отсутствии начально-поверхностных внешнединамических воздействий окажутся ненужными векторы f_0, f_Γ, а следовательно, и вектор-функции $f_0(s)$, $f_\Gamma(s)$, которые их моделируют, а также результат такого моделирования — функции $u_0(s)$ и $u_\Gamma(s)$ в соотношении (6).

Представим варианты постановок задач управления рассматриваемым телом и структуру разрешающих уравнений для определения управляюще-моделирующих внешнединамических факторов $\bar{f}$ и $\bar{f}(s)$.

Задача 4. Исследуется динамика рассматриваемого упругого тела, когда начальными возмущениями $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1, R_0})$ можно пренебречь, а управляющим фактором будем считать объемно-распределенное внешнединамическое воздействие, определенное функцией $f(s)$ или вектором f ее значений так, чтобы

$$\Phi+\Phi_\Gamma \to \min_{u(s)}.$$

Управляюще-моделирующий вектор $\bar{f}=\mathrm{col}(f_\Gamma, f)$, как и вектор-функцию $\bar{f}(s)=\mathrm{col}(f_\Gamma(s), f(s))$, получим после среднеквадратического обращения систем (17), (18), в которых теперь

$$A=[A_{ij}]_{i,\, j=2}^{i,\, j=3},\quad A(s)=[A_{ij}(s)]_{i,\, j=2}^{i,\, j=3},$$

$$\overline{U}=\mathrm{col}(U_\Gamma, U),\ \overline{U}(s)=\mathrm{col}(U_\Gamma(s), U(s)).$$

С учетом этого соотношениями (19), (21) при

$$A_1 \equiv 0,\ A_i=\mathrm{col}(A_{2i}, A_{3i}),\ i=\overline{2, 3},$$

$$A_1(s)\equiv 0,\ A_i(s)=\mathrm{col}(A_{2i}(s), A_{3i}(s)),\ i=\overline{2, 3},$$

определяются векторы f_Γ, f и вектор-функции $f_\Gamma(s), f(s)$ такие, что

$$\min_{u(s)}(\Phi+\Phi_\Gamma)=\overline{U}^T\overline{U}-\overline{U}^T PP^+\overline{U}.$$

Если в управлении используются поверхностные внешнединамические возмущающие факторы $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$, которые в дополнение к f, $f(s)$ определим согласно (6)–(12), то решением (17), (18) при

$$\Phi \to \min_{u(s)}$$

будут векторы f_Γ, f и вектор-функции $f_\Gamma(s)$, $f(s)$, определенные соотношениями (19), (21), в которых при отсутствии U_Γ имеем $A_{22}=A_{23}=A_{22}(s)=$ $=A_{23}(s)\equiv 0.$ При этом, как и выше,

$$\min_{u(s)}\Phi=\overline{U}^T\overline{U}-\overline{U}^T PP^+\overline{U}. \tag{23}$$

Задача 5. Рассмотрим вариант управления телом S_0, когда при наблюдаемом согласно (3) начальном состоянии тела поверхностно-распределенными внешнединамическими воздействиями (4) можно пренебречь.

Упраляюще-моделирующие вектор $\bar{f}=\mathrm{col}(f_0, f)$ и вектор-функцию $\bar{f}(s)=\mathrm{col}(f_0(s), f(s))$ такие, что

$$\Phi+\Phi_0 \to \min_{u(s)},$$

получим из (19), (21) после среднеквадратического обращения систем (17), (18), где

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix},\quad \overline{U}=\begin{pmatrix} U_0 \\ U \end{pmatrix},$$

$$A(s)=\begin{pmatrix} A_{11}(s) & A_{13}(s) \\ A_{31}(s) & A_{33}(s) \end{pmatrix}, \quad \overline{U}(s)=\begin{pmatrix} U_0(s) \\ U(s) \end{pmatrix}.$$

Если в управлении рассматриваемым телом вместе с объемно-распределенными возмущениями f и $f(s)$ используются начально-определенные внешнединамические возмущения $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1, R_0})$, то дополнительно к сказанному в уравнениях (17), (18) при отсутствии U_0 имеем $A_{11}=A_{13}=A_{11}(s)=A_{13}(s)\equiv 0$.

При среднеквадратическом обращении названных уравнений рассматриваемая задача решается с точностью ε^2 и определяется соотношением (23).

Задача 6. Решение задачи управления телом S_0 будет более простым для случая, когда начально-поверхностными возмущениями можно пренебречь.

Управляющие объемно-распределенные внешнединамические возмущающие факторы f и $f(s)$, при которых

$$\Phi \to \min_{u(s)},$$

получим после среднеквадратического обращения уравнений

$$A_{33} f = U,$$

$$\int_{S_0^T} A_{33}(s) f(s) ds = U.$$

В результате находим

$$f = A_{33}^{+} U + v - A_{33}^{+} A_{33} v,$$

$$f(s) = A_{33}^{T} P^{+} U + v(s) - A_{33}^{T} P^{+} A_v$$

при

$$P = \int_{S_0^T} A_{33}(s)\, A_{33}^{T}(s) ds, \quad A_v = \int_{S_0^T} A_{33}(s)\, v(s) ds,$$

произвольном $3M$-мерном векторе v и интегрируемой в области S_0^T вектор-функции $v(s)$, тождественно равной нулю, если соответственно

$$\det A_{33}^{T} A_{33} > 0$$

и

$$\lim_{N\to\infty} \det[A_{33}^{T}(s_i) A_{33}(s_j)]_{i,\, j=1}^{i,\, j=N} > 0.$$

Как и выше, имеет место оценка точности решения задачи, определенная в (23).

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ТРЕХМЕРНОГО УПРУГОГО ТЕЛА ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ОБЪЕМНО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕШНЕДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Изложим решения рассмотренных выше задач управления телом S_0 для случая, когда объемно-распределенное внешнединамическое воздействие $f(s)$ известно, а управление выполняется начально- и поверхностно-определенными внешнединамическими управляющими факторами $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1, R_0})$, $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$. Как и выше, выражения для функций $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1, R_0})$, $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$ получим из соотношений (6)–(12), записанных с учетом соответствующим образом определенных векторов $\bar{f}$ и вектор-функции $\bar{f}(s)$.

Полагая

$$U_{0\infty} = U_0 - \mathrm{col}((L_r^0(\partial_t)\, u_\infty(s)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}}, \; l=\overline{1, L_0}, \; r=\overline{1, R_0}),$$

$$U_{\Gamma\infty} = U_0 - \mathrm{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, u_\infty(s)\big|_{s=s_l^\Gamma}, \; l=\overline{1, L_\Gamma}, \; \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

$$U_\infty = U - \mathrm{col}((L_i(\partial_s)\, u_\infty(s)\big|_{s=s_i}, \; i=\overline{1, I}),$$

разрешающие уравнения для построения вектора $\bar{f}$ и вектор-функции $\bar{f}(s)$ запишем в виде

$$A\bar{f} = \widetilde{U}, \tag{24}$$

$$\int\limits_{(\bullet)} A(s)\bar{f}(s)ds = \widetilde{U}, \tag{25}$$

где $\widetilde{U} = \begin{pmatrix} U_{\Gamma\infty} \\ U_\infty \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}$, $A(s) = \begin{pmatrix} A_{21}(s) & A_{22}(s) \\ A_{31}(s) & A_{32}(s) \end{pmatrix}$

при управлении функциями $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1, R_0})$ таком, что

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)} \Phi_\Gamma;$$

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} U_{0\infty} \\ U_\infty \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}, \; A(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s) & A_{12}(s) \\ A_{31}(s) & A_{32}(s) \end{pmatrix}$$

при управлении функциями $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$ таком, что

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)} \Phi_0;$$

и, наконец,

$$\widetilde{U} = U_\infty, \; A = (A_{31}, A_{32}), \; A(s) = (A_{31}(s)\; A_{32}(s))$$

при совместном управлении функциями $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1, R_0})$ и $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$, для которого $\varepsilon^2 = \min\limits_{u(s)} \Phi$.

Среднеквадратическое обращение уравнений (24), (25) позволяет успешно решить рассматриваемые задачи так, что при

$$P = AA^T, \quad P = \int\limits_{(\bullet)} A(s)\, A^T(s)ds$$

точность их решения будет определяться величиной

$$\varepsilon^2 = \widetilde{U}^T \widetilde{U} - \widetilde{U}^T PP^+ \widetilde{U}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье решена сложнейшая задача пространственной теории упругости по управлению трехмерным упругим объектом в целях приближения линейно преобразованного вектора упруго-динамических смещений его точек к дискретно заданным значениям. Задача решена без ограничений на форму и размеры тела, без ограничений на количество и качество информации о начальном состоянии внутренних точек тела и текущем состоянии его поверхности.

Рассмотрены случаи, когда управление полем упруго-динамических смещений тела выполняется разными комбинациями трех внешнединамических управляющих факторов — объемно-определенных, поверхностных и начальных возмущений. Названный пакет управляющих воздействий на тело по среднеквадратическому критерию трехмерное поле упругих динамических смещений точек тела, удовлетворяющее пространственным уравнениям Ляме, согласовывает с доступными для дискретного наблюдения начально-краевыми условиями и вектором желаемых состояний отдельных точек тела. Для каждой задачи дана оценка точности такого согласования, записаны условия однозначности полученных решений, инженерно простых и доступных для практической реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян В.А. О задачах управления динамикой неполно определенных трехмерных упругих тел. I. Случай непрерывно заданного желаемого состояния. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 53, № 4. С. 84–95.
2. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании трехмерного поля поперечных динамических смещений толстых упругих плит. *Кибернетика и системный анализ.* 2013. № 6. С. 58–72.
3. Стоян В.А. Методи математичного моделювання в задачах динаміки товстих пружних плит. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2016. 310 с.
4. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. I. Управление при непрерывно заданном желаемом состоянии. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. Т. 50, № 3. С. 70–96.
5. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. II. Управление при дискретно заданном желаемом состоянии. *Кибернетика и системный анализ.* 2015. Т. 51, № 2. С. 117–133.
6. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. Москва: Гостехиздат, 1955. 492 с.
7. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.

Надійшла до редакції 06.12.2016

В.А. Стоян

ПРО ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ДИНАМІКОЮ НЕПОВНО ВИЗНАЧЕНИХ ТРИВИМІРНИХ ПРУЖНИХ ТІЛ.
II. ВИПАДОК ДИСКРЕТНО ЗАДАНОГО БАЖАНОГО СТАНУ

Анотація. Розв'язано задачі керування лінійно перетвореною вектор-функцією зміщень точок тривимірного пружного тіла з метою середньоквадратичного наближення її до дискретно заданих значень. Задачі розв'язуються без обмежень на геометрію тіла і при дискретно визначених спостереженнях за його початково-крайовим станом. Як керувальні фактори розглянуто об'ємно-, поверхнево- і початково-розподілені зовнішньодинамічні збурення. Проведено оцінювання точності та однозначності керування.

Ключові слова: просторово розподілені динамічні системи, просторові задачі теорії пружності, псевдоінверсія, керування.

V.A. Stoyan

PROBLEMS OF CONTROL OF THE DYNAMICS OF INCOMPLETELY DEFINED THREE-DIMENSIONAL ELASTIC BODIES.
II. THE CASE OF DISCRETELY DEFINED DESIRED STATE

Abstract. The author solves the problems of control of linearly transformed vector function of displacement points of three-dimensional elastic body with the purpose of root-mean-square approximation to its discretely defined values. The problems are solved without constraints on the body geometry and under discretely defined observations of its initial-boundary state. Space, superficial, and initially distributed outward perturbations are considered as control factors. The evaluation of accuracy and uniqueness of control is conducted.

Keywords: spatially distributed dynamical systems, spatial problems of elasticity theory, pseudoinversion, control.

Стоян Владимир Антонович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: v_a_stoyan@ukr.net.