УДК 519.85

С.В. ЯКОВЛЕВ

МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА В ЗАДАЧАХ РАЗМЕЩЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Аннотация. Рассматривается задача оптимального размещения геометрических объектов с заданными формой и физико-метрическими параметрами. Выделяется комбинаторная структура задачи. На основе искусственного расширения размерности пространства сформулирована эквивалентная постановка исходной задачи, в которой физико-метрические параметры являются независимыми переменными. Рассмотрен пример построения равновесной модели задачи упаковки кругов в круг минимального радиуса.

Ключевые слова: оптимальное размещание, комбинаторное множество, равновесная упаковка.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального размещения геометрических объектов вызывают постоянный интерес исследователей [1–9]. Важным направлением исследований является выделение и формализация специальных классов задач, для которых можно использовать как новые эффективные методы решения, так и классические методы математического программирования для решения задач в довольно общей постановке. Импульсом к развитию этого направления послужило создание теории Ф-функций Ю.Г. Стояна [10, 11]. Формализация Ф-функций для различных классов объектов значительно расширила область применения этого аппарата для описания условий взаимного непересечения объектов и размещения их внутри области. В настоящей статье предлагается новый взгляд на формализацию и методы решения задач размещения как задач математического программирования путем выделения их комбинаторной структуры. Предлагается подход к построению эквивалентной математической модели задачи, основанный на искусственном расширении размерности пространства переменных в исходной постановке.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу размещения геометрических объектов в следующей постановке. Заданы объекты $S_0, S_1, \ldots, S_n$ фиксированной формы, каждый из которых в соответствующем пространстве характеризуется своими параметрами размещения $p^i = (p_1^i, p_2^i .., p_\alpha^i)$ и физико-метрическими параметрами $w^i = (w_1^i, w_2^i, \ldots, w_\beta^i)$, $i \in \{0\} \cup J_n$, $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \in \{0\} \cup J_n$. Разобьем физико-метрические параметры на группы физических $u^i = (u_1^i, u_2^i, \ldots, u_{\beta_1}^i)$ и метрических $r^i = (r_1^i, r_2^i, \ldots, r_{\beta_2}^i)$ параметров, т.е. $w^i = (u^i, r^i)$, $i \in \{0\} \cup J_n$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

Параметры размещения определяют положение объекта в пространстве, а физико-метрические параметры задают линейные размеры объекта, его массу и т.д.

Объект S_0 назовем областью размещения. Зафиксируем его положение в пространстве, положив $p^0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Объекты S_i с параметрами размещения p^i назовем размещаемыми объектами и обозначим $S_i(p^i)$, $i \in J_n$. Будем считать, что физико-метрические параметры размещаемых объектов принимают фиксированные значения, т.е. каждому $S_i(p^i)$ соответствует единственный набор $w^i = (w_1^i, w_2^i, \ldots, w_\beta^i)$, $i \in J_n$. При этом физико-метрические параметры области размещения $w^0 = (w_1^0, w_2^0, \ldots, w_\beta^0)$ или их часть могут быть переменными.

Сформулируем оптимизационную задачу размещения в виде

$$F(w^0, p^1, p^2 \ldots, p^n, u^1, u^2, \ldots, u^n) \to \text{extr} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\Phi_{ij}(p^i, p^j) \geq 0, \; i \in J_n, \; j \in J_n, \; i < j, \tag{2}$$

$$\Phi_{0i}(p^i, r^0) \geq 0, \; i \in J_n, \tag{3}$$

где $F(\cdot)$ — заданная функция, а неравенства (2), (3) задают соответственно условия взаимного непересечения объектов $S_i(p^i)$ и $S_j(p^j)$ и их размещения внутри области $S_0(p^0)$. Заметим, что указанные условия не зависят от физических параметров объектов и являются характерными для класса задач размещения. Эффективным аппаратом для формализации условий взаимного непересечения и размещения в области является теория Ф-функций Ю.Г. Стояна.

МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА В ЗАДАЧАХ РАЗМЕЩЕНИЯ

Осуществим следующие эквивалентные преобразования задачи (1)–(3). С одной стороны, ослабим условия для физико-метрических параметров w^i, $i \in J_n$, и будем считать их независимыми переменными, с другой — сформируем такую систему ограничений задачи, в результате которой допустимыми будут те и только те значения переменных w^i, $i \in J_n$, которые совпадают с исходными фиксированными значениями.

Для этого выделим следующую комбинаторную структуру задачи. Каждому объекту S_i поставим в соответствие вектор его физико-метрических параметров $w^i = (w_1^i, w_2^i, \ldots, w_\beta^i)$, $i \in J_n$. Объект S_i с параметрами размещения p^i и физико-метрическими параметрами w^i обозначим $S_i(p^i, w^i)$, $i \in \{0\} \cup J_n$.

Пусть $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — произвольная перестановка чисел из J_n. Каждому элементу $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ поставим в соответствие точку $x \in R^m$, $m = n\beta$, по следующему правилу:

$$x = (x_1, \ldots, x_m) = (u_1^{\pi_1}, \ldots, u_{\beta_1}^{\pi_1}, r_1^{\pi_1}, \ldots, r_{\beta_2}^{\pi_1}, \ldots, u_1^{\pi_n}, \ldots, u_{\beta_1}^{\pi_n}, r_1^{\pi_n}, \ldots, r_{\beta_2}^{\pi_n}). \tag{4}$$

Совокупность точек вида (4) обозначим $E(w^1, w^2, \ldots, w^n)$. Нетрудно увидеть, что множество $E(w^1, w^2, \ldots, w^n)$ представляет собой множество перестановок векторов w^i, $i \in J_n$, и является конечным в пространстве R^m. Важным является тот факт, что множество $E(w^1, w^2, \ldots, w^n)$ является вершинно расположенным, т.е.

$$E(w^1, w^2, \ldots, w^n) = \text{vert conv } E(w^1, w^2, \ldots, w^n).$$

Для аналитического описания множества $E(w^1, w^2, \ldots, w^n)$ в пространстве R^m предложим следующий подход.

Рассмотрим мультимножество

$$A=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}=\{w_1^1, w_2^1, \dots, w_\beta^1, w_1^2, w_2^2, \dots, w_\beta^2, \dots, w_1^n, w_2^n, \dots, w_\beta^n\}$$

и упорядочим его элементы по неубыванию, т.е. положим, что $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_m$. Мультимножество A порождает евклидово множество перестановок (в общем случае с повторениями) $E_m(A)$ [12, 13].

Сформируем систему ограничений

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = \sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{5}$$

$$\sum_{i\in\Omega} z_i \ge \sum_{i=1}^{|\Omega|} a_i \quad \forall \Omega \subset J_m, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (z_i - \tau)^2 = \sum_{i=1}^{m} (a_i - \tau)^2, \tag{7}$$

где $|\Omega| = \operatorname{card} \Omega$, $\tau = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i$.

Известно [13, 14], что точки множества $E_m(A)$ и только они удовлетворяют системе (5)–(7). Заметим, что множество $E_m(A)$ является надмножеством множества $E(w^1, w^2, \dots, w^n)$. Для отсечения точек $E(w^1, w^2, \dots, w^n)$, которые не принадлежат множеству $E_m(A)$, применимы следующие суждения.

Пусть существует такое $j_0 \in J_\beta$, что все элементы множества $A_{j_0} = \{a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0\} = \{w_{j_0}^1, w_{j_0}^2, \dots, w_{j_0}^n\}$ различны. Не теряя общности, положим $a_1^0 < a_2^0 < \dots < a_n^0$. Построим зависимости

$$w_j^i = f_j(w_{j_0}^i), \; i \in J_n, \; j \in J_\beta / \{j_0\}. \tag{8}$$

Формализация функций $f_j(\cdot)$, $j \in J_\beta / \{j_0\}$ не вызывает затруднений. Для этого достаточно построить интерполяционные полиномы для пар точек $(w_{j_0}^i, w_j^i)$, $i \in J_n$, с помощью любого метода интерполяции. При этом система (5)–(7) становится избыточной и может быть преобразована к виду

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^0, \tag{9}$$

$$\sum_{i\in\Omega} z_i \ge \sum_{i=1}^{|\Omega|} a_i^0 \quad \forall \Omega \subset J_n, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (z_i - \tau_0)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i^0 - \tau_0)^2, \tag{11}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^0.$$

Решения системы (9)–(11) однозначно определяют точки множества $E(w^1, w^2, \dots, w^n)$ в соответствии с соотношениями

$$w_{j_0}^i = z_i, \; w_j^i = f_j(z_i), \; i \in J_n, \; j \in J_\beta / \{j_0\}. \tag{12}$$

Таким образом, можно утверждать, что точки множества $E(w^1, w^2, \ldots, w^n)$ и только они удовлетворяют системе (9)–(12). Более того, поскольку множество $E(w^1, w^2, \ldots, w^n)$ вершинно расположено, то для функций $f_j(\cdot)$, $j \in J_\beta / \{j_0\}$, существуют выпуклые продолжения на выпуклое надмножество $X \supseteq \operatorname{conv} E(w^1, w^2, \ldots, w^n)$ [15–17].

Для случая, когда каждое из мультимножеств $A_j = \{a_1^j, a_2^j, \ldots, a_n^j\} = \{w_j^1, w_j^2, \ldots, w_j^n\}$, $j \in J_\beta$, содержит одинаковые элементы, опишем множество $E(w^1, w^2, \ldots, w^n)$ следующим образом. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = J_n$, т.е. $a_i = i$, $i \in J_n$. Поскольку каждому объекту S_i, $i \in J_n$, соответствует единственный вектор его физико-метрических параметров, то можно установить зависимость между номером i этого объекта и вектором $w^i = (w_1^i, w_2^i, \ldots, w_\beta^i)$, $i \in J_n$. В соответствии с этим сформируем такое семейство функций $f_j(\cdot)$, что

$$w_j^i = f_j(i), \ i \in J_n, j \in J_\beta. \tag{13}$$

Составим систему следующих уравнений и неравенств:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{14}$$

$$\sum_{i \in \Omega} z_i \ge \frac{k(k+1)}{2} \quad \forall \Omega \subset J_n, \ k = |\Omega|, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(z_i - \frac{n+1}{2} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2. \tag{16}$$

При этом ограничения (14), (15) описывают многогранник множества перестановок первых n натуральных чисел, а решения системы (13)–(16) однозначно определяют точки множества $E(w^1, w^2, \ldots, w^n)$, для которых в соответствии с соотношениями (13)

$$w_j^i = f_j(z_i), \ i \in J_n, j \in J_\beta.$$

На основании приведенных результатов формализуем зависимость между физико-метрическими параметрами объектов, что позволит сформировать функциональные ограничения задачи (1)–(3). При этом сами условия (2), (3) изменятся с учетом переменных метрических параметров и примут вид

$$\widetilde{\Phi}_{ij}(p^i, r^i, p^j, r^j) \ge 0, \ i \in J_n, \ j \in J_n, \ i < j, \tag{17}$$

$$\widetilde{\Phi}_{0i}(p^i, r^i, r^0) \ge 0, \ i \in J_n, \tag{18}$$

где $\widetilde{\Phi}_{ij}(\cdot)$ — функции, описывающие условия взаимного непересечения объектов $S_i(p^i, r^i)$ и $S_j(p^j, r^j)$, $i \in J_n$, $j \in J_n$, $i < j$, а $\widetilde{\Phi}_{0i}(\cdot)$ — функции, описывающие условия взаимного непересечения $\boldsymbol{c}S_0(p^0, r^0)$ и объектов $S_i(p^i, r^i)$, $i \in J_n$, где $\boldsymbol{c}$ — теоретико-множественная операция дополнения.

Таким образом, исходная задача (1)–(3) размерности $n(\alpha + \beta_1) + \beta$ в пространстве переменных $w^0, p^1, p^2, \ldots, p^n, u^1, u^2, \ldots, u^n$ эквивалентно формулируется как оптимизационная задача (1), (13)–(18) размерности $n\alpha+(n+1)\beta$ в пространстве переменных $p^1, p^2, \ldots, p^n$, w^0, $w^1, w^2, \ldots, w^n$. Такой подход впервые описан в [18] и назван методом искусственного расширения пространства. Преимущество метода при реализации различных вычислительных схем нелинейной оптимизации состоит в возможности преодоления области притяжения локальных экстремумов исходной задачи. Этот факт позволяет рассматривать метод искусственного расширения пространства как способ улучшения локальных решений или приближений к ним в задачах размещения геометрических объектов.

Заметим, что количество линейных ограничений в задаче (1), (13)–(18) неполиномиально и оценивается порядком 2^n. Поэтому в задачах локальной оптимизации большой размерности предлагается осуществлять их декомпозицию. Рассмотрим множество $Q=\{w^1, w^2, \ldots, w^n\}$ и осуществим его разбиение на q попарно непересекающихся подмножеств. Введем следующие обозначения:

$$Q=\bigcup_{k=1}^{q} Q^k,\ Q^k=\{r^{m_1}, r^{m_2}, \ldots, r^{m_{l_k}}\}, \tag{19}$$

$$M^k=\{m_1, m_2, \ldots, m_{l_k}\},\ m_1<m_2<\ldots<m_{l_k},\ k\in J_q, \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^{q} l_k = n\,.$$

В соответствии с разбиением (19), (20) представим множество $E(w^1, w^2, \ldots, w^n)$ в виде прямого произведения:

$$E(w^1, w^2, \ldots, w^n)=\prod_{k=1}^{q} E^k(w^{m_1}, w^{m_2}, \ldots, w^{m_{l_k}})\,.$$

При этом ограничения вида (5)–(7) записываются отдельно для каждого множества $E^k(w^{m_1}, w^{m_2}, \ldots, w^{m_{l_k}})$, $k\in J_q$. Выбор способа разбиения $Q=\{w^1, w^2, \ldots, w^n\}$ с последующим формированием ограничений, задающих множества $E^k(w^{m_1}, w^{m_2}, \ldots, w^{m_{l_k}})$, $k\in J_q$, задает семейство модификаций предложенного подхода.

Пусть получено некоторое локальное решение задачи (1)–(3) или его приближение при фиксированных физико-метрических параметрах $w^i=w^{i,0}$, $i\in J_n$. Это решение можно улучшить, выбирая его в качестве начальной точки и рассматривая $w^1, w^2, \ldots, w^n$ как независимые переменные. При этом осуществляется декомпозиция исходной задачи путем выбора некоторого разбиения системы ограничений по правилу (19), (20). Далее находится новое локальное решение задачи, которое можно улучшить, выбирая его в качестве начальной точки и формируя новое разбиение множества $Q=\{w^1, w^2, \ldots, w^n\}$.

ПОСТРОЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ РАВНОВЕСНОЙ УПАКОВКИ

В качестве иллюстрации предложенного подхода рассмотрим следующую задачу [19, 20]. Пусть в двумерном евклидовом пространстве R^2 заданы круг S_0 с центром в точке $p^0=(0,0)$ и семейство кругов S_i, $i\in J_n$, с радиусами r_i и массами $u_i, i \in J_n$. Полагаем, что центр тяжести круга S_i находится в его геометрическом центре. Упаковку назовем равновесной, если центр тяжести семейства кругов $S_i, i \in J_n$, совпадает с центром круга S_0. Требуется найти равновесную упаковку кругов $S_1, \ldots, S_n$ в круге S_0 минимального радиуса r_0.

Обозначим $p^i = (x_i, y_i)$, $i \in J_n$, координаты центров кругов. Тогда математическая постановка задачи примет вид

$$r_0 \to \min \tag{21}$$

при ограничениях

$$x_i^2 + y_i^2 \le (r_0 - r_i)^2, \ i \in J_n, \tag{22}$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \ge (r_i - r_j)^2, \ i \in J_n, \ j \in J_n, \ i < j, \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i u_i = 0. \tag{24}$$

Таким образом, имеем задачу математического программирования с $2n+1$ переменными r_0, x_i, y_i, $i \in J_n$. Заметим, что в приведенной постановке радиусы $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и массы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ являются константами. Зафиксируем $r_i^0 = r_i$, $u_i^0 = u_i$, $i \in J_n$, и предположим, что $r_1^0 < r_2^0 < \ldots < r_n^0$. В соответствии с методом расширения пространства ослабим ограничения на радиусы кругов и будем считать их независимыми переменными. Построим такой интерполяционный полином $u = f(r)$ в общем случае (n-1)-й степени, что для пар точек (r_i^0, u_i^0) выполняются условия

$$u_i^0 = f(r_i^0), i \in J_n. \tag{25}$$

Сформируем систему ограничений

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} r_i^0, \tag{26}$$

$$\sum_{i \in \Omega} r_i \ge \sum_{i=1}^{|\Omega|} r_i^0 \quad \forall \Omega \subset J_n, \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (r_i - \tau)^2 = \sum_{i=1}^{n} (r_i^0 - \tau)^2, \tag{28}$$

где $\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_i^0$.

Система уравнений и неравенств (26)–(28) описывает множество всевозможных перестановок из чисел $\{r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0\}$. Таким образом, метод искусственного расширения пространства позволил сформировать задачу (21)–(28) в пространстве переменных r_0, x_i, y_i, r_i, u_i, $i \in J_n$.

Существенным преимуществом формализации задачи равновесной упаковки кругов в виде (21)–(28) является ее квадратичное представление. Однако количество линейных ограничений в системе (26), (27) равно 2^n. Поэтому реализация классических методов нелинейной оптимизации ограничивается размерностью задачи. При этом учет свойств линейных и квадратичных функций на комбинаторных многогранниках позволяет в ряде случаев обходить возникающие трудности [21–24].

Заметим, что использование радиусов кругов как независимых переменных в рамках иного концептуального подхода к решению некоторых классов задач упаковки рассматривалось в работах [25–27], подтверждая перспективность указанного направления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложен новый взгляд на формализацию задач размещения как задач математического программирования путем выделения их комбинаторной структуры. В результате введения искусственных переменных удалось сформировать дополнительную систему ограничений, задающих множество перестановок физико-метрических параметров. Предложен подход к построению эквивалентной математической модели задачи путем расширения размерности пространства переменных в исходной постановке. Это позволяет за счет искусственных переменных преодолеть область притяжения локальных эктремумов исходной задачи. Таким образом, указанный метод, в первую очередь, следует рассматривать как способ улучшения локальных решений задачи. Перспективным представляется использование метода в различных схемах глобальной оптимизации в задачах покрытия [28–30].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Cutting and packing problems for irregular objects with continuous rotations: Mathematical modeling and nonlinear optimization. *Journal of Operational Research Society.* 2016. Vol. 67, N 5. P. 786–800.
2. Bennell J.A., Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A. Optimal clustering of a pair of irregular objects. *Journal of Global Optimization.* 2015. Vol. 61, N 3. P. 497–524.
3. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization.* 2016. Vol. 65, N 2. P. 283–307.
4. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. *Computational Geometry: Theory and Applications.* 2010. Vol. 43, N 5. P. 535–553.
5. Bortfeldt A., Wäscher G. Constraints in container loading: A state-of-the-art review. *European Journal of Operational Research.* 2013. Vol. 229, N 1. P. 1–20.
6. Fasano G. Optimized packings with applications. *Optimization and Its Applications.* G. Fasano, J.D. Pintér (Eds.). New York: Springer. 2015. Vol. 105. 326 p.
7. Hifi M., Yousef L. Handling lower bound and hill-climbing strategies for sphere packing problems. S. Fidanova (Ed.), *Recent Advances in Computational Optimization Studies in Computational Intelligence*. New York: Springer. 2016. Vol. 610. P. 145–164.
8. M’Hallah R., Alkandari A., Mladenovic N. Packing unit spheres into the smallest sphere using VNS and NLP. *Computers and Operations Research.* 2013. Vol. 40, N 2. P. 603–615.
9. Vancroonenburg W., Verstichel J., Tavernier K., Berghe G.V. Transportation research. Part E: Logistics and transportation review. Pergamon, 2014. P. 70–83.
10. Стоян Ю.Г. Об одном обобщении функции плотного размещения. *Докл. АН УССР.* 1980. № 8. С. 70–74.
11. Stoyan Yu.G., Scheithauer G., Romanova T. Ф-functions for primary 2D-objects. *Studia Informatica Universalis: Int. J. Informatics.* 2002. Vol. 2. P. 1–32.
12. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous representations and functional extensions in combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. Vol. 52, N 6. P. 921–930.
13. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Functional and analytic representations of the general permutations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2016. Vol. 1, N 4. P. 27–38.
14. Емеличев В.А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 344 с.
15. Yakovlev S.V. The theory of convex continuations of functions on vertices of convex polygons. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1994. Vol. 34, N 7. P. 1112–1119.
16. Pichugina O., Yakovlev S. Convex extensions and continuous functional representations in optimization with their applications. *J. Coupled Syst. Multiscale Dyn.* 2016. Vol. 4, N 2. P. 129–152.
17. Yakovlev S.V. Bounds on the minimum of convex functions on Euclidean combinatorial sets. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1989. Vol. 25, N 3. P. 385–391.

18. Яковлев С.В. О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов. *Доклады НАН Украины.* 2017. № 9. С. 55–61.
19. Ненахов Э.А., Романова Т.Е., Стецюк П.И. Равновесная упаковка кругов в круг минимального радиуса. *Теория оптимальных решений.* 2013. С. 143–153.
20. Stetsyuk P.I., Romanova T.E., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem. *Optimization Letters.* 2015. Vol. 10, N 6. P. 1347–1360.
21. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous approaches to the unconstrained binary quadratic problems. Mathematical and computational approaches in advancing modern science and engineering. Edited J. Bélair et al. Switzerland: Springer, 2016. P. 689–700.
22. Stoyan Yu.G., Yakovlev S.V., Parshin O.V. Quadratic optimization on combinatorial sets in R^n. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1991. Vol. 27, N 4. P. 562–567.
23. Yakovlev S.V., Grebennik I.V. Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1993. Vol. 29, N 5. P. 419–426.
24. Yakovlev S.V., Valuiskaya O.A. Optimization of linear functions at the vertices of a permutation polyhedron with additional linear constraints. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2001. Vol. 53, N 9. P. 1535–1545.
25. Stoyan Yu.G., Scheithauer G., Yaskov G.N. Packing unequal spheres into various containers. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. Vol. 52, N 3. P. 419–426.
26. Stoyan Yu., Yaskov G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm. *Optimization Letters.* 2014. Vol. 8, N 3. P. 949–970.
27. Yaskov G.N. Packing non-equal hyperspheres into a hypersphere of minimal radius. *Проблемы машиностроения.* 2014. Т. 17, № 2. С. 48–53.
28. Yakovlev S.V. On a class of problems on covering of a bounded set. *Acta Mathematica Hungarica*. 1989. Vol. 53, N 3. P. 253–262.
29. Gerasin S.N., Shlyakhov V.V., Yakovlev S.V. Set coverings and tolerance relations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2008, Vol. 44, N 3. P. 333–340.
30. Shekhovtsov S.B., Yakovlev S.V. Formalization and solution of one class of covering problem in design of control and monitoring systems. *Autom. Remote Control.* 1989, Vol. 50, N 5. P. 705–710.

Надійшла до редакції 10.04.2017

С.В. Яковлєв

МЕТОД ШТУЧНОГО РОЗШИРЕННЯ ПРОСТОРУ У ЗАДАЧАХ РОЗМІЩЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ’ЄКТІВ

Анотація. Розглянуто задачу оптимального розміщення геометричних об’єктів із заданими формою і фізико-метричними параметрами. Виділено комбінаторну структуру задачі. На основі штучного розширення розмірності простору сформульовано еквівалентну постановку вихідної задачі, у якої фізико-метричні параметри є незалежними змінними. Розглянуто приклад побудови рівноважної моделі задачі упаковки кругів у круг мінімального радіусу.

Ключові слова: оптимальне розміщення, комбінаторна множина, рівноважне пакування.

S.V. Yakovlev

THE METHOD OF ARTIFICIAL SPACE EXPANSION IN PROBLEMS OF OPTIMAL PLACEMENT OF GEOMETRIC OBJECTS

Abstract. The problem of optimal placement of geometric objects with specified shape and physical-metric parameters is considered. The combinatorial structure of the problem is defined. An equivalent problem is formulated based on the artificial expansion of space dimension with physical-metric parameters being independent variables. The proposed approach is illustrated by the solution of balanced circular packing problem.

Keywords: optimal packing problem, combinatorial set, balanced packing.

Яковлев Сергей Всеволодович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», e-mail: svsyak7@gmail.com.