УДК 519.6

Н.В. МАЙКО

УЛУЧШЕННЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ОТ КРАЕВЫХ И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Аннотация. Получены улучшенные оценки точности сеточных решений первой краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности, учитывающие влияние краевого и начального условий. Показано, что точность схемы выше вблизи боковых граней и дна пространственно-временного параллелепипеда.

Ключевые слова: параболическое уравнение, начально-краевая задача, разностная схема, оценка точности, учет влияния краевого и начального условий.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

В теории и приложении метода сеток для стационарных и нестационарных задач представляет интерес вопрос о точности приближенного решения вблизи той части границы области, где задано краевое условие Дирихле. Поскольку сеточное решение удовлетворяет такому условию точно, естественно ожидать, что в приграничных узлах скорость сходимости дискретного решения к точному решению будет выше, чем во внутренних узлах. Это предположение подтверждается в публикациях [1–5].

Так, в [1] исследована точность разностной схемы для уравнения Пуассона со смешанным краевым условием (на нижней грани Γ_2 единичного куба Ω задано краевое условие Неймана, на других его гранях — условие Дирихле) и получена оценка

$$|z(x)| \le C(1-x_3)h^2, \ \ x=(x_1,x_2,x_3)\in\omega\cup\gamma_2,$$

показывающая, что точность схемы повышается на единицу вблизи грани $x_3=1$.

В работе [4] этот результат усилен оценкой

$$|z(x)| \le Ch^2 \upsilon(x)\,|u|_{C^4(\overline{\Omega})}, \ \ x=(x_1,x_2,x_3)\in\omega\cup\gamma_2,$$

где функция $\upsilon(x)$ ведет себя как $O(h)$ вблизи граней единичного куба Ω, $O\left(h^2\ln^2\frac{1}{h}\right)$ — вблизи его ребер, $O\left(h^2\ln\frac{1}{h}\right)$ — вблизи его вершин (постоянная C не зависит от h и решения $u(x)$). Кроме того, в [4] для уравнения Пуассона с краевым условием Дирихле на границе единичного квадрата D получена оценка

$$|z(x)| \le Ch^2 \upsilon(x)\,|u|_{W^4_\infty(D)}, \ \ x=(x_1,x_2)\in\omega,$$

где функция $\upsilon(x)$ является величиной $O(h)$ вблизи сторон квадрата и величиной $O\left(h^2\ln\frac{1}{h}\right)$ — вблизи его вершин.

В работе [5] с применением иного подхода доказана оценка точности конечно-разностной аппроксимации смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона в единичном квадрате D (с условием Ньютона на его левой стороне Γ_{-1} и условием Дирихле на других его сторонах)

$$| z(x) | \le M\rho^{1/2}(x) | h |^2 | u |_{W_2^4(D)}, \ x=(x_1, x_2) \in \omega \cup \gamma_{-1}, \ | h |^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

где $\rho(x) = \min \{(1-x_1)(1-x_2), (1-x_1)x_2\}$.

Вопрос о влиянии краевых и начальных условий на порядок точности разностной схемы для уравнения теплопроводности исследован в публикациях [6–8]. В работе [6] изучена точность традиционных конечно-разностных аппроксимаций первой краевой задачи для одно- и двумерного параболического уравнения. В одномерном случае при условии $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \in L_2((0;1)\times(0;T))$ доказаны оценки

$$\left(\sum_{\eta=\tau}^{t} \tau \left(\frac{z(x,\eta)}{x(1-x)} \right)^2 \right)^{1/2} \le M(h^2+\tau), \qquad || z(\cdot, t) || \le M \sqrt{t(2+\ln^2 t)}(h^2+\tau),$$

учитывающие влияние соответственно краевого и начального условий, а в двумерном случае — оценки

$$\left(\sum_{\eta=\tau}^{t} \tau \frac{(z(x,\eta))^2}{\rho(x)} \right)^{1/2} \le M(| h |^2 + \tau), \quad || z(\cdot, t) || \le M\sqrt{t(2+\ln^2 t)}(| h |^2 + \tau),$$

где $\rho(x) = \min\{x_1x_2, (1-x_1)x_2, (1-x_2)x_1, (1-x_1)(1-x_2)\}$, $x=(x_1, x_2)$, $| h |^2 = h_1^2 + h_2^2$.

Идеи работы [6] развиты в [7, 8], где получены априорные оценки с весом для точности метода сеток при решении начально-краевой задачи для одно- и двумерного параболического уравнения в случае смешанного краевого условия (с условиями Дирихле и Неймана на различных частях границы области). Из доказанных оценок следует, что точность схемы в случае одномерного параболического уравнения возрастает вблизи боковой стороны, где задано краевое условие Дирихле, и дна пространственно-временного прямоугольника, а в случае двумерного параболического уравнения — вблизи боковых граней (с краевым условием Дирихле) и дна пространственно-временного параллелепипеда.

Цель настоящей работы — продолжить исследование [6] и получить улучшенные оценки точности сеточных решений первой краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности, учитывающие влияние краевого и начального условий.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + f(x,t), \ (x,t) \in D_T = D \times (0,T), \\
u(x,t) = 0, \ (x,t) \in \Gamma \times (0;T), \\
u(x,0) = u_0(x), \ x \in D,
\end{gathered} \tag{1}$$

где $x=(x_1, x_2)$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $D = \{x=(x_1,x_2): 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\}$ — единичный квадрат, $\Gamma = \partial D$ — граница квадрата D.

Введем сеточные множества:

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h, \ i_\alpha = \overline{1, N-1}, \ h = 1/N\}, \ N \ge 2 \text{ — целое},$$

$$\overline{\omega}_\alpha = \omega_\alpha \cup \{0\} \cup \{1\}, \ \omega = \omega_1 \times \omega_2, \ \overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2, \ \gamma = \overline{\omega} \setminus \omega,$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \ j = \overline{1, M}, \ \tau = T/M\}, \ M \ge 2 \text{ — целое}.$$

С помощью операторов [9]

$$(T_1 v)(x_1, x_2) = \frac{1}{h_1^2} \int\limits_{x_1 - h_1}^{x_1 + h_1} (h_1 - |x_1 - \xi|) v(\xi, x_2)\, d\xi, \ x \in \omega,$$

$$(T_2 v)(x_1, x_2) = \frac{1}{h_2^2} \int\limits_{x_2 - h_2}^{x_2 + h_2} (h_2 - |x_2 - \xi|) v(x_1, \xi)\, d\xi, \ x \in \omega,$$

аппроксимируем задачу (1) разностной схемой

$$\begin{gathered} y_{\bar{t}}(x, t) = (\Lambda y)(x, t) + (T_1 T_2 f)(x, t), \ (x, t) \in \omega \times \omega_\tau, \\ y(x, t) = 0, \ (x, t) \in \gamma \times \omega_\tau, \\ y(x, 0) = u_0(x), \ x \in \omega, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $x \in \omega$, $\alpha = 1, 2$.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Для погрешности $z(x, t) = y(x, t) - u(x, t)$ имеем задачу

$$\begin{gathered} z_{\bar{t}}(x, t) = (\Lambda z)(x, t) + \psi(x, t), \ (x, t) \in \omega \times \omega_\tau, \\ z(x, t) = 0, \ (x, t) \in \gamma \times \omega_\tau, \\ z(x, 0) = 0, \ x \in \omega, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\psi = \Lambda u + T_1 T_2 f - u_{\bar{t}} = \Lambda_1 \eta_1 + \Lambda_2 \eta_2 + \eta_3$ — погрешность аппроксимации,

$$\eta_\alpha(x, t) = u(x, t) - (T_{3-\alpha} u)(x, t), \ \alpha = 1, 2, \ \eta_3(x, t) = \frac{\partial (Tu)}{\partial t}(x, t) - u_{\bar{t}}(x, t),$$

$$(x, t) \in \omega \times \omega_\tau.$$

На множестве H_h сеточных функций, заданных на $\overline{\omega}$ и обращающихся в нуль на γ, определим скалярное произведение и норму:

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} h^2 y(x) v(x),$$

$$\| v \| = \| v \|_{L_2(\omega)} = \sqrt{(v, v)} = \left(\sum_{x \in \omega} h^2 v^2(x) \right)^{1/2}.$$

Кроме того, используем обозначение $\| v \|_{C(\omega)} = \max\limits_{x \in \omega} | v(x) |$.

Известно (см., например, [10]), что разностная спектральная задача

$$\begin{gathered} \Lambda w + \lambda w = 0, \ x \in \omega, \\ w = 0, \ x \in \gamma, \end{gathered} \tag{4}$$

имеет решения

$$w_{k_1 k_2}(x) = 2 \sin k_1 \pi x_1 \cdot \sin k_2 \pi x_2, \ \| w_{k_1 k_2} \| = 1,$$

$$\lambda_{k_1 k_2} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h}{2} + \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h}{2}, \quad k_1, k_2 = 1, \ldots, N - 1.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{gathered} v_{\bar{t}}(x, t) = (\Lambda v)(x, t) + 1, \ (x, t) \in \omega \times \omega_\tau, \\ v(x, t) = 0, \ (x, t) \in \gamma \times \omega_\tau, \\ v(x, 0) = 0, \ x \in \omega. \end{gathered} \tag{5}$$

Ее решение $v(x,t)$ ищем в виде

$$v(x,t)=\sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N-1} v_{k_1k_2}(t) w_{k_1k_2}(x). \tag{6}$$

Функция $v(x,t)$ удовлетворяет краевому условию в (5), а для выполнения начального условия в (5) полагаем $v_{k_1k_2}(0)=0,\ k_1, k_2=1,\ldots,N-1.$

Воспользуемся представлением

$$1=\sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N-1} c_{k_1k_2} w_{k_1k_2}(x), \tag{7}$$

где

$$c_{k_1k_2}=(1, w_{k_1k_2})=\sum_{x\in\omega} h^2 w_{k_1k_2}(x)=\sum_{x\in\omega} h^2 2\sin k_1\pi x_1\cdot\sin k_2\pi x_2=$$

$$=2h^2\sum_{i=1}^{N-1}\sin k_1\pi ih\cdot\sum_{j=1}^{N-1}\sin k_1\pi jh=$$

$$=2h^2\frac{\sin\frac{(N-1)k_1\pi h}{2}\sin\frac{Nk_1\pi h}{2}}{\sin\frac{k_1\pi h}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{(N-1)k_2\pi h}{2}\sin\frac{Nk_2\pi h}{2}}{\sin\frac{k_2\pi h}{2}}=$$

$$=2h^2\frac{\cos\frac{k_1\pi h}{2}-\cos\left(Nk_1\pi h-\frac{k_1\pi h}{2}\right)}{2\sin\frac{k_1\pi h}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{k_2\pi h}{2}-\cos\left(Nk_2\pi h-\frac{k_2\pi h}{2}\right)}{2\sin\frac{k_2\pi h}{2}}=$$

$$=2h^2\frac{\cos\frac{k_1\pi h}{2}-(-1)^{k_1}\cos\frac{k_1\pi h}{2}}{2\sin\frac{k_1\pi h}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{k_2\pi h}{2}-(-1)^{k_2}\cos\frac{k_2\pi h}{2}}{2\sin\frac{k_2\pi h}{2}}=$$

$$=h^2\frac{(1-(-1)^{k_1})(1-(-1)^{k_2})\cos\frac{k_1\pi h}{2}\cos\frac{k_2\pi h}{2}}{2\sin\frac{k_1\pi h}{2}\sin\frac{k_2\pi h}{2}}.$$

Подставляя (6) и (7) в уравнение задачи (5), имеем

$$\sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N-1}\left[\frac{v_{k_1k_2}(t)-v_{k_1k_2}(t-\tau)}{\tau}+\lambda_{k_1k_2}v_{k_1k_2}(t)-c_{k_1k_2}\right]w_{k_1k_2}(x)=0,$$

откуда

$$\frac{v_{k_1k_2}(t)-v_{k_1k_2}(t-\tau)}{\tau}+\lambda_{k_1k_2}v_{k_1k_2}(t)-c_{k_1k_2}=0,\ \ k_1, k_2=1,\ldots,N-1,$$

или

$$v_{k_1k_2}(t)=\frac{1}{1+\tau\lambda_{k_1k_2}}v_{k_1k_2}(t-\tau)+\frac{\tau}{1+\tau\lambda_{k_1k_2}}c_{k_1k_2},\ \ t\in\omega_\tau,$$

$$v_{k_1k_2}(0)=0,$$

$$k_1, k_2=1,\ldots,N-1.$$

Решая рекуррентное соотношение, получаем

$$v_{k_1k_2}(t)=\left(1-\left(\frac{1}{1+\tau\lambda_{k_1k_2}}\right)^{t/\tau}\right)\frac{c_{k_1k_2}}{\lambda_{k_1k_2}},\ t\in\omega_\tau .$$

Таким образом,

$$v(x,t)=\sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N-1}\left(1-\left(\frac{1}{1+\tau\lambda_{k_1k_2}}\right)^{t/\tau}\right)\frac{c_{k_1k_2}}{\lambda_{k_1k_2}}w_{k_1k_2}(x),\ (x,t)\in\omega\times\omega_\tau , \tag{8}$$

где $w_{k_1k_2}(x), \lambda_{k_1k_2}, c_{k_1k_2}$ определены в (4) и (7).

Применим теорему сравнения [10] к задачам (3) и (5). Тогда

$$|z(x,t)|\le v(x,t)\cdot\max_{t\in\omega_\tau}||\psi(\cdot,t)||_{C(\omega)},\ (x,t)\in\omega\times\omega_\tau . \tag{9}$$

Рассмотрим погрешность аппроксимации $\psi(x,t)$. Для слагаемого $\eta_1(x,t)$ имеем

$$\eta_1(x,t)=u(x,t)-\frac{1}{h_2^2}\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)u(x_1,\xi,t)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{h_2^2}\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)(u(x_1,x_2,t)-u(x_1,\xi,t))\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{h_2^2}\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)\,d\xi\int_{\xi}^{x_2}\frac{\partial u(x_1,\xi_1,t)}{\partial\xi_1}d\xi_1=$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi|)\,d\xi\int_{\xi}^{x_2}d\xi_1\left(\frac{\partial u(x_1,\xi_1,t)}{\partial\xi_1}-\frac{1}{2h}\int_{x_2-h}^{x_2+h}\frac{\partial u(x_1,\xi_2,t)}{\partial\xi_2}d\xi_2\right)=$$

$$=\frac{1}{2h^3}\int_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi|)\,d\xi\int_{\xi}^{x_2}d\xi_1\int_{x_2-h}^{x_2+h}\left(\frac{\partial u(x_1,\xi_1,t)}{\partial\xi_1}-\frac{\partial u(x_1,\xi_2,t)}{\partial\xi_2}\right)d\xi_2=$$

$$=\frac{1}{2h^3}\int_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi|)\,d\xi\int_{\xi}^{x_2}d\xi_1\int_{x_2-h}^{x_2+h}d\xi_2\int_{\xi_2}^{\xi_1}\frac{\partial^2 u(x_1,\xi_3,t)}{\partial\xi_3^2}d\xi_3,$$

откуда с учетом соотношения $\left(T_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)(x,t)=u_{\bar{x}_1x_1}(x,t),\ (x,t)\in\omega\times\omega_\tau$, получим представление

$$\eta_{1\bar{x}_1x_1}(x,t)=$$

$$=\frac{1}{2h^5}\int_{x_1-h}^{x_1+h}(h-|x_1-\xi_4|)\,d\xi_4\int_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi|)\,d\xi\int_{\xi}^{x_2}d\xi_1\int_{x_2-h}^{x_2+h}d\xi_2\int_{\xi_2}^{\xi_1}\frac{\partial^4 u(\xi_4,\xi_3,t)}{\partial\xi_4^2\partial\xi_3^2}d\xi_3.$$

Тогда

$$|\eta_{1\bar{x}_1x_1}(x,t)|\le 4h^2\left\|\frac{\partial^4 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\right\|_{L_\infty(D_T)}. \tag{10}$$

Аналогично выводится оценка

$$|\eta_{2\bar{x}_2x_2}(x,t)|\le 4h^2\left\|\frac{\partial^4 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\right\|_{L_\infty(D_T)}. \tag{11}$$

Для слагаемого $\eta_3(x, t)$ имеем

$$\eta_3(x,t)=\frac{\partial (Tu)}{\partial t}(x,t)-u_{\bar{t}}(x,t)=$$

$$=\frac{1}{h^4}\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}(h-|x_1-\xi_1|)d\xi_1\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi_2|)\frac{\partial u(\xi_1,\xi_2,t)}{\partial t}d\xi_2-\frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t}\frac{\partial u(x_1,x_2,\eta)}{\partial \eta}d\eta=$$

$$=\frac{1}{\tau h^4}\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}(h-|x_1-\xi_1|)d\xi_1\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi_2|)d\xi_2\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial u(\xi_1,\xi_2,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x_1,x_2,\eta)}{\partial \eta}\right)d\eta=$$

$$=\frac{1}{\tau h^4}\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}(h-|x_1-\xi_1|)d\xi_1\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi_2|)d\xi_2\times$$

$$\times\int\limits_{t-\tau}^{t}d\eta\left(\int\limits_{\eta}^{t}\frac{\partial^2 u(\xi_1,\xi_2,\eta_1)}{\partial \eta_1^2}d\eta_1+\int\limits_{x_1}^{\xi_1}\frac{\partial^2 u(\xi_3,\xi_2,\eta)}{\partial \xi_3\partial\eta}d\xi_3+\int\limits_{x_2}^{\xi_2}\frac{\partial^2 u(x_1,\xi_4,\eta)}{\partial \xi_4\partial\eta}d\xi_4\right)=$$

$$=\frac{1}{\tau h^4}\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}(h-|x_1-\xi_1|)d\xi_1\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi_2|)d\xi_2\int\limits_{t-\tau}^{t}d\eta\int\limits_{\eta}^{t}\frac{\partial^2 u(\xi_1,\xi_2,\eta_1)}{\partial \eta_1^2}d\eta_1+$$

$$+\frac{1}{\tau h^4}\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}(h-|x_1-\xi_1|)d\xi_1\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi_2|)d\xi_2\times$$

$$\times\int\limits_{t-\tau}^{t}d\eta\int\limits_{x_1}^{\xi_1}d\xi_3\left(\frac{\partial^2 u(\xi_3,\xi_2,\eta)}{\partial \xi_3\partial\eta}-\frac{1}{2h}\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}\frac{\partial^2 u(\xi_5,\xi_2,\eta)}{\partial \xi_5\partial\eta}d\xi_5\right)+$$

$$+\frac{1}{\tau h^4}\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}(h-|x_1-\xi_1|)d\xi_1\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi_2|)d\xi_2\times$$

$$\times\int\limits_{t-\tau}^{t}d\eta\int\limits_{x_2}^{\xi_2}d\xi_4\left(\frac{\partial^2 u(x_1,\xi_4,\eta)}{\partial \xi_4\partial\eta}-\frac{1}{4h^2}\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}d\xi_6\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h}\frac{\partial^2 u(\xi_6,\xi_7,\eta)}{\partial \xi_5\partial\eta}d\xi_7\right)=$$

$$=\frac{1}{\tau h^4}\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}(h-|x_1-\xi_1|)d\xi_1\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi_2|)d\xi_2\int\limits_{t-\tau}^{t}d\eta\int\limits_{\eta}^{t}\frac{\partial^2 u(\xi_1,\xi_2,\eta_1)}{\partial \eta_1^2}d\eta_1+$$

$$+\frac{1}{2\tau h^5}\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}(h-|x_1-\xi_1|)d\xi_1\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi_2|)d\xi_2\times$$

$$\times\int\limits_{t-\tau}^{t}d\eta\int\limits_{x_1}^{\xi_1}d\xi_3\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}d\xi_5\int\limits_{\xi_5}^{\xi_3}\frac{\partial^3 u(\xi_8,\xi_2,\eta)}{\partial \xi_8^2\partial\eta}d\xi_8+$$

$$+\frac{1}{\tau h^4}\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}(h-|x_1-\xi_1|)d\xi_1\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h}(h-|x_2-\xi_2|)d\xi_2\times$$

$$\times\int\limits_{t-\tau}^{t}d\eta\int\limits_{x_2}^{\xi_2}d\xi_4\int\limits_{x_1-h}^{x_1+h}d\xi_6\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h}d\xi_7\left(\int\limits_{\xi_6}^{x_1}\frac{\partial^3 u(\xi_9,\xi_4,\eta)}{\partial \xi_9\partial\xi_4\partial\eta}d\xi_9+\int\limits_{\xi_7}^{\xi_4}\frac{\partial^3 u(\xi_6,\xi_{10},\eta)}{\partial \xi_{10}^2\partial\eta}d\xi_{10}\right),$$

откуда следует оценка

$$|\eta_3(x,t)| \le \tau \left\| \frac{\partial^2 u(x_1,x_2,t)}{\partial t^2} \right\|_{L_\infty(D_T)} + 4h^2 \left(\left\| \frac{\partial^3 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2 \partial t} \right\|_{L_\infty(D_T)} + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{\partial^3 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2 \partial t} \right\|_{L_\infty(D_T)} + \left\| \frac{\partial^3 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial t} \right\|_{L_\infty(D_T)} \right). \qquad (12)$$

С учетом неравенств (10)–(12) оценка (9) принимает вид

$$|z(x,t)| \le M\upsilon(x,t)(\tau + h^2), \ (x,t) \in \omega \times \omega_\tau, \qquad (13)$$

где M — константа, не зависящая от h и τ.

Рассмотрим в (8) функцию $\upsilon(x,t)$. Для всех узлов $(x,t) \in \omega \times \omega_\tau$ имеем

$$|\upsilon(x,t)| = \left| \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{1}{1+\tau\lambda_{k_1k_2}} \right)^{t/\tau} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{h^4 (1-(-1)^{k_1})(1-(-1)^{k_2}) \cos\frac{k_1\pi h}{2} \cos\frac{k_2\pi h}{2}}{4 \sin\frac{k_1\pi h}{2} \sin\frac{k_2\pi h}{2} \left(\sin^2\frac{k_1\pi h}{2} + \sin^2\frac{k_2\pi h}{2} \right)} \sin k_1\pi x_1 \cdot \sin k_2\pi x_2 \right| \le$$

$$\le \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{k_1k_2(k_1^2+k_2^2)} \le \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{2k_1^2k_2^2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k_1=1}^{N-1} \frac{1}{k_1^2} \right) \left(\sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{k_2^2} \right) < \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^2 = \frac{\pi^4}{72}. \quad (14)$$

Оценим $\upsilon(x,t)$ в приграничных узлах (h, x_2, t), $(1-h, x_2, t)$, (x_1, h, t), $(x_1, 1-h, t)$. Например, для (h, x_2, t) выполняется

$$|\upsilon(h,x_2,t)| = \left| \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{1}{1+\tau\lambda_{k_1k_2}} \right)^{t/\tau} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{h^4 (1-(-1)^{k_1})(1-(-1)^{k_2}) \cos\frac{k_1\pi h}{2} \cos\frac{k_2\pi h}{2}}{4 \sin\frac{k_1\pi h}{2} \sin\frac{k_2\pi h}{2} \left(\sin^2\frac{k_1\pi h}{2} + \sin^2\frac{k_2\pi h}{2} \right)} \sin k_1\pi h \cdot \sin k_2\pi x_2 \right| \le$$

$$\le 2h \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{k_2(k_1^2+k_2^2)} < 2h \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{k_2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2+k_2^2} =$$

$$= 2h \sum_{k_2=1}^{N-1} \frac{1}{k_2} \frac{\pi k_2 \operatorname{cth}(\pi k_2) - 1}{2k_2^2} < 2h \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{\pi k_2 \operatorname{cth}(\pi k_2) - 1}{2k_2^3} < 4h. \qquad (15)$$

Получим оценку для $\upsilon(x,t)$ вблизи угловых точек области. Так, в узле (h, h, t) имеем

$$|\upsilon(h,h,t)| = \left| \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{1}{1+\tau\lambda_{k_1k_2}} \right)^{t/\tau} \right) \times \right.$$

$$\times \frac{h^4(1-(-1)^{k_1})(1-(-1)^{k_2})\cos\frac{k_1\pi h}{2}\cos\frac{k_2\pi h}{2}}{4\sin\frac{k_1\pi h}{2}\sin\frac{k_2\pi h}{2}\left(\sin^2\frac{k_1\pi h}{2}+\sin^2\frac{k_2\pi h}{2}\right)}\sin k_1\pi h\cdot\sin k_2\pi h \Bigg| \le 4h^2\sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N-1}\frac{1}{k_1^2+k_2^2}<$$

$$< 4h^2\sum_{k_1=1}^{N-1}\frac{\pi k_1 \operatorname{cth}(\pi k_1)-1}{2k_1^2} < 2h^2\pi\operatorname{cth}\pi\sum_{k_1=1}^{N-1}\frac{1}{k_1} < 2h^2\pi\operatorname{cth}\pi\left(1+\sum_{k_1=2}^{N}\frac{1}{k_1}\right)\le$$

$$\le 2h^2\pi\operatorname{cth}\pi\left(1+\int_1^N\frac{dx}{x}\right) = h^2\pi\operatorname{cth}\pi(1+\ln N) < 2\pi\operatorname{cth}\pi h^2\ln\frac{1}{h}. \qquad (16)$$

Из неравенств (13)–(16) следует утверждение.

Теорема 1. Пусть решение $u(x_1, x_2, t)$ задачи (1) удовлетворяет условию $u\in W_\infty^4(D_T)$. Тогда точность разностной схемы (2) характеризуется оценкой

$$|z(x,t)| \le M\upsilon(x,t)(\tau+h^2),\ \ (x,t)\in\omega\times\omega_\tau, \qquad (17)$$

где M — константа, не зависящая от h и τ, а для функции $\upsilon(x,t)$ равномерно по $t\in\omega_\tau$ выполняются соотношения $\upsilon(x,t)=O(h)$ и $\upsilon(x,t)=O\left(h^2\ln\frac{1}{h}\right)$ вблизи сторон и вершин области D соответственно.

Исследуем теперь точность приближенного решения вблизи дна $t=0$ пространственно-временного параллелепипеда D_T. Рассмотрим функцию $\upsilon(x,t)$ при $t=\tau$:

$$\upsilon(x,\tau)=\sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N-1}\frac{\tau}{1+\tau\lambda_{k_1k_2}}\frac{c_{k_1k_2}}{\lambda_{k_1k_2}}w_{k_1k_2}(x),\ \ x\in\omega,$$

откуда с учетом неравенства $\lambda_{k_1k_2}=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k_1\pi h}{2}+\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k_2\pi h}{2}\ge 4(k_1^2+k_1^2)\ge 8$ получаем

$$\|\upsilon(\cdot,\tau)\|^2=\sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N-1}\left(\frac{\tau}{1+\tau\lambda_{k_1k_2}}\frac{c_{k_1k_2}}{\lambda_{k_1k_2}}\right)^2<\tau^2\sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N-1}\left(\frac{c_{k_1k_2}}{\lambda_{k_1k_2}}\right)^2\le$$

$$\le\frac{\tau^2}{64}\sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N-1}c_{k_1k_2}^2=\frac{\tau^2}{64}\|1\|^2=\frac{\tau^2}{64}\sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N-1}h^2=\frac{\tau^2}{64}(1-h)^2<\frac{\tau^2}{64}.$$

Отсюда и неравенства (13) следует оценка

$$\|z(\cdot,\tau)\|\le M\tau(\tau+h^2), \qquad (18)$$

где M — константа, не зависящая от h и τ.

Таким образом, оценки (17) и (18) свидетельствуют о повышении точности схемы (2) в приграничных узлах сеточного множества $\omega\times\omega_\tau$, что отражает влияние краевого и начального условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галба Е.Ф. О порядке точности разностной схемы для уравнения Пуассона со смешанным граничным условием. *Оптимизация алгоритмов программного обеспечения ЭВМ*: Сб. науч. тр. Киев: Ин.-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1985. С. 30–34.

2. Молчанов И.Н., Галба Е.Ф. О сходимости разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами. *Численные методы и технология разработки пакетов прикладных программ:* Сб. науч. тр. Киев.: Ин.-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1990. С. 161–165.
3. Makarov V. On a priori estimate of difference schemes giving an account of the boundary effect. *C. R. Acad. Bulg. Sci. (Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences)*. 1989. Vol. 42, N 5. P. 41–44.
4. Makarov V.L., Demkiv L.I. Weight uniform accuracy estimate of finite-difference method for Poisson equation taking into account boundary effect. *Numerical Analysis and its Application*: 4th Intern. Conf., Lozentz, Bulgaria, June 16–20, 2008. P. 92–103.
5. Майко Н.В., Рябичев В.Л. Оценка точности разностной схемы для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевых условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 5. С. 113–124.
6. Макаров В.Л., Демків Л.І. Оцінки точності різницевих схем для параболічних рівнянь, що враховують початково-крайовий ефект. *Доп. НАН України*. 2003. № 2. С. 26–32.
7. Майко Н.В. Оценки точности разностных схем для одномерного параболического уравнения с учетом эффекта от начальных и краевых условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 5. С. 154–163.
8. Mayko N.V. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for the two-dimensional heat equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2013. N 3(113). P. 91–106.
9. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. Москва: Высш. шк., 1987. 296 с.
10. Samarskii A.A. The theory of difference schemes. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001. 762 p.

Надійшла до редакції 03.08.2016

Н.В. Майко

ПОКРАЩЕНІ ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТУ ВІД КРАЙОВИХ І ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Анотація. Отримано покращені оцінки точності скінченно-різницевих апроксимацій першої крайової задачі для двовимірного рівняння теплопровідності з урахуванням впливу початкових і крайових умов. Показано, що точність схеми вища поблизу бічних граней і дна просторово-часового паралелепіпеда.

Ключові слова: параболічне рівняння, початково-крайова задача, різницева схема, оцінка точності, урахування впливу крайової та початкової умов.

N.V. Mayko

IMPROVED ERROR ESTIMATES OF THE FINITE-DIFFERENCE SCHEME FOR THE TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION WITH REGARD FOR THE EFFECT OF THE INITIAL AND BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. We obtain the improved error estimates of the finite-difference scheme for a two-dimensional parabolic equation in a unit square, considering the effect of the Dirichlet boundary condition and the initial condition. We prove that the accuracy order is higher near the sides and the bottom of the space-time parallelepiped.

Keywords: parabolic equation, initial-boundary problem, finite-difference scheme, error estimate, boundary and initial effects.

Майко Наталия Валентиновна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: natmaiko@gmail.com.