

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.10.037>

УДК 539.3

**І.Я. Жбадинський**

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

E-mail: zhbadynskyi.igor@gmail.com

## **Взаємодія одноперіодичних податливих дискових еліптичної форми включень при падінні пружної гармонічної хвилі**

*Представлено членом-кореспондентом НАН України Г.С. Кітом*

*Розглянуто нормальне падіння плоскої пружної гармонічної поздовжньої хвилі на масив компланарних тонких податливих еліптичних включень одноперіодичного розташування у тривимірній безмежній матриці. Пружні властивості включень описуються лінійними залежностями між напруженнями і стрибками переміщень в областях їх локалізації. Відповідна симетрична задача хвильового розсіяння зводиться до граничного інтегрального рівняння відносно стрибка переміщень на протилежних поверхнях включення в елементарній комірниці за допомогою періодичної функції Гріна, яка подана у вигляді інтегралів Фур'є для покращення збіжності її розрахунків. Коректне розв'язання рівняння проводиться методом відображень. Для різних взаємних орієнтацій у системі еліптичних включень встановлено залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень відриву в околі включень від хвильового числа. Як окремий випадок, досліджено динамічну взаємодію у одноперіодичному масиві еліптичних тріщин.*

**Ключові слова:** *дискові еліптичні у плані включення, динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень, метод граничних інтегральних рівнянь, періодична функція Гріна, метод відображень.*

Міцність і довговічність інженерних конструкцій істотно залежить від структури їх матеріалу, який може містити тріщини, заповнені чужорідними речовинами порожнини й інші дисперсійні частки, породжені процесами виготовлення чи експлуатації деталей та вузлів. Часто тонкі включення зумисно вбудовуються у матеріал для його зміцнення і перешкоджання утворенню та поширенню тріщин. Досліджуючи механічні характеристики тіл з такого роду неоднорідностями, слід враховувати їх форму, розміри, кількість та взаємне розташування. У багатьох випадках зовнішні навантаження елементів конструкцій змінюються в часі, тому актуальним є вивчення концентрації напружень в околі дефектів типу тріщин та тонких включень на основі розв'язання динамічних задач теорії пружності. Особливої уваги заслуговує встановлення концентрації динамічних напружень у тривимірній постановці задач як таких, що найбільш загально відображають просторове розташування дефектів та задання зовнішніх чинників. Проблеми динамічного навантаження пружних

тіл з круговими тріщинами та тонкостінними включеннями у тривимірній постановці висвітлені у працях [1–3]. Нестационарна взаємодія дефектів зі змінною кривиною контуру обмежена розглядом взаємодії лише двох еліптичних тріщин [4].

У даній роботі методом граничних інтегральних рівнянь (ГІР) досліджена симетрична задача нормального падіння гармонічної плоскої поздовжньої хвилі на одноперіодичну систему тонких податливих еліптичних включень, розташованих у пружній матриці.

**Постановка задачі.** Нехай безмежна пружна матриця з модулем зсуву  $\mu$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu$  містить у площині  $x_3 = 0$  одноперіодичний масив тонких податливих еліптичних включень  $S_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) з однаковими товщинами  $h$ , великими півосями  $a$  та малими півосями  $b$ , модулем зсуву  $\mu_0$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu_0$ . Геометричні центри включень розташовані на осі  $Ox_1$  з періодичною відстанню  $d$ . Включення перебувають у умовах ідеального механічного контакту з матрицею, тобто забезпечується неперервність переміщень та напружень при перетині міжфазних поверхонь. В матриці перпендикулярно до площини розташування неоднорідностей поширюється пружна гармонічна плоска поздовжня хвиля з циклічною частотою  $\omega$  і відомим розподілом нормальних напружень  $\sigma_{33}^{in}(\mathbf{x})$ , де  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  – радіус-вектор точки простору в декартовій системі координат  $Ox_1x_2x_3$ . Тут і далі розглядаються лише амплітудні значення величин хвильового процесу, оскільки часовий множник  $\exp(-i\omega t)$ , де  $t$  – час,  $i = \sqrt{-1}$ , вилучається з розв’язку. Адекватність моделі забезпечується малістю товщини включень відносно їх великої півосі, коли  $h = 2\delta_1 a$  ( $\delta_1 \ll 1$ ), а також умовою податливості матеріалу включень відносно матричного матеріалу, коли  $\mu_0 = \delta_2 \mu$  ( $\delta_2 \ll 1$ ), де величини  $\delta_1$  і  $\delta_2$  мають однаковий порядок. За таких припущень [2] маємо

$$\sigma_{33n}(\mathbf{x}) = \frac{2(1-\nu_0)\mu_0}{(1-2\nu_0)h} \Delta u_{3n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

**ГІР задачі та періодична функція Гріна.** З урахуванням умов періодичності Блоха [1] та граничних умов на поверхнях включень (1), у вказаній постановці задача зводиться до ГІР з інтегруванням по області розташування лише одного дефекту  $S = S_0$  відносно стрибка нормальних переміщень  $\Delta u$  у цій області

$$\frac{2(1-\nu_0)\mu_0}{(1-2\nu_0)h} \Delta u(\mathbf{x}) - \frac{\mu}{\pi\omega_2^2} \iint_S \Delta u(\mathbf{y}) [R(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}} = \sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \quad (2)$$

В ГІР (2) гіперсингулярне ядро  $R(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$  з особливістю потенціалу Гельмгольца визначається формулою

$$R(r) = \{(9-9i\omega_2 r - 4\omega_2^2 r^2 + i\omega_2^3 r^3) \exp(i\omega_2 r) - [9-9i\omega_1 r + (\omega_2^2 - 5\omega_1^2) r^2 + i\omega_1(2\omega_1^2 - \omega_2^2) r^3 + \frac{1}{4}(2\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 r^4] \exp(i\omega_1 r)\} r^{-5}, \quad (3)$$

де  $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$  – відстань між точкою джерела  $\mathbf{x}(x_1, x_2)$  і точкою інтегрування  $\mathbf{y}(y_1, y_2)$ ;  $\omega_j = \omega/c_j$  ( $j = 1, 2$ ) – хвильові числа;  $c_1, c_2$  – швидкості поширення у матриці поздовжніх та поперечних хвиль відповідно; ядро  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  описує взаємодію актуального включення  $S$  з нескінченним числом включень у всіх елементарних комірках і відіграє роль періодичної функції

Гріна для розглянутої задачі. Ядро  $G$  має форму нескінченної періодичної суми, яку пропонується розділити на дві підмножини залежно від впливу включень з різних зон їх розташування, а саме:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (4)$$

Тут

$$G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1 - \delta_{n0}) \sum_{n=-b+1}^{b-1} R[r_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})], \quad (5)$$

$$G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=b}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \mathbf{T}_j^{\mathbf{x}} \left[ \frac{\exp[i\omega_j r_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})]}{r_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right] + \sum_{n=-\infty}^{-b} \sum_{j=1}^2 \mathbf{T}_j^{\mathbf{x}} \left[ \frac{\exp[i\omega_j r_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})]}{r_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right],$$

де  $r_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1 - nd)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ ;  $b \geq 2$  – ціле число;  $\mathbf{T}_j^{\mathbf{x}}$  ( $j = 1, 2$ ) – відомі диференціальні оператори [3].

З геометричної точки зору функція  $G_1$  як частина функції Гріна  $G$  відповідає за наявність навколо відлікового включення “близьких” включень, розташованих в областях  $S_n$  ( $n \in (-b, -1] \cup [1, b)$ ), функція  $G_2$ , яка є частиною функції Гріна  $G$ , відповідає впливу “далеких” включень, що розташовані в областях  $S_n$  ( $n \in (-\infty, -b] \cup [b, \infty)$ ). Мета такого поділу полягає в тому, що нескінченні суми (4) сходяться дуже повільно. Таким чином, їх необхідно перетворити для забезпечення експоненційної збіжності, що може бути досягнуто за допомогою суперпозиції (4) і спеціальних інтегральних подань виразу  $\exp(i\omega_j r_n)/r_n$ . Крім того, відокремлення з функції Гріна  $G$  функції  $G_1$ , як обмеженої суми для сусідніх включень спрямоване на прискорення бажаної збіжності. Оскільки  $r_n \neq 0$ , функція  $G_1$  не містить особливостей і може обчислюватись стандартними процедурами.

Для запису функції  $G_2$  у більш зручній формі використаємо таке інтегральне подання [3]:

$$\frac{\exp[i\omega_j r_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})]}{r_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \int_0^{\infty} t \frac{\exp[-|x_1 - y_1 - nd| \sqrt{t^2 - \omega_j^2}]}{\sqrt{t^2 - \omega_j^2}} J_0[|x_2 - y_2| t] dt. \quad (6)$$

Тут  $J_0$  – функція Бесселя, для забезпечення умов випромінювання присутній радикал визначається наступним чином:

$$\sqrt{t^2 - \omega_j^2} = \begin{cases} \sqrt{t^2 - \omega_j^2}, & \text{якщо } |t| \geq \omega_j; \\ -i\sqrt{\omega_j^2 - t^2}, & \text{якщо } |t| < \omega_j. \end{cases}$$

Тоді після підстановки співвідношення (6) в рівняння (5), підсумування геометричної прогресії зі знаменником  $\exp\left(-\sqrt{t^2 - (\omega_j d)^2}\right)$  та врахування дії диференціальних операторів  $\mathbf{T}_j^{\mathbf{x}}$  функція  $G_2$  приймає експоненційно збіжну форму:

$$G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{d^5} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\infty} t \frac{\exp(-U_j(t))}{U_j(t)[1 - \exp(-U_j(t))]} Y_j\left(\frac{x_1 - y_1}{d}, t\right) \Omega_j(x_2 - y_2, t) dt,$$

де  $Y_j(r, t) = \exp[-(b-1-r)U_j(t)] + \exp[-(b-1+r)U_j(t)]$ , функції  $\Omega_j$  наведені в праці [3]. Приймаючи досить великим значення  $b$ , покращуємо збіжність інтегралів у функції  $G$ .

Ефективне числове розв'язування ГПР (2) повинно забезпечуватись відповідними регуляризаційними процедурами щодо інтегральних доданків цього рівняння, обумовлених гіперсингулярністю  $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-3}$  в ядрі  $R$  у точці джерела  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , а також сингулярностями в інтегральних поданнях ядра  $G_2$  в точках  $t = \omega_j d$ , що є коренями функцій  $U_j(t)$ . Методика усунення сингулярностей ядра функції  $G_2$  детально описана у роботі [3]. Слід відзначити, що у окремому випадку  $\mu_0 = 0$  ГПР (2) відповідає задачі динамічної взаємодії системи еліптичних тріщин.

**Метод відображень та регуляризація ГПР задачі.** Збіг характеристичних частин ГПР розглянутої задачі і задачі динамічного навантаження безмежного однорідного тіла з тріщиною дозволяє використати для побудови регулярного аналога рівняння (2) методику роботи [4]. Вона передбачає відображення області тріщини на кругову область  $\tilde{S}$  одиничного радіуса. З цією метою проводимо заміну змінних:

$$\begin{cases} x_1 = a\xi_1, & y_1 = a\eta_1, \\ x_2 = b\xi_2, & y_2 = b\eta_2, \end{cases} \quad (7)$$

де  $\xi(\xi_1, \xi_2)$   $\eta(\eta_1, \eta_2)$  – нові змінні в області  $\tilde{S}$ .

Після заміни (7) ГПР (2) набуде вигляду

$$\frac{2(1-\nu_0)\mu_0}{(1-2\nu_0)h} \Delta \tilde{u}(\xi) - \frac{\mu}{\pi\omega_2^2} \iint_{\tilde{S}} \Delta \tilde{u}(\eta) \left[ R\left(\frac{|\xi-\eta|}{\beta(\xi, \eta)}\right) + \tilde{G}(\xi, \eta) \right] d\tilde{S}_\eta = \tilde{\sigma}_{33}^{\text{in}}(\xi), \quad \xi \in \tilde{S}, \quad (8)$$

У рівнянні (8) введені такі позначення для складних функцій:

$$\Delta \tilde{u}(\xi) = ab \Delta u(\mathbf{x}) \Big|_{\substack{x_1=a\xi_1 \\ x_2=b\xi_2}}; \quad \tilde{\sigma}_{33}^{\text{in}}(\xi) = \sigma_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x}) \Big|_{\substack{x_1=a\xi_1 \\ x_2=b\xi_2}}; \quad \tilde{G}(\xi, \eta) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\substack{x_1=a\xi_1, y_1=a\eta_1 \\ x_2=b\xi_2, y_2=b\eta_2}}.$$

Функція  $\beta(\xi, \eta)$  характеризує відношення відстаней між точками  $\xi$  і  $\eta$  та їх прообразами, тобто

$$\beta(\xi, \eta) = \frac{1}{a} \left[ 1 - q^2 \frac{(\eta_2 - \xi_2)^2}{|\xi - \eta|^2} \right]^{-1/2}, \quad q = \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2}.$$

У гіперсингулярному ГПР (8) можна виділити особливі інтеграли, перетворивши його тотожно [5]:

$$\begin{aligned} & \frac{8\pi(1-\nu_0)(1-\nu)\mu_0 \Delta \tilde{u}(\xi)}{(1-2\nu_0)h\mu} - \iint_{\tilde{S}} \Delta \tilde{u}(\eta) \frac{[\beta(\xi, \eta)]^3}{|\xi - \eta|^3} d\tilde{S}_\eta - \frac{(7-12\nu+8\nu^2)\omega_2^2}{8(1-\nu)} \iint_{\tilde{S}} \frac{\Delta \tilde{u}(\eta)}{|\xi - \eta|} d\tilde{S}_\eta - \\ & - \iint_{\tilde{S}} \Delta \tilde{u}(\eta) \left[ \frac{4(1-\nu)}{\omega_2^2} R\left(\frac{|\xi - \eta|}{\beta(\xi, \eta)}\right) - \frac{[\beta(\xi, \eta)]^3}{|\xi - \eta|^3} - \frac{(7-12\nu+8\nu^2)\omega_2^2 \beta(\xi, \eta)}{8(1-\nu)|\xi - \eta|} \right] d\tilde{S}_\eta - \\ & - \frac{4(1-\nu)}{\omega} \Delta \tilde{u}(\eta) \tilde{G}(\xi, \eta) d\tilde{S}_\eta = \frac{4\pi(1-\nu)}{\mu} \tilde{\sigma}(\xi), \quad \xi \in \tilde{S}. \end{aligned} \quad (9)$$

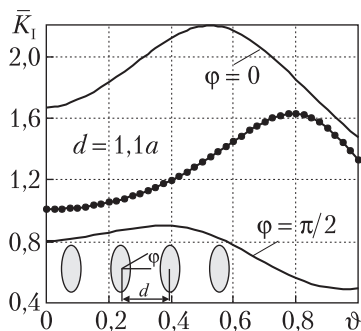


Рис. 1

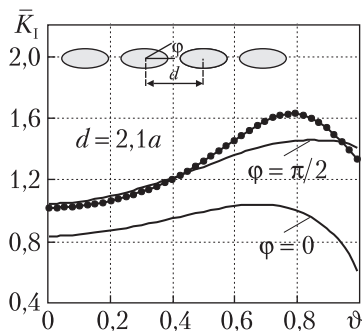


Рис. 2

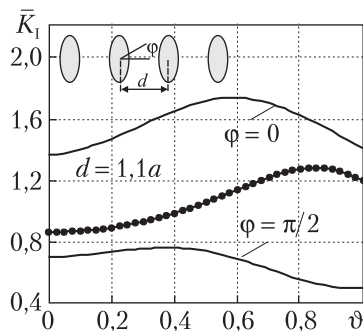


Рис. 3

Тут перші два інтеграли мають особливість ньютонівського (статичного) потенціалу. Їх регуляризація [5] ґрунтується на поданні

$$\Delta \tilde{u}(\boldsymbol{\eta}) = \sqrt{1 - \eta_1^2 - \eta_2^2} \tilde{\alpha}(\boldsymbol{\eta}), \quad (10)$$

де  $\tilde{\alpha}(\boldsymbol{\eta})$  – невідома функція. Подання (10) узгоджується із фізичним змістом функції  $\Delta u(\mathbf{x})$  як стрибка нормальних переміщень на включенні, що дорівнює нулю на контурі неоднорідності.

Для дискретизації рівняння (9) область  $\tilde{S}$  розбивається на граничні елементи, в межах яких припускається постійність шуканої функції, далі рівняння задовольняється у колокаційних точках посередині введених елементів. Так отримуємо систему  $Q$  ( $Q$  – кількість граничних елементів) лінійних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами відносно значень функції  $\tilde{\alpha}$  у прообразах вузлових точок на крузі.

**Аналіз одержаних результатів.** Як приклад розглянуто усталену у часі взаємодію однопериодичних тріщин ( $\mu_0 = 0$ , рис. 1; 2) та включень ( $h = 0,001a$ ,  $\mu_0/\mu = 0,003$ , рис. 3; 4) малі  $b$  (рис. 1; 3), великі  $a$  (рис. 2; 4), півосі яких лежать на осі періодичності  $Ox_1$  (орієнтація тріщин і включень, відстань  $d$  між їх геометричними центрами та відлік кута  $\varphi$  наведено на рисунках). Графіки стосуються тріщин і включень, що мають однаковий ексцентриситет  $b = 0,5a$  і знаходяться у полі плоскої поздовжньої гармонічної хвилі з постійною амплітудою напружень  $\sigma_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = N_0$ . Для нормування амплітуд КІН  $\bar{K}_I = |K_I|/K_I^{\text{st}}$  в околі тріщини (включення)  $S$  використовувалось значення максимального статичного КІН  $K_I^{\text{st}} = 2N_0\sqrt{\pi b}/E(\sqrt{1-(b/a)^2})$  у вершині меншої півосі ізольованої тріщини при одноосному розтягу зусиллями  $N_0$ . Для порівняння маркованими кривими показана поведінка динамічних КІН без урахування взаємодії тріщин (включень). Коефіцієнти Пуассона включення і матриці припускались однаковими  $\nu_0 = \nu = 0,3$ .

В розглянутому частотному діапазоні  $0 \leq \vartheta = \omega_2 d / (2\pi) \leq 1$  для тріщин (включень) КІН  $\bar{K}_I$  досягають абсолютного максимуму після монотонного зростання від статичних значень, що відповідають нульовій частоті  $\vartheta = 0$ . Періодичні еліптичні тріщини (включення), розташовані вздовж малих півосей, характеризуються швидшою зміною КІН  $\bar{K}_I$  у порівнянні

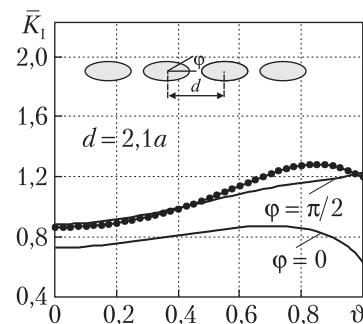


Рис. 4

з більш плавним графіком залежності від частоти КІН для однієї еліптичної тріщини [4] (див. рис. 1 та 3). Числові значення КІН  $\bar{K}_I$  поблизу вершин великих і малих півосей тріщин і включень більші у випадку їх розташування вздовж малих півосей (див. рис. 1 та 3) і менші за розташування вздовж великих півосей (див. рис. 2 та 4). При розташуванні включень вздовж великих півосей (див. рис. 2 та 4) у певному частотному діапазоні КІН  $\bar{K}_I$  поблизу вершин малих півосей еліпсів є меншими, ніж відповідні аналоги у випадку ізольованого включення. Практично у всьому розглянутому спектрі частот при ідентичному розташуванні неоднорідностей КІН  $\bar{K}_I$  для тріщин є більшими, ніж відповідні аналоги для включень.

*Результати роботи отримано при підтримці Українського науково-технологічного центру та Національної академії наук України (проект № 6247).*

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ahmadi S.F., Eskandary M. Vibration analysis of a rigid circular disk embedded in a transversely isotropic solid. *J. Eng. Mech.* 2014. № 7. P. 04014048-1–04014048-13. doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000757](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000757)
2. Mikhas'kiv V.V., Butrak I.O., Laushnik I.P. Interaction between a compliant disk-shaped inclusion and a crack upon incidence of an elastic wave. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.* 2013. № 3. P. 465–471. doi: <https://doi.org/10.1134/S0021894413030164>
3. Mykhas'kiv V.V., Zhabdynskyi I.Ya., Zhang Ch. Dynamic stresses due to time-harmonic elastic wave incidence on doubly periodic array of penny-shaped cracks. *J. Math. Sci.* 2014. № 1. P. 114–122. doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-014-2094-6>
4. Хай М.В., Михаськів В.В., Галего Р., Стасюк Б.М. Симетрична задача про усталену за часом взаємодію еліптичних тріщин у безмежному тілі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2000. № 2. С. 112–118.
5. Kit H.S., Khaj M.V., Mykhas'kiv V.V. Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM. *Engng. Fract. Mech.* 1996. № 2. P. 191–207. doi: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(96\)00003-3](https://doi.org/10.1016/0013-7944(96)00003-3)

Надійшло до редакції 05.06.2018

#### REFERENCES

1. Ahmadi, S. F. & Eskandary M. (2014). Vibration analysis of a rigid circular disk embedded in a transversely isotropic solid. *J. Eng. Mech.*, No. 7, pp. 04014048-1–04014048-13. doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000757](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000757)
2. Mikhas'kiv, V. V., Butrak, I. O. & Laushnik, I. P. (2013). Interaction between a compliant disk-shaped inclusion and a crack upon incidence of an elastic wave *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, No. 3, pp. 465-471. doi: <https://doi.org/10.1134/S0021894413030164>
3. Mykhas'kiv, V. V., Zhabdynskyi, I. Ya. & Zhang Ch. (2014) Dynamic stresses due to time-harmonic elastic wave incidence on doubly periodic array of penny-shaped cracks *J. Math. Sci.*, No. 1, pp. 114-122. doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-014-2094-6>
4. Khaj, M. V., Mykhas'kiv, V. V., Galego, R. & Stasyuk, B. M. (2000). Symmetric problem on Time-harmonic interaction of elliptic cracks in an infinite solid *Math. methods and phys.-mech. fields.*, No. 2, pp. 112-118 (in Ukrainian).
5. Kit, H. S., Khaj, M. V. & Mykhas'kiv V. V. (1996). Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM *Engng. Fract. Mech.*, No. 2, pp. 191-207. doi: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(96\)00003-3](https://doi.org/10.1016/0013-7944(96)00003-3)

Received 05.06.2018



*И.Я. Жбадинский*

Институт прикладных проблем механики и математики  
им. Я.С. Подстригача НАН Украины, Львов  
E-mail : zhbadynskyi.igor@gmail.com

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОДНОПЕРИОДИЧЕСКИХ  
ПОДАТЛИВЫХ ДИСКОВЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ВКЛЮЧЕНИЙ  
ПРИ ПАДЕНИИ УПРУГОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрено нормальное падение плоской упругой гармонической продольной волны на массив компланарных тонких податливых эллиптических включений однопериодического расположения в трехмерной бесконечной матрице. Упругие свойства включений описываются линейными зависимостями между напряжениями и прыжками перемещений в областях их локализации. Соответствующая симметрическая задача волнового рассеяния сводится к граничному интегральному уравнению относительно скачка перемещений на противоположных поверхностях включения в элементарной ячейке с помощью периодической функции Грина, которая представлена в виде интегралов Фурье для улучшения сходимости ее расчетов. Корректное решение уравнения производится методом отображений. Для разных взаимных ориентаций в системе эллиптических включений установлены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений отрыва в окрестности включений от волнового числа. Как частичный случай, исследовано динамическое взаимодействие в однопериодическом массиве эллиптических трещин.

**Ключевые слова:** *дисковые эллиптические в плане включения, динамические коэффициенты интенсивности напряжений, метод граничных интегральных уравнений, периодическая функция Грина, метод отображений.*

*I.Ya. Zhbadynskyi*

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics  
of the NAS of Ukraine, Lviv  
E-mail : zhbadynskyi.igor@gmail.com

INTERACTION OF ONE-PERIODIC COMPLIANT  
DISK ELLIPTIC-SHAPE INCLUSIONS UNDER THE ACTION  
OF AN INCIDENT ELASTIC TIME-HARMONIC WAVE

Normal incidence of the plane elastic time-harmonic longitudinal wave on an array of coplanar thin-walled compliant elliptical inclusions having a one-periodic distribution in the 3D infinite matrix is considered. The elastic properties of inclusions are described by linear dependences between the displacement jumps and stresses in the domains of their localization. The corresponding symmetric wave scattering problem is reduced to a boundary-value integral equation for the displacement jump across the inclusion surfaces in a unit cell by means of periodic Green's function, which is presented in the form of Fourier integrals to improve the convergence of its calculations. The equation is correctly solved by using the mapping method. The frequency dependences of the mode-I stress intensity factor in vicinities of the inclusion front points for different mutual orientations in the system of elliptic inclusions are revealed. The situation with a one-periodic array of elliptic cracks is considered as a particular case.

**Keywords:** *disk elliptic-in-plane inclusions, dynamic stress intensity factors, boundary integral equation method, periodic Green's function, mapping method.*