УДК 517.9+518.6

В.А. ПРУСОВ, А.Е. ДОРОШЕНКО

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ С ПРЕДЫСТОРИЕЙ

Аннотация. Исследованы теоретические аспекты построения семейства многошаговых одностадийных методов решения задачи Коши с предысторией для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены общие вопросы, связанные с проблемами дискретизации, аппроксимации, сходимости и устойчивости. Детально изучена проблема повышения точности численного решения. Представленные результаты пригодны также при численном решении уравнений в частных производных.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, многошаговый одностадийный метод, дискретизация, аппроксимация, сходимость, сильная устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

Исследуя вопросы гидродинамического моделирования атмосферных процессов, авторы настоящей статьи пришли к выводу, что оператор адвекции, входящий во все уравнения атмосферных моделей, вызывает наибольшее количество проблем при применении численных методов решения этих уравнений [1–6]. Оценки показывают [2], что аппроксимации горизонтальных членов адвекции являются основными источниками ошибок (почти 40% общей погрешности) при краткосрочном численном прогнозировании состояния атмосферы.

Пространственная конечно-разностная аппроксимация уравнения адвекции порождает ошибки ложного представления, описания фазовой скорости и вычислительной дисперсии, а также эффекты нелинейной неустойчивости [7]. При использовании симметричной разностной схемы второго порядка точности оказывается, что, во-первых, скорость адвекции меньше точной скорости адвекции (следствием этой ошибки является общее замедление процесса адвекции), и во-вторых, скорость адвекции изменяется в зависимости от волнового числа. Такая паразитарная дисперсия, в частности, достаточно значительна для самых коротких волн. Если переносится система, представляющая собой суперпозицию волн, то паразитарная дисперсия будет вызывать деформацию данной системы. Это касается в первую очередь таких мезомасштабных систем, как зарождающиеся фронты и циклоны, орографические и термические возмущения и другие, представляющие суперпозицию множества волн. По этой причине при численном прогнозировании состояния атмосферы данные системы, если они имеются в начальных полях, начинают очень быстро деформироваться, принимая более гладкую форму. Поскольку эти особенности полей очень важны в мезомасштабных процессах, представляет интерес эффект вычислительной дисперсии.

Очевидно, что схемы с нецентральными пространственными разностями, препятствующие распространению возмущений в направлении, противоположном физической адвекции, предпочтительнее схем, в которых пространственная производная аппроксимируется с помощью центральных разностей [8, 9]. Однако достаточно сильный сглаживающий эффект и только первый порядок точности нецентральных разностных операторов значительно уменьшают эти преимущества по сравнению с разностными операторами, имеющими второй порядок точности.

© В.А. Прусов, А.Е. Дорошенко, 2017

Приведенный анализ касался пространственной аппроксимации линейного уравнения адвекции. Но в моделях атмосферы приходится решать нелинейные уравнения гидродинамики, причем их нелинейность обусловлена наличием членов, описывающих именно адвекцию. Вследствие нелинейности уравнений гидродинамики появляется нелинейная неустойчивость и «взрыв» численного решения, если эти неблагоприятные условия нельзя предотвратить.

Основные трудности (в частности, ошибки ложного представления, описания фазовой скорости, а также вычислительная дисперсия) можно преодолеть представлением уравнений модели атмосферы в консервативной форме и применением разностных схем повышенного порядка точности для аппроксимации адвективных членов.

В работах [1, 3] предложен эффективный метод четвертого порядка точности для аппроксимации частных производных первого и второго порядков, содержащихся в системе уравнений модели циркуляции атмосферы. Здесь приведены результаты, позволяющие согласовать порядки аппроксимации на пространственной и временной сетках. Достигается это построением семейства эффективных повышенного порядка точности конечно-разностных многошаговых одностадийных схем решения задачи Коши.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В практике численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка используются, как правило, одношаговые методы [10–22], при построении которых предполагается привлекать информацию о решаемой задаче только на отрезке длиной в один шаг $\tau = t_l - t_{l-1}$, $l = \overline{1, N}$. Такие методы наряду с удобными для вычислений особенностями имеют один существенный недостаток — небольшую точность. В методах, точность $O(\tau^p)$ которых соответствует случаям $p > 1$, подобную информацию на каждом этапе процесса необходимо, вообще говоря, получать заново, что предопределяет большую трудоемкость соответствующих вычислительных правил. Отказавшись от требования одношаговости, вычислительные методы можно строить так, чтобы часть полученной информации на нескольких соседних шагах вычислительного процесса использовалась повторно. Подобные методы, располагающие информацией о решаемой задаче на отрезке длиной более одного шага, являются основным объектом исследования настоящей работы.

Статья посвящена теоретическим и практическим аспектам численного решения задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(y, t), \tag{1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0, \tag{2}$$

где $y_0 \in \mathcal{R}$, $f \in C(\mathcal{R} \to \mathcal{R})$, функция f удовлетворяет условию Липшица.

Точное решение поставленной таким образом исходной задачи существует и является единственным.

Цель настоящей работы — построение и анализ фундаментальных структурных свойств эффективной конечно-разностной *l*-шаговой одностадийной схемы решения задачи (1), (2). Дадим определение временно́й разностной сетки, на которой численно решим задачу (1), (2). Далее для простоты будем считать $t_0 = 0$, что не ограничит общности.

Определение 1. Сеткой на $[0, T]$ называется заданное конечное множество узлов $t_n \in [0, T]$, $n = \overline{0, N}$, такое, что

$$t_0 = 0, \; t_n > t_{n-1}, \; n = \overline{0, N}. \tag{3}$$

Величины $\tau_n = t_n - t_{n-1} > 0$, $n = \overline{1, N}$, называются шагами сетки $\omega_\tau = \{\tau_n, n = \overline{1, N}\}$, а $\gamma = t_{n-1} / t_n$, $n = \overline{1, N}$, — отношением шагов сетки. Таким образом, сетку $t_n \in [0, T]$, $n = \overline{0, N}$, можно задать также как множество ее шагов $\omega_\tau = \{\tau_n, n = \overline{1, N}\}$, где $\tau_n = t_n - t_{n-1} > 0$, $n = \overline{1, N}$.

Определение 2. Сетка $\overline{\omega}_\tau = \{\tau = T / N\}$ называется равномерной, если

$$t_n = n\tau, \ n = \overline{1, N}, \ \gamma = 1. \tag{4}$$

Структура существующих общих l-шаговых методов весьма сложна [10], поэтому воспользуемся только специальным классом одностадийных l-шаговых методов, процедура шага которых заключается в составлении линейной комбинации значений y_i и f_i, $i = \overline{n, n+l}$. Никакие повторные подстановки значений f (которые являются сутью многостадийных методов) не допускаются.

Наиболее широкое распространение в l-шаговой одностадийной схеме решения задачи (1), (2) получила процедура шага в виде

$$\sum_{i=0}^{l} a_i y_{n+i} - \tau_l \sum_{i=0}^{l} b_i f_{n+i} = 0, \ n = \overline{0, N}. \tag{5}$$

Множитель τ_l перед второй суммой выделен для того, чтобы коэффициенты b_i, как и a_i, были безразмерными. Матрица

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_0 \ldots a_N \\ b_0 \ldots b_N \end{pmatrix}$$

размера $2 \times (N+1)$ — производящая матрица схемы (5). Если $b_l = 0$, то вычислительные методы вида (5) обычно называют явными, если $b_l \neq 0$, — то неявными.

Заметим, что формула вычислений (5) должна быть точной в том случае, когда $y(t)$ есть постоянная величина ($\partial y / \partial t = f \equiv 0$). Тогда она даст равенства

$$a_l \neq 0, \ \sum_{i=0}^{l} a_i = 0. \tag{6}$$

Линейной l-шаговой процедуре (5) и ее производящей матрице, выполнив замену $q^i = y_i$ и $r^i = f_i$, $i = \overline{0, l}$, поставим в соответствие «характеристические» многочлены

$$\Phi_a(q) = \sum_{i=0}^{l} c q^i, \ \Phi_b(r) = \sum_{i=0}^{l} b_i r^i. \tag{7}$$

Если c — некоторое число, то число $\Phi_a(c) = \sum_{i=0}^{l} a_i c^i$, полученное заменой в выражении $\Phi_a(q)$ неизвестного q числом c и последующим выполнением всех указанных операций, будем называть значением многочлена $\Phi_a(q)$ при $q = c$. Если $\Phi_a(c) = 0$, т.е. многочлен $\Phi_a(q)$ обращается в нуль при подстановке в него числа c вместо неизвестного, то c будем называть корнем многочлена $\Phi_a(q)$ (или уравнения $\Phi_a(q) = 0$).

Определение 3. Число c тогда и только тогда будет корнем многочлена $\Phi_a(q)$, когда при $q = c$ многочлен Φ_a равен нулю.

Так как единица является нулем характеристического многочлена Φ_a, она не может быть нулем характеристического многочлена Φ_b. Поэтому в каждом классе процедур существует единственная линейная l-шаговая схема и соответствующая ей единственная производящая матрица, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=0}^{l} b_i = 1. \tag{8}$$

Далее конечно-разностную схему (5), подчиняющуюся условиям (6) и (8), будем называть нормированной.

Коэффициенты a_i и b_i можно выбирать различными способами так, чтобы (5) аппроксимировало $\partial y / \partial t - f = 0$. В работах [11, 13, 23] приведены приемы построения и исследования погрешности, аппроксимации, устойчивости и сходимости некоторых специальных классов эффективных линейных l-шаговых схем. Систематизация полученных в них теоретических результатов показывает, что основные требования устойчивости одностадийных многошаговых схем касаются в основном коэффициентов a_i характеристического многочлена Φ_a и формулируются следующими определениями.

Определение 4. Характеристический многочлен Φ_a удовлетворяет корневому критерию, если его корни лежат в единичном замкнутом круге, а на единичной окружности он не имеет кратных нулей.

Определение 5. Однородная линейная l-шаговая схема называется сильно устойчивой, если ее характеристический многочлен Φ_a удовлетворяет корневому критерию.

Простейшие и в то же время наиболее используемые схемы (5) получаются на основе квадратурных формул и метода неопределенных коэффициентов. Однако не все схемы, построенные такими способами, устойчивые. Например, явная схема

$$y_{n+l} + 4y_{n+l-1} - 5y_{n+l-2} - \frac{\tau}{6}(4f_{n+l-1} + 2f_{n+l-2}) = 0,$$

удовлетворяющая условиям нормирования (6), (8), не является устойчивой и не может сходиться, поскольку ее характеристический многочлен $\Phi_a(q) = q^2 + 4q - 5 = (q-1)(q+5)$ имеет корень, выходящий за пределы единицы.

Далее в качестве основы метода построения семейства многошаговых одностадийных схем высокого порядка воспользуемся специальным соотношением между коэффициентами характеристического многочлена Φ_a, согласно которому действительные коэффициенты линейной l-шаговой схемы априори удовлетворяют корневому критерию в узком смысле, т.е. характеристический многочлен Φ_a имеет исключительно действительные корни, находящиеся внутри единичного отрезка вещественной оси, а в единице не имеется кратных нулей.

Предварительно рассмотрим некоторые основные свойства делимости многочленов, которые используем в дальнейшем. В общем случае при делении многочлена с действительными коэффициентами

$$\eta(q) = a_l q^l + a_{l-1} q^{l-1} + \ldots + a_1 q + a_0 = \sum_{i=0}^{l} a_i q^i \tag{9}$$

на линейный многочлен

$$\varphi(q) = q - c \tag{10}$$

полученный остаток является некоторым числом ε (многочленом нулевой степени или нулем). Найти этот остаток, не выполняя деления, позволяет следующая теорема.

Теорема 1. Остаток от деления многочлена $\eta(q)$ на линейный многочлен $\varphi(q)$ равен значению $\eta(c)$ многочлена $\eta(q)$ при $q = c$.

Доказательство. Из элементарной алгебры известно, что для двух многочленов с действительными коэффициентами: $\eta(q)$ и $\varphi(q) = q - c$, можно найти такие многочлены $\psi(q)$ и ε, что

$$\eta(q) = (q-c)\psi(q) + \varepsilon. \tag{11}$$

Далее доказывается, что многочлены $\psi(q)$ и ε, удовлетворяющие этому условию, определяются однозначно.

Выбирая значения обеих частей равенства (11) при $q = c$, получаем $\eta(c) = (c - c)\psi(c) + \varepsilon = \varepsilon$, что доказывает теорему.

Следствие. При $c = 1$ и выполнении условия (6) остаток ε равен нулю.

Действительно, подставляя в (9) $q = 1$, получаем

$$\eta(q) = a_l + a_{l-1} + \ldots + a_1 + a_0 = \sum_{i=0}^{l} a_i = 0.$$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Многочлен $\varphi(q)$ тогда и только тогда будет делителем многочлена $\eta(q)$, когда существует многочлен $\psi(q)$, удовлетворяющий равенству

$$\eta(q) = \varphi(q)\psi(q). \tag{12}$$

Многочлен $\psi(q)$, удовлетворяющий этому условию, определяется однозначно.

Доказательство. Пусть существует также многочлен $\overline{\psi}(q)$, удовлетворяющий равенству

$$\eta(q) = \varphi(q)\overline{\psi}(q). \tag{13}$$

Приравнивая правые части равенств (12) и (13), находим $\varphi(q)\{\psi(q) - \overline{\psi}(q)\} = 0$. Так как в полученном выражении $\varphi(q) \neq 0$, должно выполняться $\psi(q) - \overline{\psi}(q) = 0$, т.е. $\psi(q) = \overline{\psi}(q)$, что и требовалось доказать. Далее очевидно, что степень $\varphi(q)$ не больше степени $\eta(q)$.

Теорема 3. Число $c = d / a$, $a \neq 0$, тогда и только тогда будет корнем многочлена $\eta(q)$, когда $\eta(q)$ делится на линейный многочлен $aq - d$.

Доказательство. Действительно, пусть $\eta(q) = (aq - d)\psi(q) = a(q - c)\psi(q)$. Выбирая значения обеих частей этого равенства при $q = c$, получаем $\eta(c) = a(c - c)\psi(c) = 0$, что доказывает теорему. Следовательно, нахождение корней многочлена $\eta(q)$ равносильно определению его линейных делителей.

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен с действительными коэффициентами l-й степени

$$\eta(q) = a_l q^l + a_{l-1} q^{l-1} + \ldots + a_1 q + a_0 = \sum_{i=0}^{l} a_i q^i \tag{14}$$

имеет ровно $l + 1$ действительных корней при условии, что каждый корень считается столько раз, какова его кратность, представляется следующим образом:

$$\eta(q) = (a_0 q - 1)(a_1 q - 1)\ldots(a_l q - 1). \tag{15}$$

Разложение (15) является для многочлена (14) единственным с точностью до порядка сомножителей.

Доказательство. Ранее доказанные теоремы позволяют утверждать существование для $\eta(q)$ корня $q_0 = a_0^{-1}$. Поэтому многочлен $\eta(q)$ имеет разложение $\eta(q) = (q - q_0)\psi(q)$. Коэффициенты многочлена $\psi(q)$ снова являются действительными, и поэтому $\psi(q)$ имеет корень $q_1 = a_1^{-1}$, откуда $\eta(q) = (q - q_0)(q - q_1)\xi(q)$.

Продолжая таким образом, приходим после конечного числа шагов к разложению (15).

Для доказательства единственности разложения (15) предположим, что имеется также разложение

$$\eta(q) = (q - \zeta_0)(q - \zeta_1)\ldots(q - \zeta_l). \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует равенство

$$(q - q_0)(q - q_1)\ldots(q - q_l) = (q - \zeta_0)(q - \zeta_1)\ldots(q - \zeta_l). \tag{17}$$

Если бы корень q_l кратности $s=1$ отличался от всех ζ_i, $i=0,1,\ldots,l$, то подставив q_l в (17) вместо неизвестного q, получили бы слева нуль, а справа — некоторое число, отличное от нуля, т.е. пришли бы к противоречию. Таким образом, всякий корень q_i кратности $s=1$ равен некоторому корню ζ_i и наоборот.

Пусть далее в разложении содержится $s>1$ корней q_0 и среди корней ζ_i, $i=0,1,\ldots,l$, содержится m, равных корню q_0. Требуется доказать, что $s=m$. Если допустить, например, что $s>m$, то сокращая обе части равенства (17) на множитель $(q-q_0)^m$, приходим к равенству, левая часть которого еще содержит множитель $q-q_0$, а правая его не содержит. Ранее отмечалось, что это приводит к противоречию. Таким образом, единственность разложения (15) для многочлена (17) доказана.

Хотя основная теорема алгебры [23] и большинство предшествующих ей результатов справедливы для комплексных коэффициентов a_i $(i=0,1,\ldots,l)$, будем всюду считать их вещественными.

При численной компьютерной реализации гидродинамических моделей циркуляции атмосферы обычно формулируются весьма жесткие требования к эффективности вычислительных методов, согласно которым необходимо, чтобы метод:

— являлся идентичным явному и обеспечивал быстрые вычисления для определения значений задачи на каждом временном шаге;

— имел благоприятные свойства сильной устойчивости для того, чтобы исключать чрезмерное распространение ошибки для задачи с убывающими компонентами решения;

— обеспечивал возможность управления величиной временного шага на всем интервале интегрирования уравнений задачи, причем изменение шага не должно усложнять алгоритм реализации метода.

Несмотря на взаимную противоречивость этих требований, оказывается можно построить семейство очень простых линейных l-шаговых одностадийных методов, удовлетворяющих всем приведенным требованиям.

Исходя из методической необходимости, построение семейства многошаговых одностадийных методов начнем на равномерной сетке $\overline{\omega}_\tau$. Затем распространим полученный результат на сетку ω_τ с переменным шагом.

СЕМЕЙСТВО СИЛЬНО УСТОЙЧИВЫХ ЛИНЕЙНЫХ l-ШАГОВЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ $\overline{\omega}_\tau$

Получим некоторые следствия, вытекающие из теории алгебры комплексных чисел, относящиеся к многочленам с действительными коэффициентами. По существу, именно эти следствия обусловили исключительно большое значение основной теоремы, рассмотренной далее.

Пусть многочлен с действительными коэффициентами $\eta(q)=a_l q^l+$ $+a_{l-1}q^{l-1}+\ldots+a_1 q+a_0$ имеет комплексный корень α, т. е. $a_l\alpha^l+a_{l-1}\alpha^{l-1}+\ldots$ $\ldots+a_1\alpha+a_0=0$.

Последнее равенство не нарушится, если в нем все числа заменить сопряженными. Но все коэффициенты a_i, $i=0,1,\ldots,l$, а также число 0, находящееся в многочлене $\eta(q)$ справа, будучи действительными, останутся при проведенной замене без изменения. Поэтому прийдем к равенству $\eta(\overline{\alpha})=a_l\overline{\alpha}^l+a_{l-1}\overline{\alpha}^{l-1}+\ldots$ $\ldots+a_1\overline{\alpha}+a_0=0$.

Таким образом, можем сформулировать следующее определение.

Определение 6. Если комплексное число α является корнем многочлена $\eta(q)$ с действительными коэффициентами, то корнем для $\eta(q)$ будет и сопряженное число $\overline{\alpha}$.

Следовательно, многочлен $\eta(q)$ делится на квадратный трехчлен $\psi(q)=(q-\alpha)(q-\overline{\alpha})=q^2-(\alpha+\overline{\alpha})q+\alpha\overline{\alpha}$, коэффициенты которого, как известно из теории алгебры комплексных чисел, действительны.

Докажем, что корни α и $\overline{\alpha}$ имеют в многочлене $\eta(q)$ одинаковую кратность.

От противного, пусть в многочлене $\eta(q)$ корни имеют соответственно кратности k_1 и k_2 и пусть, например, $k_1>k_2$. Тогда $\eta(q)$ делится на k_2-ю степень многочлена $\psi(q)$, $\eta(q)=\psi^{k_2}(q)\xi(q)$.

Многочлен $\xi(q)$ как частное двух многочленов с действительными коэффициентами также имеет действительные коэффициенты, но в противоречие с доказанным ранее число α есть его (k_1-k_2)-кратный корень, тогда как число $\overline{\alpha}$ не является для него корнем. Отсюда следует, что $k_1=k_2$. Таким образом, приходим к хорошо известному из курса алгебры факту, что комплексные корни всякого многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены. Отсюда и из доказанной единственности разложений вида (15) вытекает следующий окончательный результат.

Следствие основной теоремы алгебры. Всякий многочлен $\Phi_a(q)$ с действительными коэффициентами представим, причем единственным способом (с точностью до порядка множителей), в виде произведения своего старшего коэффициента a_l и нескольких линейных многочленов с действительными коэффициентами $q-\alpha$, соответствующих его действительным корням, и квадратных многочленов (18), соответствующих парам сопряженных комплексных корней.

Полученный результат позволяет утверждать следующее.

Теорема 4. Для сильно устойчивой однородной линейной *l*-шаговой конечно-разностной схемы (5) с действительными коэффициентами a_i и b_i $(i=\overline{0,l})$, подчиняющимися условиям нормирования (6) и (8), характеристический многочлен $\Phi_a(q)$ имеет исключительно действительные корни, удовлетворяющие сильному корневому критерию (за исключением одного простого корня $q_0=1$ его остальные корни q_i $(i=\overline{1,l})$ находятся внутри открытого единичного отрезка), и определяется единственным образом:

$$\Phi_a(q)=(q-1)\prod_{i=1}^{l}(2q-1)^i=0. \tag{18}$$

Доказательство. Рассмотрим вначале многочлен (18) с такими коэффициентами $\overline{a}_i$ $(i=\overline{1,l})$, что все корни $\overline{q}_i$ многочлена

$$\overline{\Phi}_a(q)=\sum_{i=1}^{l}\overline{a}_i q^i=0$$

лежат внутри открытого единичного отрезка. Далее рассмотрим многочлен (15), который имеет только простой корень q_0 в единице, и зададим связь между коэффициентами a_i и $\overline{a}_i$ $(i=\overline{1,l})$ равенством

$$\Phi_a(q)=(q-q_0)\overline{\Phi}_a(q). \tag{19}$$

Коэффициенты многочлена $\overline{\Phi}_a(q)$ выразим через его корни с помощью формул Вьета:

$$\begin{gathered}\overline{a}_0=(-1)^{i-1},\\ \overline{a}_1=(-1)^{i-2}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_l),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \overline{a}_{l-1}=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{l-2}\alpha_l+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_l,\\ \overline{a}_l=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l.\end{gathered} \tag{20}$$

Тогда коэффициенты многочлена $\Phi_a(q)$ с учетом равенства (19) примут вид

$$
\begin{gathered}
a_0 = (-1)^l, \\
a_1 = (-1)^{l-1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_l + 1), \\
a_2 = (-1)^{l-2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_l + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{l-1}\alpha_l), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (21) \\
a_{l-1} = -(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{l-1} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{l-2}\alpha_l + \ldots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_l), \\
a_l = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l.
\end{gathered}
$$

Разложим в ряд Тейлора функцию $y(t)$ в точках $l, l-2, \ldots, 0$ по значению ее в точке $l-1$

$$
\begin{gathered}
y_{n+l} = y_{n+l-1} + \frac{\tau}{1!} f_{n+l-1} + \frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1} + \ldots + \frac{\tau^k}{k!}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}}\right)_{n+l-1}, \\
y_{n+l-2} = y_{n+l-1} - \frac{\tau}{1!} f_{n+l-1} + \frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1} + \ldots \\
\ldots + (-1)^k \frac{\tau^k}{k!}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}}\right)_{n+l-1}, \qquad (22) \\
y_{n+l-3} = y_{n+l-1} - 2\frac{\tau}{1!} f_{n+l-1} + 4\frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1} + \ldots + (-1)^k 2^k \frac{\tau^k}{k!}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}}\right)_{n+l-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n = y_{n+l-1} - (l-1)\frac{\tau}{1!} f_{n+l-1} + (l-1)^2 \frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1} + \ldots \\
\ldots + (-1)^k (l-1)^k \frac{\tau^k}{k!}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}}\right)_{n+l-1}.
\end{gathered}
$$

Умножая последовательно левые и правые части первого равенства (22) на коэффициент a_l, определяемый системой (21), второго равенства — на коэффициент a_{l-2}, треьего равенства — на a_{l-3} и т.д., и складывая затем почленно полученные выражения, приходим к равенству

$$
\sum_{i=0}^{l} a_i y_{n+i} = \tau \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{(i+1)!}\left(\frac{\partial^i f}{\partial t^i}\right)_{n+l-1}, \qquad (23)
$$

где

$$
\begin{gathered}
c_1 = a_l - a_{l-2} - 2a_{l-3} - 3a_{l-4} - \ldots, \\
c_2 = a_l + a_{l-2} + 4a_{l-3} + 9a_{l-4} + \ldots, \\
c_3 = a_l - a_{l-2} - 8a_{l-3} - 27a_{l-4} - \ldots, \\
c_4 = a_l + a_{l-2} + 16a_{l-3} + 81a_{l-4} + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_l = a_l + (-1)^l (a_{l-2} + 2^l a_{l-3} + 3^l a_{l-4} + \ldots).
\end{gathered}
$$

Если правая часть дифференциального уравнения с частными производными непрерывна и ограничена вместе со своими производными n-го порядка, то аппроксимация (23) обусловит высокую точность вследствие малого коэффициента в остаточном члене и при уменьшении шага τ. Если правая часть не имеет указанных производных, то предельный порядок точности этой схемы нельзя реализовать. Тогда, как правило, используются схемы меньшего порядка точности, равного порядку существующих производных.

Опуская из рассмотрения простейшие двухшаговые схемы первого и второго порядков, как достаточно глубоко теоретически исследованные, построим семейство схем третьего (в случае явной схемы) и четвертого (в случае неявной схемы) порядков точности и на его примере проанализируем основные идеи метода. В качестве исходного выражения для характеристического многочлена $\Phi_a(q)$ выберем квадратный трехчлен

$$\Phi_a(q) = (q-1)(a_1 q - 1) = a_1 q^2 - (1 + a_1) q + 1, \tag{24}$$

одним из корней которого является действительный корень $q_0 = 1$. Согласно следствию основной теоремы алгебры второй корень (24) будет также действительным.

Коэффициент a_1 зададим так, чтобы характеристический многочлен (24) соответствовал линейной процедуре (5), аппроксимирующей уравнение $\partial y / \partial t - f(t, y) = 0$. В качестве исходного выражения используем равенство (23) при $l = 2$

$$a_1 y_{n+l} - (a_1+1) y_{n+l-1} + y_{n+l-2} =$$
$$= (a_1 - 1) \frac{\tau}{1!} f_{n+l-1} + (a_1+1) \frac{\tau^2}{2!} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{n+l-1} + (a_1 - 1) \frac{\tau^3}{3!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)_{n+l-1} +$$
$$+ (a_1+1) \frac{\tau^4}{4!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \right)_{n+l-1} + \ldots \tag{25}$$

и дополним его рядом Тейлора для фукции f в следующем виде:

$$0 = -\tau f_{n+l-2} + \tau f_{n+l-1} - 2 \frac{\tau^2}{2!} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{n+l-1} + 3 \frac{\tau^3}{3!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)_{n+l-1} -$$
$$- 4 \frac{\tau^4}{4!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \right)_{n+l-1} + \ldots \tag{26}$$

Умножим (26) на множитель $(a_1+1)/2$ и прибавим полученное выражение к (25). Отметим, что первые два члена в правой части ряда (26) содержат коэффициенты с противоположными знаками, равные по модулю τ. Поэтому их алгебраическая сумма, умноженная на одинаковый множитель $(a_1+1)/2$, равна нулю. Следовательно, для выполнения условия (8) необходимо коэффициент $a_1 - 1$ при f_{n+l-1} приравнять единице, т.е. положить $a_1 = 2$. Полученное значение a_1 приводит к следующей формуле для явной разностной схемы:

$$y_{n+l} = y_{n+l-1} + \frac{1}{2} \left[y_{n+l-1} - y_{n+l-2} + \frac{\tau}{2} (5 f_{n+l-1} - 3 f_{n+l-2}) \right] + O(\tau^3). \tag{27}$$

При $a_1 = 2$ корни характеристического уравнения для схемы (27) являются действительными и различными и подчиняются зависимостям $q_0 = 1$ и $0 < q_1 < 1$. Следовательно, в соответствии с определением 5 однородная схема (27) является сильно устойчивой.

Для построения неявной схемы дополним систему (25) и (26) рядом Тейлора

$$0=-\tau f_{n+l}+\tau f_{n+l-1}+2\frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1}+3\frac{\tau^3}{3!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{n+l-1}+$$

$$+4\frac{\tau^4}{4!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)_{n+l-1}+\ldots \tag{28}$$

Умножим (26) на некоторый множитель A, а (28) — на некоторый множитель B и прибавим полученные выражения к (25). Определим значения множителей A и B так, чтобы коэффициенты при $(\partial f/\partial t)_{n+l-1}$ и $(\partial^2 f/\partial t^2)_{n+l-1}$ обращались в нуль. Отсюда получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}2A-2B&=-(a_1+1),\\ 3A+3B&=-(a_1-1).\end{aligned} \tag{29}$$

Поскольку, как и в (26), первые два члена в правой части (28) с равными коэффициентами имеют противоположные знаки, для выполнения условия (8) необходимо, чтобы коэффициент a_1-1 при f_{n+l-1} в правой части (25) равнялся единице. Этому условию по-прежнему удовлетворяет равенство $a_1=2$. Тогда из решения системы (29) получаем $A=-11/12$, $B=7/12$ и следующую формулу для неявной разностной схемы:

$$y_{n+l}=y_{n+l-1}+\frac{1}{2}\left[y_{n+l-1}-y_{n+l-2}+\frac{\tau}{12}(11f_{n+l}+8f_{n+l-1}-7f_{n+l-2})\right]+O(\tau^4). \tag{30}$$

Построим другое семейство конечно-разностных схем при $l=3$. Характеристический многочлен $\Phi_a(q)$ представм в виде кубического четырехчлена

$$\begin{aligned}\Phi_a(q)&=(q-1)(a_1q-1)(a_2q-1)=\\ &=a_1a_2q^3-(a_1+a_2+a_1a_2)q^2+(1+a_1+a_2)q-1,\end{aligned} \tag{31}$$

заданными корнями которого являются действительные различные корни $q_0=1$, $q_1=1/a_1=1/2$. В соответствии со следствием основной теоремы алгебры третий корень (31) будет также действительным.

Равенство (23) при $l=3$ и дополнительные ряды Тейлора для фукции f представим в следующем виде:

$$a_1a_2y_{n+l}-(a_1+a_2+a_1a_2)y_{n+l-1}+(1+a_1+a_2)y_{n+l-2}-y_{n+l-3}=$$

$$=(a_1a_2-a_1-a_2+1)\frac{\tau}{1!}f_{n+l-1}+(a_1a_2+a_1+a_2-3)\frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1}+$$

$$+(a_1a_2-a_1-a_2+1)\frac{\tau^3}{3!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{n+l-1}+(a_1a_2+a_1+a_2-15)\frac{\tau^4}{4!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)_{n+l-1}, \tag{32}$$

$$0=-\tau f_{n+l-2}+\tau f_{n+l-1}-2\frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1}+3\frac{\tau^3}{3!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{n+l-1}-$$

$$-4\frac{\tau^4}{4!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)_{n+l-1}+\ldots, \tag{33}$$

$$0=-\tau f_{n+l-3}+\tau f_{n+l-1}-4\frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1}+12\frac{\tau^3}{3!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{n+l-1}-$$

$$-32\frac{\tau^4}{4!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)_{n+l-1}+\ldots \tag{34}$$

Сложим (32) и равенства (33) и (34), умноженные предварительно на некоторые коэффициенты A и B соответственно. Определим значения множителей A и B так, чтобы коэффициенты при $(\partial f/\partial t)_{n+l-1}$ и $(\partial^2 f/\partial t^2)_{n+l-1}$ обращались в нуль. В результате получим систему уравнений

$$2A+4B=-(a_1a_2+a_1+a_2-3)\,,$$

$$3A+12B=-(a_1a_2-a_1-a_2+7)\,. \tag{35}$$

Отметим, что первые два члена как в правой части (33), так и в правой части (34) по-прежнему равны и имеют противоположные знаки. Поэтому для выполнения условия (8) небходимо, чтобы коэффициент при f_{n+l-1} в правой части (32) равнялся единице, т.е.

$$(a_1a_2-a_1-a_2+1)=1. \tag{36}$$

Равенство (36) справедливо тогда и только тогда, когда $a_1=a_2=2$, что и требовалось доказать. При этом из решения системы (35) получаем $A=88/12$, $B=-29/12$ и следующую формулу для явной разностной схемы:

$$y_{n+l}=y_{n+l-1}+\frac{1}{4}\left[4y_{n+l-1}-5y_{n+l-2}+y_{n+l-3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\tau}{12}(71f_{n+l-1}-88f_{n+l-2}+29f_{n+l-3})\right]+O(\tau^3). \tag{37}$$

Корни характеристического уравнения для схемы (37) являются действительными и различными и подчиняются зависимостям $q_0=1$, $0<q_1<1$ и $0<q_2<1$. Следовательно, в соответствии с определеним 5 однородная схема (37) является сильно устойчивой.

Для построения неявной схемы дополним систему (32) рядом Тейлора

$$0=-\tau f_{n+l}+\tau f_{n+l-1}+2\frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1}+3\frac{\tau^3}{3!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{n+l-1}+$$

$$+4\frac{\tau^4}{4!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)_{n+l-1}+5\frac{\tau^5}{5!}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial t^4}\right)_{n+l-1}+\ldots \tag{38}$$

Умножим (38) на некоторый множитель A. Прибавим полученный результат к равенствам (32) и (35), умноженным предварительно на B и C соответственно. Определим значения множителей A, B и C так, чтобы коэффициенты при $(\partial f/\partial t)_{n+l-1}$, $(\partial^2 f/\partial t^2)_{n+l-1}$ и $(\partial^3 f/\partial t^3)_{n+l-1}$ обращались в нуль. Это даст систему уравнений

$$2A-2B-4C=-(a_1a_2+a_1+a_2-3)\,,$$

$$3A+3B+12C=-(a_1a_2-a_1-a_2+7)\,, \tag{39}$$

$$4A-4B-32C=-(a_1a_2+a_1+a_2-15)\,.$$

Отметим, что первые два члена в правых частях рядов (32)–(34) имеют противоположные знаки, поэтому алгебраическая сумма равных по модулю коэффициентов, умноженных на одно и то же число, в каждом из этих рядов равна нулю. Следовательно, для выполнения условия (8) небходимо, чтобы единственный не равный нулю коэффициент $(a_1 a_2 - a_1 - a_2 + 1)$ при f_{n+l-1} в правой части (31) равнялся единице, т.е. снова приходим к (36) и равенству $a_1 = a_2 = 2$. При этом из решения системы (39) получаем $A = -41/24$, $B = 53/24$, $C = -17/24$ и следующую формулу для неявной разностной схемы:

$$y_{n+l} = y_{n+l-1} + \frac{1}{4}[4y_{n+l-1} - 5y_{n+l-2} + y_{n+l-3} +$$

$$+ \frac{\tau}{24}(41 f_{n+l} + 19 f_{n+l-1} - 53 f_{n+l-2} + 17 f_{n+l-3})] + O(\tau^5). \qquad (40)$$

Таким образом, доказано, что семейство сильно устойчивых линейных *l*-шаговых схем (37) и (40) при $l = 3$ независимо от порядка локальной точности p обусловливает характеристический многочлен $\Phi_a(q)$ с одними и теми же значениями a_1 и a_2, определяемыми равенством (36). Осталось доказать, что эти значения a_1 и a_2 будут нулями многочлена $\Phi_a(q)$ сильно устойчивой *l*-шаговой схемы при другом значении *l*.

Для этого построим характеристический многочлен $\Phi_a(q)$ четвертой степени

$$\Phi_a(q) = (q-1)(a_1 q - 1)(a_2 q - 1)(a_3 q - 1) =$$

$$= a_1 a_2 a_3 q^4 - (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3) q^3 +$$

$$+ (a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) q^2 - (1 + a_1 + a_2 + a_3) q + 1, \qquad (41)$$

заданными корнями которого являются действительные различные корни $q_0 = 1$, $q_1 = 1/a_1 = 1/2$ и $q_2 = 1/a_2 = 1/2$. В соответствии со следствием основной теоремы алгебры четвертый корень (41) будет также действительным.

Коэффициент a_3 выбираем так, чтобы характеристический многочлен (41) соответствовал линейной процедуре (23), аппроксимирующей уравнение $\partial y / \partial t - f(t, y) = 0$. Для этого умножим обе части первого ряда системы (22) на коэффициент при q^4 в характеристическом многочлене (41), обе части второго ряда — на коэффициент при q^2 в том же многочлене, обе части третьего ряда — на коэффициент при q в (41) и эти три ряда прибавим к четвертому ряду системы (22). В результате получим

$$a_1 a_2 a_3 y_{n+l} - (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3) y_{n+l-1} +$$

$$+ (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 + a_2 + a_3) y_{n+l-2} +$$

$$+ (a_1 + a_2 + a_3 + 1) y_{n+l-3} - y_{n+l-4} =$$

$$= (a_1 a_2 a_3 - a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_2 a_3 + a_1 + a_2 + a_3) \frac{\tau}{1!} f_{n+l-1} +$$

$$+ [a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 - 3(a_1 + a_2 + a_3) + 5] \frac{\tau^2}{2!} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{n+l-1} +$$

$$+ [a_1 a_2 a_3 - a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_2 a_3 + 7(a_1 + a_2 + a_3) - 19] \frac{\tau^3}{3!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)_{n+l-1} +$$

$$+[a_1a_2a_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-15(a_1+a_2+a_3)+65]\frac{\tau^4}{4!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)_{n+l-1}+\ldots \quad (42)$$

Для выполнения условия (8) необходимо в правой части (42) коэффициент при τf_{n+l-1} приравнять единице, т.е. положить $a_1a_2a_3-a_1a_2-a_1a_3-a_2a_3+$ $+a_1+a_2+a_3-1=1$. Это равенство справедливо тогда и только тогда, когда

$$a_1=a_2=a_3=2, \quad (43)$$

что является доказательством рассматриваемой теоремы, и однородная схема (42) сильно устойчивая.

Повысим порядок схемы (42), исключив производные $(\partial f/\partial t)_{n+l-1}$, $(\partial^2 f/\partial t^2)_{n+l-1}$ и $(\partial^3 f/\partial t^3)_{n+l-1}$, входящие в ее правую часть, с помощью рядов

$$0=-\tau f_{n+l}+\tau f_{n+l-1}+2\frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1}+3\frac{\tau^3}{3!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{n+l-1}+$$

$$+4\frac{\tau^4}{4!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)_{n+l-1}+5\frac{\tau^5}{5!}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial t^4}\right)_{n+l-1}+\ldots$$

$$0=-\tau f_{n+l-2}+\tau f_{n+l-1}-2\frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1}+3\frac{\tau^3}{3!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{n+l-1}-$$

$$-4\frac{\tau^4}{4!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)_{n+l-1}+5\frac{\tau^4}{5!}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial t^4}\right)_{n+l-1}+\ldots,$$

$$0=-\tau f_{n+l-3}+\tau f_{n+l-1}-4\frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1}+12\frac{\tau^3}{3!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{n+l-1}-$$

$$-32\frac{\tau^4}{4!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)_{n+l-1}+80\frac{\tau^5}{5!}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial t^4}\right)_{n+l-1}+\ldots,$$

$$0=-\tau f_{n+l-4}+\tau f_{n+l-1}-6\frac{\tau^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{n+l-1}+27\frac{\tau^3}{3!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{n+l-1}-$$

$$-108\frac{\tau^4}{4!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)_{n+l-1}+405\frac{\tau^5}{5!}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial t^4}\right)_{n+l-1}+\ldots$$

В результате получим явную схему в виде

$$y_{n+l}=y_{n+l-1}+\frac{1}{8}[12y_{n+l-1}-18y_{n+l-2}+7y_{n+l-3}-y_{n+l-3}+$$

$$+\frac{\tau}{24}(325f_{n+l-1}-617f_{n+l-2}+415f_{n+l-3}-99f_{n+l-4})]+O(\tau^5) \quad (44)$$

и неявную схему в виде

$$y_{n+l}=y_{n+l-1}+\frac{1}{8}[12y_{n+l-1}-18y_{n+l-2}+7y_{n+l-3}-y_{n+l-3}+\frac{\tau}{720}(2321f_{n+l}+$$

$$+466f_{n+l-1}-4584f_{n+l-2}+3166f_{n+l-3}-649f_{n+l-4})]+O(\tau^6). \quad (45)$$

Продолжая таким же образом, увеличивая значение l в нормированной схеме (23), можно убедиться, что характеристический многочлен с действительными коэффициентами $\Phi_a(q)$ имеет вид (18), что и требовалось доказать.

СЕМЕЙСТВО СИЛЬНО УСТОЙЧИВЫХ ЛИНЕЙНЫХ l-ШАГОВЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ ω_τ

Предположим без потери общности, что решение задачи (5) реализуется численно на начальном расчетном шаге разностной сетки ω_τ, т.е. при $n=0$, поскольку технические детали многих доказательств оказываются при этом значительно проще ввиду того, что зависимость функций в (5) от n исчезает, а зависимость от l становится тривиальной

$$\sum_{i=0}^{l} a_i y_i - \tau_l \sum_{i=0}^{l} b_i f_i = 0. \tag{46}$$

Теорема 5. Для каждой сильно устойчивой однородной линейной многошаговой одностадийной конечно-разностной схемы (5) с действительными коэффициентами a_i и b_i $(i=\overline{0,l})$, подчиняющимися условию нормирования (6) и (8), характеристический многочлен $\Phi_a(q)$ имеет исключительно действительные корни, удовлетворяющие сильному корневому критерию, является единственным и определяется в виде

$$\Phi_a(q) = (q-q_0)\prod_{i=1}^{l}(s_i q - 1)^i, \tag{47}$$

где последовательность действительных чисел s_i $(i=\overline{1,l})$ имеет следующие свойства:

— является общей для линейных $(l=k)$- и $(l=k+1)$-шаговых процедур (5) на заданной сетке ω_τ при $i=\overline{0,k}$;

— значения ее компонент на неравномерной сетке ω_τ зависят исключительно от соотношения шагов сетки и находятся в интервале $1 < s_i \le 2$ $(i=\overline{1,l})$.

Доказательство. Заменим ряды Тейлора (22) разложения функции $y(t)$ на равномерной сетке $\overline{\omega}_\tau$ в точках $l, l-2, \ldots, 0$ по ее значению в точке $l-1$ рядами Тейлора на неравномерной сетке ω_τ

$$\begin{aligned}
y_l &= y_{l-1} + \frac{\tau_l}{1!} f_{l-1} + \frac{\tau_l^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{l-1} + \ldots + \frac{\tau_l^p}{p!}\left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}}\right)_{l-1}, \\
y_{l-2} &= y_{l-1} - \frac{\tau_{l-1}}{1!} f_{l-1} + \frac{\tau_{l-1}^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{l-1} + \ldots + (-1)^p \frac{\tau_{l-1}^p}{p!}\left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}}\right)_{l-1}, \\
y_{l-3} &= y_{l-1} - 2\frac{\tau_{l-1}+\tau_{l-2}}{1!} f_{l-1} + \frac{(\tau_{l-1}+\tau_{l-2})^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{l-1} + \ldots \\
&\quad \ldots + (-1)^p \frac{(\tau_{l-1}+\tau_{l-2})^p}{p!}\left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}}\right)_{l-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_0 &= y_{l-1} - \frac{\tau_{l-1}+\tau_{l-2}+\ldots+\tau_0}{1!} f_{l-1} + \frac{(\tau_{l-1}+\tau_{l-2}+\ldots+\tau_0)^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{l-1} + \ldots
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\ldots + (-1)^p \frac{(\tau_{l-1} + \tau_{l-2} + \ldots + \tau_0)^p}{p!} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}} \right)_{l-1} .$$

Умножая последовательно левые и правые части первого равенства (48) на коэффициент a_l, определяемый системой (21), второго равенства — на коэффициент a_{l-2}, треьего равенства — на a_{l-3} и т.д., и складывая затем почленно полученные выражения, приходим к равенству

$$\sum_{i=0}^{l} a_i y_i = \tau_l \sum_{i=0}^{p} \frac{c_i}{(i+1)!} \left(\frac{\partial^i f}{\partial t^i} \right)_{l-1} , \tag{49}$$

где

$$c_0 = a_l - \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} a_{l-2} + \frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2}}{\tau_l} a_{l-3} - \frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2} + \tau_{l-3}}{\tau_l} a_{l-4} + \ldots ,$$

$$c_1 = \tau_l \left[a_l + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^2 a_{l-2} + \left(\frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2}}{\tau_l} \right)^2 a_{l-3} + \left(\frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2} + \tau_{l-3}}{\tau_l} \right)^2 a_{l-4} + \ldots \right],$$

$$c_2 = \tau_l^2 \left[a_l - \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^3 a_{l-2} - \left(\frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2}}{\tau_l} \right)^3 a_{l-3} + \left(\frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2} + \tau_{l-3}}{\tau_l} \right)^3 a_{l-4} + \ldots \right],$$

$$c_3 = \tau_l^3 \left[a_l + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^4 a_{l-2} + \left(\frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2}}{\tau_l} \right)^4 a_{l-3} + \left(\frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2} + \tau_{l-3}}{\tau_l} \right)^4 a_{l-4} + \ldots \right],$$

…………………………………………………………………………………………

$$c_p = \tau_l^p \left[a_l + (-1)^{p+1} \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^{p+1} a_{l-2} + (-1)^{p+1} \left(\frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2}}{\tau_l} \right)^{p+1} a_{l-3} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{p+1} \left(\frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2} + \tau_{l-3}}{\tau_l} \right)^{p+1} a_{l-4} + \ldots \right]. \tag{50}$$

Пренебрегая в правой части (49) всеми слагаемыми, содержащими производные от функции $f(t)$, получаем схему порядка $p = 1$

$$\sum_{i=0}^{l} a_i y_i = \tau_l c_0 f_{l-1} + O(\bar{\tau}^2) , \tag{51}$$

где $\bar{\tau} = \max\limits_{i=\overline{0,l}} \tau_i$ — максимальный шаг сетки ω_τ.

Для выполнения условия (8) необходимо коэффициент c_0 при f_{l-1} приравнять единице, т.е. положить

$$a_l - \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} a_{l-2} + \frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2}}{\tau_l} a_{l-3} - \frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2} + \tau_{l-3}}{\tau_l} a_{l-4} + \ldots$$

$$\ldots + a_0 \left(\sum_{i=0}^{l} \tau_{l-i} \right) \Big/ \tau_l = 1 . \tag{52}$$

Повысить порядок локальной точности явной l-шаговой схемы (51) можно, дополнив (49) рядами Тейлора относительно фукции f_{l-1}

$$0=-f_l+f_{l-1}+\frac{\tau_l}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{l-1}+\frac{\tau_l^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{l-1}+\ldots+\frac{\tau_l^p}{p!}\left(\frac{\partial^p f}{\partial t^p}\right)_{l-1},$$

$$0=-f_{l-2}+f_{l-1}-\frac{\tau_{l-1}}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{l-1}+\frac{\tau_{l-1}^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{l-1}+\ldots+(-1)^p\frac{\tau_{l-1}^p}{p!}\left(\frac{\partial^p f}{\partial t^p}\right)_{l-1},$$

$$0=-f_{l-3}+f_{l-1}-\frac{\tau_{l-1}+\tau_{l-2}}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{l-1}+$$

$$+\frac{(\tau_{l-1}+\tau_{l-2})^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{l-1}+\ldots+(-1)^p\frac{(\tau_{l-1}+\tau_{l-2})^p}{p!}\left(\frac{\partial^p f}{\partial t^p}\right)_{l-1}, \tag{53}$$

....

$$0=-f_0+f_{l-1}-\frac{\sum_{i=1}^{l-1}\tau_{l-i}}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{l-1}+\frac{\left(\sum_{i=1}^{l-1}\tau_{l-i}\right)^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{l-1}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^p\frac{\left(\sum_{i=1}^{l-1}\tau_{l-i}\right)^p}{p!}\left(\frac{\partial^p f}{\partial t^p}\right)_{l-1}$$

и исключив из системы уравнений (49) и (53) производные от функции f порядка $k=(\overline{1,p})$.

Отметим, что первые два члена в правых частях каждого ряда (53) имеют коэффициенты с противоположными знаками, равные по модулю единице. Поэтому в процессе исключения из системы уравнений (49), (53) производных от функции f k-го порядка алгебраическая сумма коэффициентов при функции f в (53), умноженных на произвольный одинаковый множитель, будет равна нулю и, следовательно, выполнение условия (8) обеспечит равенство (52).

Равенство (52) содержит $l+1$ неизвестных a_i $(i=\overline{0,l})$. На первый взгляд задача не имеет решения, так как для определения $l+1$ неизвестных существует лишь одно уравнение. Однако это не так. Доказать наличие единственного решения можно, применяя метод индукции. Доказательство начнем с l-шаговой схемы при $l=2$. В качестве исходного выражения для характеристического многочлена $\Phi_a(q)$ (7) выберем квадратный трехчлен

$$\Phi_a(q)=(q-1)(a_1q-1)=a_1q^2-(1+a_1)q+1, \tag{54}$$

одним из корней которого является действительный корень $q_0=1$. В соответствии со следствием основной теоремы алгебры второй корень (54) будет также действительным.

Коэффициент a_1 зададим так, чтобы характеристический многочлен (54) соответствовал линейной процедуре (46), аппроксимирующей уравнение $\partial y/\partial t-f(t,y)=0$. Для этого умножим обе части первого ряда (48) на a_1 и прибавим ко второму ряду (48). В результате получим

$$a_1 y_l - (a_1 + 1) y_{l-1} + y_{l-2} = \left(a_1 - \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right) \frac{\tau_l}{1!} f_{l-1} + \left[a_1 + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^2 \right] \frac{\tau_l^2}{2!} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{l-1} +$$

$$+ \left[a_1 - \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^3 \right] \frac{\tau_l^3}{3!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)_{l-1} + \left[a_1 + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^4 \right] \frac{\tau_l^4}{4!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \right)_{l-1} + \ldots \qquad (55)$$

Пренебрегая в правой части (55) всеми слагаемыми, содержащими производные от функции $f(t)$, получаем схему порядка $p = 1$

$$a_1 y_l - (1 + a_1) y_{l-1} + y_{l-2} = \left(a_1 - \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right) \tau_l f_{l-1} + O(\bar{\tau}^2) . \qquad (56)$$

Для выполнения условия (8) необходимо коэффициент при $\tau_l f_{l-1}$ приравнять единице, т.е. положить $a_1 - \tau_{l-1} / \tau_l = 1$. Откуда $a_1 = 1 + \tau_{l-1} / \tau_l = 1 + \gamma$.

Для $\tau_{l-1} > 0$, $\tau_l > 0$ и при всех γ получаем $1 < a_1 \le 2$, следовательно, характеристическое уравнение семейства трехточечных схем (55) имеет два различных действительных корня: $q_0 = 1$ и $0 < q_1 < 1$. В соответствии с определеним 5 семейство однородных схем (55) является сильно устойчивым.

Повысить порядок локальной точности явной l-шаговой схемы при $l = 2$ можно, дополнив уравнение (55) вторым рядом Тейлора из (53) и исключив первую производную $(\partial f / \partial t)_{l-1}$ в этих уравнениях. Умножим левую и правую части второго ряда Тейлора из (53) на множитель

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_l}{\tau_{l-1}} \left[a_1 + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^2 \right] \tau_l$$

и прибавим полученное выражение к (55). В результате получим

$$a_1 y_l - (1 + a_1) y_{l-1} + y_{l-2} = \frac{\tau_l}{2} (f_{l-1} - f_{l-2}) \left[a_1 + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^2 \right] +$$

$$+ \left(a_1 - \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right) \tau_l f_{l-1} + O(\bar{\tau}^3) . \qquad (57)$$

Поскольку в первом слагаемом правой части полученного уравнения функции f_{l-1} и f_{l-2} в круглых скобках имеют противоположные знаки, алгебраическая сумма их множителей

$$+ \frac{\tau_l}{2} \left[a_1 + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^2 \right] \quad \text{и} \quad - \frac{\tau_l}{2} \left[a_1 + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^2 \right]$$

равна нулю. Следовательно, для выполнения условия (18) небходимо, чтобы коэффициент $a_1 - \tau_{l-1} / \tau_l$ при f_{l-1} во втором слагаемом правой части (57) тождественно равнялся единице. Этому условию удовлетворяет равенство (55), что и утверждается в теореме. Подставив значение a_1 (55) в (57), получим окончательную формулу для явной разностной схемы порядка $p = 2$.

Для построения l-шаговой неявной схемы при $l = 2$ третьего порядка дополним уравнение (55) первым и вторым рядами Тейлора для фукции f из (53). Умножим первый ряд на неопределенный пока множитель A, второй ряд — на неопределенный множитель B и прибавим полученные выражения к (55). Определим значения множителей A и B так, чтобы суммы коэффициентов при $(\partial f / \partial t)_{l-1}$ и $(\partial^2 f / \partial t^2)_{l-1}$ обращались в нуль. Отсюда получим систему алгебраических уравнений

$$\tau_l A - \tau_{l-1} B + \frac{\tau_l^2}{2!}\left[a_1 + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l}\right)^2\right] = 0,$$

$$\frac{\tau_l^2}{2} A + \frac{\tau_{l-1}^2}{2} B + \frac{\tau_l^3}{3!}\left[a_1 - \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l}\right)^3\right] = 0,$$

решение которой имеет вид

$$A = -\frac{1}{6}\frac{\tau_l^2}{\tau_l + \tau_{l-1}}\left[a_1\left(2 + 3\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l}\right) + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l}\right)^3\right],$$

$$B = \frac{1}{6}\frac{\tau_l^2}{\tau_l + \tau_{l-1}}\left\{a_1\left[3 - 2\left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l}\right)^2\right] + 5\left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l}\right)^2\right\}. \qquad (58)$$

Прежде чем демонстрировать результат сложения уравнения (55) и двух первых рядов (53), предварительно умноженных на полученные значения A и B соответственно, отметим, что первые два члена в правых частях этих рядов с равными коэффициентами имеют противоположные знаки, поэтому алгебраическая сумма равных по модулю коэффициентов, умноженных на одно и то же число, в каждом из этих рядов равна нулю. Следовательно, для выполнения условия (8) небходимо чтобы единственный не равный нулю коэффициент $a_1 - \tau_{l-1} / \tau_l$ при f_{l-1} в правой части (55) тождественно равнялся единице, что согласуется с (55) и утверждается в теореме.

Комбинируя систему уравнений, состоящую из уравнения (55) и двух первых рядов (53) с учетом найденных значений неизвестных A и B, получаем следующую формулу для сильно устойчивой неявной разностной схемы порядка $p = 3$:

$$a_1 y_l - (1 + a_1) y_{l-1} + y_{l-2} =$$

$$= -A f_l + \left[\left(a_1 - \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l}\right)\tau_l + A + B\right] f_{l-1} - B f_{l-2} + O(\bar{\tau}^4). \qquad (59)$$

Таким образом, доказано, что семейство сильно устойчивых линейных l-шаговых схем (55) при $l = 2$ независимо от порядка локальной точности p обусловливает характеристический многочлен (54) с одним и тем же значением a_1, определяемым равенством (55). Осталось доказать, что корни многочлена $\Phi_a(q)$ (47) сильно устойчивой однородной l-шаговой схемы останутся действительными и при другом значении l.

Для этого рассмотрим семейство конечно-разностных схем при $l = 3$. Характеристический многочлен (47) построим с заданными значениями действительных и различных корней $q_0 = 1$ и $q_1 = 1 / a_1 = 1 + \tau_{l-1} / \tau_l$

$$\Phi_a(q) = (q-1)(a_1 q - 1)(a_2 q - 1) =$$

$$= a_1 a_2 q^3 - (a_1 + a_2 + a_1 a_2) q^2 + (1 + a_1 + a_2) q - 1 = \beta_1 q^3 - \beta_2 q^2 + \beta_3 q - 1, \quad (60)$$

где введены обозначения: $\beta_1 = a_1 a_2$, $\beta_2 = a_1 + a_2 + a_1 a_2$, $\beta_3 = 1 + a_1 + a_2$.

В соответствии со следствием основной теоремы алгебры третий корень (60) будет также действительным. Коэффициент a_2 выберем так, чтобы характеристический многочлен (60) соответствовал линейной процедуре (15), аппроксимирующей уравнение $\partial y / \partial t - f(t, y) = 0$. Для этого умножим обе части первого ряда системы (48) на коэффициент при q^3 в характеристическом многочлене (60), обе части второго ряда — на коэффициент при q в том же многочлене и эти два ряда прибавим к третьему ряду системы (48). В результате получим

$$\beta_1 y_l - \beta_2 y_{l-1} + \beta_3 y_{l-2} - y_{l-3} = (\beta_1 - \beta_3 s_1 + s_{1,2}) \tau_l f_{l-1} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \tau_l (\beta_1 + \beta_3 s_1^2 - s_{1,2}^2) \tau_l \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{l-1} +$$

$$+ \frac{1}{3!} \tau_l^2 (\beta_1 - \beta_3 s_1^3 + s_{1,2}^3) \tau_l \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)_{l-1} + \frac{1}{4!} \tau_l^3 (\beta_1 + \beta_3 s_1^4 - s_{1,2}^4) \tau_l \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \right)_{l-1} +$$

$$+ \frac{1}{5!} \tau_l^4 (\beta_1 - \beta_3 s_1^5 + s_{1,2}^5) \tau_l \left(\frac{\partial^4 f}{\partial t^4} \right)_{l-1} + O(\bar{\tau}^6), \qquad (61)$$

где

$$s_1 = \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l}, \; s_{1,2} = \frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2}}{\tau_l}.$$

Из этого семейства схем рассмотрим вначале явные схемы. Пренебрегая в правой части (61) всеми слагаемыми, содержащими производные от функции $f(t)$, получаем схему порядка $p = 1$

$$\beta_1 y_l - \beta_2 y_{l-1} + \beta_3 y_{l-2} - y_{l-3} = (\beta_1 - \beta_3 s_1 + s_{1,2}) \tau_l f_{l-1} + O(\bar{\tau}^2). \qquad (62)$$

Для выполнения условия (8) необходимо коэффициент при $\tau_l f_{l-1}$ приравнять единице, т.е. положить

$$a_1 a_2 - (a_1 + a_2 + 1) \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} + \frac{\tau_{l-2} + \tau_{l-1}}{\tau_l} = 1. \qquad (63)$$

При $a_1 = 1 + \tau_{l-1} / \tau_l$ из (63) следует

$$a_2 = 1 + a_1 \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} - \frac{\tau_{l-2}}{\tau_l} = 1 + \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \left(1 + \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right) - \frac{\tau_{l-2}}{\tau_l}. \qquad (64)$$

Откуда, используя обозначение отношения шагов, имеем

$$a_2 = 1 + \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \left(1 + \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right) - \frac{\tau_{l-2} \tau_{l-1}}{\tau_{l-1} \tau_l} = 1 + \gamma (1 + \gamma) - \gamma^2 = 1 + \gamma,$$

т.е. для всех γ имеем $1 < a_2 \leq 2$. Таким образом, корни характеристического уравнения для семейства схем (61) являются действительными и различными и подчиняются зависимостям $q_0 = 1$, $0 < q_1 < 1$ и $0 < q_2 < 1$. Следовательно, в соответствии с определеним 5 семейство четырехточечных однородных схем (61) сильно устойчивое.

Повысить порядок локальной точности явной l-шаговой схемы при $l = 3$ можно, дополнив (61) вторым рядом Тейлора для фукции f из (53). Исключим первую производную $(\partial f / \partial t)_{l-1}$ в этих уравнениях, умножив левую и правую части второго ряда (53) на множитель

$$\frac{1}{2}\frac{\tau_l}{\tau_{l-1}}\left[a_{l-2}a_{l-1}+(a_{l-2}+a_{l-1}+1)\left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l}\right)^2-\left(\frac{\tau_{l-2}+\tau_{l-1}}{\tau_l}\right)^2\right]$$

и прибавив полученное выражение к (61). В результате получим следующую формулу для явной разностной схемы порядка $p=2$

$$\beta_1 y_l-\beta_2 y_{l-1}+\beta_3 y_{l-2}-y_{l-3}=(\beta_1-\beta_3 s_1+s_{1,2})\tau_l f_{l-1}+$$
$$+\frac{\tau_l}{2}\left\{\left[\left(2+\frac{\tau_l}{\tau_{l-1}}\right)\beta_1-\beta_3 s_1+\left(1-\frac{\tau_{l-2}}{\tau_{l-1}}\right)s_{1,2}\right]f_{l-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{\tau_l}{\tau_{l-1}}(\beta_1+\beta_3 s_1^2-s_{1,2}^2)f_{l-2}\right\}+O(\bar{\tau}^3)\,. \qquad (65)$$

Построим явную сильно устойчивую однородную l-шаговою схему при $l=3$ третьего локального порядка точности, дополнив уранение (61) вторым и третьим рядами Тейлора для фукции f из (53). Умножим второй ряд из (53) на неопределенный пока множитель A, третий ряд — на неопределенный множитель B и прибавим полученные выражения к уравнению (61). Определим значения множителей A и B так, чтобы суммы коэффициентов при $(\partial f/\partial t)_{l-1}$ и $(\partial^2 f/\partial t^2)_{l-1}$ обратились в нуль. Отсюда получаем систему алгебраических уравнений

$$-s_1 A-s_{1,2}B+\frac{1}{2}(\beta_1+s_1^2\beta_3-s_{1,2}^2)=0,$$

$$s_1^2 A+s_{1,2}^2 B+\frac{1}{3}(\beta_1-s_1^3\beta_3+s_{1,2}^3)=0,$$

решение которой имеет вид

$$A=\frac{1}{6}\frac{\tau_l^2}{\tau_{l-1}\tau_{l-2}}\left[(2+3s_{1,2})\beta_1+s_1^2\left(s_{1,2}+2\frac{\tau_{l-2}}{\tau_l}\right)\beta_3-s_{1,2}^3\right],$$

$$B=-\frac{1}{6}\frac{\tau_l^3}{\tau_{l-2}(\tau_{l-1}+\tau_{l-2})}\left[(2+3s_{1,2})\beta_1+s_1^3\beta_3+\frac{2\tau_{l-2}-\tau_{l-1}}{\tau_l}s_{1,2}^2\right]. \qquad (66)$$

Система уравнений, состоящая из уравнения (61), второго и третьего рядов из (53) с учетом найденных значений неизвестных A и B и равенств (60), (47), позволяет получить следующую формулу для однородной сильно устойчивой явной разностной схемы порядка $p=3$:

$$\beta_1 y_l-\beta_2 y_{l-1}+\beta_3 y_{l-2}-y_{l-3}=$$
$$=[A+B+\tau_l(\beta_1-\beta_3 s_1+s_{1,2})]f_{l-1}-Af_{l-2}-Bf_{l-3}+O(\bar{\tau}^4)\,. \qquad (67)$$

Для построения l-шаговой неявной схемы при $l=3$ четвертого порядка дополним уравнение (61) первым, вторым и третьим рядами Тейлора для фукции f из (53). Умножим первый ряд из (53) на неопределенный пока множитель A, второй ряд — на неопределенный множитель B, третий ряд — на неопределенный множитель C и прибавим полученные выражения к уравнению (61). Определим значения множителей A, B и C так, чтобы суммы коэффициентов при $(\partial f/\partial t)_{l-1}$, $(\partial^2 f/\partial t^2)_{l-1}$ и $(\partial^3 f/\partial t^3)_{l-1}$ обращались в нуль. Отсюда получаем систему алгебраических уравнений:

$$A - s_1 B - s_{1,2} C + \frac{\tau_l}{2}(\beta_1 + s_1^2 \beta_3 - s_{1,2}^2) = 0,$$

$$A + s_1^2 B + s_{1,2}^2 C + \frac{\tau_l}{3}(\beta_1 - s_1^3 \beta_3 + s_{1,2}^3) = 0,$$

$$A - s_1^3 B - s_{1,2}^3 C + \frac{\tau_l}{4}(\beta_1 + s_1^3 \beta_3 - s_{1,2}^3) = 0,$$

решение которой имеет вид

$$A = -\frac{\tau_l^3}{12(\tau_l + \tau_{l-1})(\tau_l + \tau_{l-1} + \tau_{l-2})} \Big\{ [1 + s_1 + (2 + 3s_1)(1 + 2s_{1,2})]\beta_1 +$$

$$+ s_1^3 \left(s_{1,2} + \frac{\tau_{l-2}}{\tau_l} \right) \beta_1 - s_{1,2}^3 \frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2}}{\tau_l} \Big\},$$

$$B = \frac{\tau_l^3}{12\tau_{l-1}\tau_{l-2}(\tau_l + \tau_{l-1})} \Big\{ \left(1 + 2\frac{\tau_{l-1} - \tau_{l-2}}{\tau_l} \right) \beta_1 +$$

$$+ s_1^3 \left[2 + s_1 + 2\frac{\tau_{l-2}}{\tau_{l-1}}(3 + 2s_1) \right] \beta_3 - s_{1,2}^3 (2 + s_{1,2}) \Big\}, \qquad (68)$$

$$C = -\frac{\tau_l^4}{12\tau_{l-2}(\tau_{l-1} + \tau_{l-2})(\tau_l + \tau_{l-1} + \tau_{l-2})} \Big[(1 + 2s_1)\beta_1 + s_1^3 \left(2 + \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right) \beta_3 +$$

$$+ s_{1,2}^3 \left(\frac{3\tau_{l-2} - \tau_{l-1}}{\tau_l} + 2\frac{2\tau_{l-2} - \tau_{l-1}}{\tau_{l-1} + \tau_{l-2}} \right) \Big].$$

Система уравнений, состоящая из уравнения (61), первого, второго и третьего рядов из (53) с учетом найденных значений неизвестных A, B и C и равенств (60), (47), позволяет получить следующую формулу для однородной сильно устойчивой неявной разностной схемы порядка $p = 4$:

$$\beta_1 y_l - \beta_2 y_{l-1} + \beta_3 y_{l-2} - y_{l-3} = -Af_l +$$

$$+ (A + B + C + \beta_1 - \beta_3 s_1 + s_{1,2})\tau_l f_{l-1} - Bf_{l-2} - Cf_{l-3} + O(\bar{\tau}^5). \qquad (69)$$

Приведенный процесс построения сильно устойчивых линейных l-шаговых схем в рамках доказательства теоремы 5 показал, что внутри каждого семейства однородных схем, т.е. при конкретном значении l, коэффициенты характеристического многочлена Φ_a являются исключительно функциями шагов разностной сетки и независимо от локального порядка схемы остаются действительными.

Для завершения доказательства теоремы 5 необходимо показать, что корни характеристического многочлена Φ_a остаются действительными для многошаговой схемы при $l = 4$. Для этого построим характеристический многочлен Φ_a с заданными значениями действительных корней $q_0 = 1$, $q_1 = 1/a_1$ и $q_2 = 1/a_2$:

$$\Phi_a(q) = (q - 1)(a_1 q - 1)(a_2 q - 1)(a_3 q - 1) =$$

$$= a_1 a_2 a_3 q^4 - (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3) q^3 +$$

$$+ (a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) q^2 +$$

$$+ (a_1 + a_2 + a_3 + 1) q + 1 = \beta_1 q^4 - \beta_2 q^3 + \beta_3 q^2 - \beta_4 q + 1, \qquad (70)$$

где $a_1 = 1 + \tau_{l-1} / \tau_l$, $a_2 = 1 + a_1 \tau_{l-1} / \tau_l - \tau_{l-2} / \tau_l$ и введены обозначения $\beta_1 = a_1 a_2 a_3$, $\beta_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3$, $\beta_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$, $\beta_4 = 1 + a_1 + a_2 + a_3$.

Коэффициент a_3 выберем так, чтобы характеристический многочлен (70) соответствовал линейной процедуре (15), аппроксимирующей уравнение $\partial y / \partial t - f(t, y) = 0$. Для этого умножим обе части первого ряда системы (48) на коэффициент при q^4 в характеристическом многочлене (70), обе части второго ряда — на коэффициент при q^2 в том же многочлене, обе части третьего ряда — на коэффициент при q в (70) и эти три ряда прибавим к четвертому ряду системы (48). В результате получим

$$\beta_1 y_l - \beta_2 y_{l-1} + \beta_3 y_{l-2} - \beta_4 y_{l-3} + y_{l-4} = (\beta_1 - s_1 \beta_3 + s_{1,2} \beta_4 - s_{1,3}) \tau_l f_{l-1} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \tau_l (\beta_1 + s_1^2 \beta_3 - s_{1,2}^2 \beta_4 + s_{1,2}^2) \tau_l \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{l-1} +$$

$$+ \frac{1}{3!} \tau_l^2 (\beta_1 - s_1^3 \beta_3 + s_{1,2}^3 \beta_4 - s_{1,2}^3) \tau_l \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)_{l-1} +$$

$$+ \frac{1}{4!} \tau_l^3 (\beta_1 + s_1^4 \beta_3 - s_{1,2}^4 \beta_4 + s_{1,2}^4) \tau_l \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \right)_{l-1} +$$

$$+ \frac{1}{5!} \tau_l^4 (\beta_1 - s_1^5 \beta_3 + s_{1,2}^5 \beta_4 - s_{1,2}^5) \tau_l \left(\frac{\partial^4 f}{\partial t^4} \right)_{l-1} + O(\bar{\tau}^6), \qquad (71)$$

где

$$s_{1,3} = \frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2} + \tau_{l-3}}{\tau_l}.$$

Для выполнения условия (8) необходимо коэффициент при $\tau_l f_{l-1}$ приравнять единице, т.е. положить

$$\beta_1 - s_1 \beta_3 + s_{1,2} \beta_4 - s_{1,3} = a_1 a_2 a_3 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} +$$

$$+ (a_1 + a_2 + a_3 + 1) \frac{\tau_{l-2} + \tau_{l-1}}{\tau_l} - \frac{\tau_{l-3} + \tau_{l-2} + \tau_{l-1}}{\tau_l} = 1. \qquad (72)$$

Из (72) следует

$$a_3 = \frac{1 + \dfrac{\tau_{l-3}}{\tau_l} + \left[a_1 a_2 - (a_1 + a_2) \dfrac{\tau_{l-2}}{\tau_{l-1}} \right] \dfrac{\tau_{l-1}}{\tau_l}}{a_1 a_2 - (a_1 + a_2) \dfrac{\tau_{l-2}}{\tau_{l-1}} + \dfrac{\tau_{l-2}}{\tau_l}}. \qquad (73)$$

Откуда, используя обозначение отношения шагов

$$a_1 = 1 + \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} = 1 + \gamma,$$

$$a_2 = 1 + \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \left(1 + \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right) - \frac{\tau_{l-2}}{\tau_l} = 1 + \gamma,$$

имеем

$$a_3 = \frac{1 + \frac{\tau_{l-3}}{\tau_{l-2}} \frac{\tau_{l-2}}{\tau_{l-1}} \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} + \left[a_1 a_2 - (a_1 + a_2) \frac{\tau_{l-2}}{\tau_{l-1}} \right] \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l}}{a_1 a_2 - (a_1 + a_2) \frac{\tau_{l-2}}{\tau_{l-1}} + \frac{\tau_{l-2}}{\tau_{l-1}} \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l}} =$$

$$= \frac{1+\gamma^3 + [(1+\gamma)^2 - 2(1+\gamma)\gamma]\gamma}{(1+\gamma)^2 - 2(1+\gamma)\gamma - \gamma^2} = 1+\gamma,$$

т.е. для всех γ имеем $1 < a_3 \le 2$. Таким образом, корни характеристического уравнения для семейства схем (71) являются действительными и различными и подчиняются зависимостям $q_0 = 1$, $0 < q_1 < 1$, $0 < q_2 < 1$ и $0 < q_3 < 1$. Следовательно, в соответствии с определеним 5 семейство однородных четырехточечных схем (61) относится к сильно устойчивым.

В работе [3] в задаче моделирования циркуляции атмосферы для получения разностного представления Λ производных первого и второго порядков, входящих в дифференциальный оператор D уравнений гидродинамики и тепло-, массопереноса, проводилась аппроксимация разностными операторами четвертого порядка. Поэтому, очевидно, следует построить для обыкновенного дифференциального уравнения $\partial y / \partial t - f(t, y) = 0$ сильно устойчивую явную разностную схему порядка $p = 4$, согласующуюся с порядком аппроксимации дифференциального оператора D в уравнениях задачи циркуляции атмосферы. При этом, конечно, будет полезно записать схему для произвольной n-й точки разностной сетки.

Дополним уранение (71) вторым, третьим и четвертым рядами Тейлора для фукции f из (53). Умножим второй ряд из (53) на неопределенный пока множитель A, третий ряд — на неопределенный множитель B, четвертый ряд — на неопределенный множитель C и прибавим полученные выражения к уравнению (71). Определим значения множителей A, B и C так, чтобы суммы коэффициентов при $(\partial f / \partial t)_{n+l-1}$, $(\partial^2 f / \partial t^2)_{n+l-1}$ и $(\partial^3 f / \partial t^3)_{n+l-1}$ обращались в нуль. Отсюда получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} s_1 A + s_{1,2} B + s_{1,3} C &= \frac{\tau_{n+l}}{2} \vartheta_1, \\ s_1^2 A + s_{1,2}^2 B + s_{1,3}^2 C &= -\frac{\tau_{n+l}}{3} \vartheta_2, \\ s_1^3 A + s_{1,2}^3 B + s_{1,3}^3 C &= \frac{\tau_{n+l}}{4} \vartheta_3, \end{aligned} \qquad (74)$$

где введены следующие обозначения:

$$s_1 = \frac{\tau_{n+l-1}}{\tau_{n+l}}, \quad s_{1,2} = \frac{\tau_{n+l-1} + \tau_{n+l-2}}{\tau_{n+l}}, \quad s_{1,3} = \frac{\tau_{n+l-1} + \tau_{n+l-2} + \tau_{n+l-3}}{\tau_{n+l}},$$

$$\vartheta_1 = \beta_1 + s_1^2 \beta_3 - s_{1,2}^2 \beta_4 + s_{1,3}^2,$$

$$\vartheta_2 = \beta_1 - s_1^3 \beta_3 + s_{1,2}^3 \beta_4 - s_{1,3}^3,$$

$$\vartheta_3 = \beta_1 + s_1^4 \beta_3 - s_{1,2}^4 \beta_4 + s_{1,3}^4.$$

Если дополнительно ввести обозначения

$$s_2 = \frac{\tau_{n+l-2}}{\tau_{n+l}}, \; s_3 = \frac{\tau_{n+l-3}}{\tau_{n+l}}, \; s_{2,3} = \frac{\tau_{n+l-2} + \tau_{n+l-3}}{\tau_{n+l}},$$

то решение системы уравнений (74) примет вид

$$A = \frac{\tau_{n+l}}{12 s_1 s_2 s_{2,3}} [6 s_{1,2} s_{1,3} \vartheta_1 + 4(s_{1,2} + s_{1,3}) \vartheta_2 + 3\vartheta_3],$$

$$B = -\frac{\tau_{n+l}}{12 s_2 s_3 s_{1,2}} [6 s_1 s_{1,3} \vartheta_1 + 4(s_1 + s_{1,3}) \vartheta_2 + 3\vartheta_3],$$

$$C = \frac{\tau_{n+l}}{12 s_3 s_{2,3} s_{1,3}} [6 s_1 s_{1,2} \vartheta_1 + 4(s_1 + s_{1,2}) \vartheta_2 + 3\vartheta_3].$$

Система уравнений, состоящая из уравнения (71), второго, третьего и четвертого рядов из (53) с учетом найденных значений неизвестных A, B, C и равенств (70), (73), позволяет получить следующую формулу для сильно устойчивой явной разностной схемы порядка $p = 4$:

$$\beta_1 y_{n+l} - \beta_2 y_{n+l-1} + \beta_3 y_{n+l-2} - \beta_4 y_{n+l-3} + y_{n+l-4} =$$
$$= [A + B + C + \tau_{n+l} (\beta_1 - s_1 \beta_3 + s_{1,2} \beta_4 - s_{1,3})] f_{n+l-1} -$$
$$- A f_{n+l-2} - B f_{n+l-3} - C f_{n+l-4} + O(\bar{\tau}^5).$$

Таким образом, доказанная теорема 5 позволяет построить семейство одностадийных l-шаговых явных и неявных численных методов для решения задачи (1), (2). Однако возникает вопрос: следует ли значение l задавать произвольно большим, если правая часть дифференциального уравнения (1), (2) непрерывна и ограничена вместе со своими производными l-го порядка? Естественно, увеличение значения l повышает стоимость решения, особенно в приложении к численному решению систем уравнения с частными производными. Следовательно, выбор того или иного значения l зависит от характера решаемой задачи. Вряд ли целесообразно использовать большие значения l в тех случаях, когда применимы методы с ограниченными значениями l и не ожидается существенного улучшения результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, отметим, что построенные неявные схемы (30), (40) и (45), включающие дополнительное приближенное значение $f(t_{n+l}, y_{n+l})$, не дают явных выражений для нахождения y_{n+l}, а представляют собой лишь уравнения относительно этой неизвестной. В этом случае можно воспользоваться двустадийным алгоритмом: вначале определить y_{n+l} по явной схеме, порядок точности которой равен $O(\tau^{l-1})$, затем, вычислив $f(t_{n+l}, y_{n+l})$, определить y_{n+l} по неявной схеме порядка $O(\tau^l)$. Значение y_{n+l} можно также находить по неявной схеме, пользуясь каким-либо методом последовательных приближений. Итерации значительно усложняют процесс вычислений y_{n+l} и являются существенным недостатком неявных методов. Особенно это касается случаев, когда $f(t_{n+l}, y_{n+l})$ есть значение разностных выражений для конвективных и диффузионных членов нелинейных дифференциальных уравнений гидродинамики [3], поскольку нелинейность уравнений не позволяет априори обеспечить сходимости соответствующего итерационного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Приходько С.В., Тырчак Ю.М., Черныш Р.И. Методы эффективного решения задач моделирования и прогнозирования региональных атмосферных процессов. *Проблемы программирования*. 2004. № 2. С. 274–287.
2. Прусов В.А., Дорошенко А.Ю. Моделювання природних та техногенних процесів в атмосфері. Київ: Наук. думка. 2006. 540 с.
3. Прусов В.А., Дорошенко А.Е. Многошаговый метод численного решения задачи моделирования циркуляции атмосферы в постановке задачи Коши. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 4. С. 104–112.
4. Prusov V., Doroshenko A. Modeling and forecasting atmospheric pollution over region. Annales Univ. Sci. Budapest, 2003. Vol. 46. P. 71–79.
5. Prusov V., Doroshenko A., Tyrchak Yu. Highly efficient methods for regional weather forecasting. *System Research and Information Technologies*. 2005. N 4. P. 312–319.
6. Prusov V.A., Doroshenko A.Yu. Methods of efficient modeling and forecasting regional atmospheric processes. Advances in Air Pollution Modeling for Environmental Security. NATO Science Series. 54. Springer. Printed in the Netherlands. 2005. P. 1012–1023.
7. Young J.A. Comparative properties of some time differencing schimes for linear and nonlinear oscillations. *Mon. Wea. Rev*. 1968. Vol. 96, N 6. P. 118–127.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы. Москва: Наука, 1978. 512 с.
9. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Москва: ИЛ, 1953. 461 с.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Москва: Наука, 1987. 598 с.
11. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Москва: Физматгиз, 1962. Т. 2. 418 с.
12. Горбунов А.Д. Разностные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Изд-во МГУ. 1973. 217 с.
13. Залёткин С.Ф. О численном решении задачи Коши для обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений на больших отрезках интегрирования. *Вычислительные методы и программирование*. 1977. Т. XXVI. С. 27–41.
14. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Москва: Наука, 1976. Т. 2. 399 с.
15. Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений. Москва: ИЛ, 1955. 418 с.
16. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1986. 374 с.
17. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. Москва: Мир, 1979. 312 с.
18. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. Москва: Мир, 1977. 612 с.
19. Gear C.W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. 1971. P. 146–156.
20. Henrici P. Discrete variable methods in ordinary differential equations. New York; London: J. Wiley & Sons. 1962. 612 p.
21. Shampine L.F., Gordon M.K. Computer solution of ordinary differential equations. San-Francisco: W.H. Freeman, 1975. 256 p.
22. Штеттер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Мир, 1978. 462 с.
23. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Москва: Наука, 1975. 431 с.

Надійшла до редакції 29.06.2016

В.А. Прусов, А.Ю. Дорошенко

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ З ПЕРЕДІСТОРІЄЮ

Анотація. Досліджено теоретичні аспекти побудови сім'ї багатокрокових одностадійних методів розв'язування задачі Коші з передісторією для звичайних диференціальних рівнянь. Розглянуто загальні питання, пов'язані з проблемами дискретизації, апроксимації, збіжності та стійкості. Детально досліджено проблему підвищення точності чисельного розв'язку Наведені результати придатні для чисельного розв'язування рівнянь в частинних похідних.

Ключові слова: звичайне диференціальне рівняння, багатокроковий одностадійний метод, дискретизація, апроксимація, збіжність, сильна стійкість.

V.A. Prusov, A.Yu. Doroshenko

NUMERICAL METHOD TO SOLVE THE CAUCHY PROBLEM WITH PREHISTORY

Abstract. The paper is devoted to the theoretical aspects of constructing a family of single-stage multi-step methods for solving the Cauchy problem with prehistory for ordinary differential equations. The paper includes general issues related to discretization, approximation, convergence, and stability. The problem of improving the accuracy of numerical solutions is analyzed in detail. Many of the results presented in the paper go beyond its title and are suitable for the numerical solution of partial differential equations.

Keywords: ordinary differential equations, one-stage multi-step method, discretization, approximation, convergence, strong stability.

Прусов Виталий Арсениевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: vitaliy@softick.com.

Дорошенко Анатолий Ефимович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Национального технического университета «Киевский политехнический институт», e-mail: doroshenkoanatoliy2@gmail.com.