

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ПОЛЯ ТОРОИДАЛЬНОГО ТРАНСФОРМАТОРА С УЧЕТОМ ВИТОГО МАГНИТОПРОВОДА И ОСЕВОГО ВИТКА ОБМОТКИ

Боев В.М., д.т.н.

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"
Украина, 61002, г. Харьков, ул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПИ», каф. ТОЭ, тел. (0572)40-09-61

На основе использования разрывных функций и уравнения спирали Архимеда получено дифференциальное уравнение, описывающее поле всего пространства, включающего трансформатор с витым магнитопроводом, решение которого может быть реализовано применением упрощающих допущений или численными методами.

На основі використання розривних функцій і рівняння спирали Архімеда отримано диференціальне рівняння, що описує поле всього простору, який містить в собі трансформатор із витим магнітопроводом, рішення якого може бути реалізовано застосуванням спрощуючих допущень, або чисельними методами.

Тороидальный трансформатор имеет ряд преимуществ перед стержневыми трансформаторами, таких как меньший поток рассеивания, компактность, относительная бесшумность и надежность в работе, что обусловило их широкое применение в электротехнике, особенно в электротехнических изделиях специального назначения. Вопросам расчета магнитных полей и потерь в трансформаторах, в частности, тороидальных, посвящено большое количество работ, например [1-4]. Однако остаются не решенными или не окончательно решенными вопросы, такие как учет конечной ширины стальной ленты витого магнитопровода, несовпадение направления векторов поля и направления нормали к поперечному сечению ленты внутри витого магнитопровода.

При расчетах магнитного поля тороидального трансформатора исходят из того, что индукция магнитного поля имеет только одну тангенциальную составляющую B_φ и витой ленточный магнитопровод представляют в виде набора кольцевых изолированных лент или в развернутом виде как пакет изолированных между собой листов (лент) стали бесконечной длины. При этом не учитывается тот факт, что внутри витого ленточного магнитопровода силовые линии магнитного поля переходят из одного витка ленты в другой через немагнитный зазор между витками. В этом случае должна появиться радиальная составляющая вектора индукции магнитного поля.

Исходя из вышесказанного задача ставится следующим образом: предложить максимально приближенную к реальному объекту математическую модель тороидального трансформатора с витым магнитопроводом в трехмерной постановке задачи.

Использование разрывных функций [5] позволяет описать электрические и магнитные свойства

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 + \frac{\mu_c - \mu_0}{8} \left(\frac{|r - r_1 - a\varphi|}{r - r_1 - a\varphi} - \frac{|r - \rho_1 - a\varphi|}{r - \rho_1 - a\varphi} \right) \left(\frac{|\varphi|}{\varphi} - \frac{|\varphi - \varphi_0|}{\varphi - \varphi_0} \right) \left(\frac{|z + b|}{z + b} - \frac{|z - b|}{z - b} \right); \\ \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\mu_c} - \frac{1}{\mu_0} \right) \left(\frac{|r - r_1 - a\varphi|}{r - r_1 - a\varphi} - \frac{|r - \rho_1 - a\varphi|}{r - \rho_1 - a\varphi} \right) \left(\frac{|\varphi|}{\varphi} - \frac{|\varphi - \varphi_0|}{\varphi - \varphi_0} \right) \left(\frac{|z + b|}{z + b} - \frac{|z - b|}{z - b} \right); \\ \gamma_c &= \frac{\gamma_{\tilde{n}\tilde{o}}}{8} \left(\frac{|r - r_1 - a\varphi|}{r - r_1 - a\varphi} - \frac{|r - \rho_1 - a\varphi|}{r - \rho_1 - a\varphi} \right) \left(\frac{|\varphi|}{\varphi} - \frac{|\varphi - \varphi_0|}{\varphi - \varphi_0} \right) \left(\frac{|z + b|}{z + b} - \frac{|z - b|}{z - b} \right); \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\varphi_0 = (r_2 - r_1)/a$; $a = \Delta/2\pi$; r_1, r_2 — внутренний и наружный радиусы витого ленточного магнитопровода; $2b$ — ширина ленты; γ_{cm} — удельная электропроводность стальной ленты.

среды, содержащей тороидальный трансформатор с витым магнитопроводом, в трехмерной постановке задачи некоторыми функциями координат и подставлять эти функции в уравнения Максвелла.

Геометрия витого ленточного магнитопровода может быть описана уравнением спирали Архимеда (в цилиндрической системе координат)

$$r = a \cdot \varphi.$$

Уравнение, описывающее геометрию витого ленточного магнитопровода, будет зависеть от того, как идеализирована геометрия витой ленты (рис.1, 2) на внутреннем и наружном радиусах тороидального сердечника.

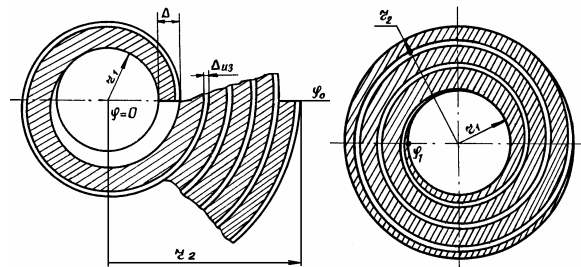


Рис.1 Витой магнитопровод трансформатора. Рис.2 Витой магнитопровод трансформатора

Уравнения, описывающие внутреннюю и внешнюю стороны витой ленты, имеют вид:

$$r = r_1 + a \cdot \varphi \quad \rho = \rho_1 + a \cdot \varphi,$$

где

$$\rho_1 = r_1 + \Delta_{cm} \quad \Delta_{cm} = \Delta - \Delta_{uz}$$

Δ_{cm}, Δ_{uz} — толщины стальной ленты и слоя изоляции.

Используя разрывные функции, запишем уравнения для магнитной проницаемости и удельной электропроводности среды, содержащей витой магнитопровод (рис.1)

Для магнитопровода рис. 2 уравнения магнитной проницаемости и удельной электропроводности запишем с помощью разрывных функций в виде

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_0 + \frac{\mu_c - \mu_0}{8} \left(\frac{|r - a\varphi|}{r - a\varphi} - \frac{|r - \Delta_{\tilde{n}\dot{\delta}} - a\varphi|}{r - \Delta_{\tilde{n}\dot{\delta}} - a\varphi} \right) \left(\frac{|r - r_1|}{r - r_1} - \frac{|r - r_2|}{r - r_2} \right) \left(\frac{|z + b|}{z + b} - \frac{|z - b|}{z - b} \right); \\ \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\mu_c} - \frac{1}{\mu_0} \right) \left(\frac{|r - a\varphi|}{r - a\varphi} - \frac{|r - \Delta_{\tilde{n}\dot{\delta}} - a\varphi|}{r - \Delta_{\tilde{n}\dot{\delta}} - a\varphi} \right) \left(\frac{|r - r_1|}{r - r_1} - \frac{|r - r_2|}{r - r_2} \right) \left(\frac{|z + b|}{z + b} - \frac{|z - b|}{z - b} \right); \\ \gamma_c &= \frac{\gamma_{\tilde{n}\dot{\delta}}}{8} \left(\frac{|r - a\varphi|}{r - a\varphi} - \frac{|r - \Delta_{\tilde{n}\dot{\delta}} - a\varphi|}{r - \Delta_{\tilde{n}\dot{\delta}} - a\varphi} \right) \left(\frac{|r - r_1|}{r - r_1} - \frac{|r - r_2|}{r - r_2} \right) \left(\frac{|z + b|}{z + b} - \frac{|z - b|}{z - b} \right).\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь отсчет угла φ от $r = a\varphi = 0$, но начинать следует от $\varphi_1 = (r_1 - \Delta_{\tilde{n}\dot{\delta}})/a$, что соответствует радиусу $r_1 = \Delta_{cm} + a\varphi_1$.

Системы уравнений (1) или (2) описывают магнитные и электрические свойства среды, содержащей витой ленточный магнитопровод. Таким же образом, используя разрывные функции запишем плотность тока в обмотке трансформатора (рис. 3), представленной в виде бесконечно тонкого токового слоя

$$\begin{aligned}j &= \frac{iW}{2\pi r} \left[\bar{r}_0 (\delta(z + z_0) - \delta(z - z_0)) \frac{1}{2} \left(\frac{|r - r'|}{r - r'} - \frac{|r - r''|}{r - r''} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{k} (\delta(r - r'') - \delta(r - r')) \frac{1}{2} \left(\frac{|z + z_0|}{z + z_0} - \frac{|z - z_0|}{z - z_0} \right) \right]\end{aligned}\quad (3)$$

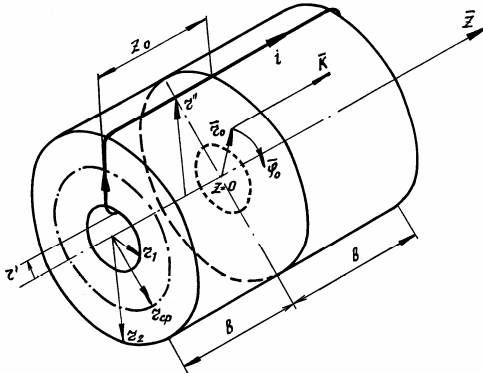


Рис. 3 Тороидальный трансформатор

Здесь $-z_0, z_0, r', r''$ — координаты расположения обмотки с током; $\delta(z - z_0), \delta(r - r')$ — δ -функции Дирака; $\frac{iW}{2\pi r}$ — линейная нагрузка (А/м).

Формула (3) также, как и (1), (2) описывает распределение соответствующей физической величины (плотности тока) во всем бесконечном пространстве. Тогда, подставляя эти равенства в уравнения Максвелла, получим описание распределения электриче-

$$\gamma = \gamma_c + \frac{\gamma_i}{2} \left[(\delta(z + z_0) + \delta(z - z_0)) \left(\frac{|r - r'|}{r - r'} - \frac{|r - r''|}{r - r''} \right) + (\delta(r - r'') + \delta(r - r')) \left(\frac{|z + z_0|}{z + z_0} - \frac{|z - z_0|}{z - z_0} \right) \right].\quad (12)$$

Если учесть, что при намотке обмотки тороидального трансформатора мы совершаем обход вдоль окружности тороида и образуем тем самым один виток с током, расположенный в плоскости $z = const$, то в формуле (3) для плотности тока должна быть добавлена еще составляющая тока, направленная по координа-

$$\bar{j} = \frac{iW}{2\pi r} \left[\bar{r}_0 (\delta(z + z_0) - \delta(z - z_0)) \frac{1}{2} \left(\frac{|r - r'|}{r - r'} - \frac{|r - r''|}{r - r''} \right) + \bar{k} (\delta(r - r'') - \delta(r - r')) \frac{1}{2} \left(\frac{|z + z_0|}{z + z_0} - \frac{|z - z_0|}{z - z_0} \right) \right] + \bar{\varphi}_0 \cdot i \cdot \delta(r - r'') \delta(z)\quad (13)$$

Подставим в уравнение (11) $1/\mu, \gamma, \bar{j}$ из (1), (12), (13) соответственно. При этом полагаем все завися-

щего \bar{E} и магнитного \bar{B} полей во всем бесконечном пространстве (внутри и вне магнитопровода).

Уравнения Максвелла для квазистационарного поля имеют вид

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{j} + \gamma \bar{E}\quad (4)$$

$$\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\quad (5)$$

$$\text{div } \bar{B} = 0\quad (6)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H}\quad (7)$$

Если использовать выражение индукции магнитного поля через векторный потенциал $\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$, то уравнения Максвелла примут вид

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \text{rot } \bar{A} \right) = j + \gamma \bar{E}\quad (8)$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}.\quad (9)$$

Из уравнений (4), (5) можно получить дифференциальное уравнение для напряженности магнитного поля \bar{H} . Из (4) найдем \bar{E} и подставим в (5)

$$\text{rot} \frac{\text{rot } \bar{H} - \bar{j}}{\gamma} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}.\quad (10)$$

Из уравнений (8), (9) можно получить дифференциальное уравнение для векторного потенциала

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \text{rot } \bar{A} \right) = j - \gamma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}.\quad (11)$$

В уравнениях (4) — (11) под величиной γ понимается удельная электропроводность всего пространства, включающего тороидальный трансформатор, а в уравнениях систем (1) и (2) величина γ_c — это удельная электропроводность пространства, включающего витой ленточный магнитопровод. Поэтому должна быть учтена еще электропроводность обмотки трансформатора (бесконечно тонкого токового слоя). Тогда для всего пространства, содержащего тороидальный трансформатор, удельную электропроводность запишем в виде

те φ . Место расположения такого витка определить трудно, оно зависит от технологии намотки. В первом приближении будем полагать, что этот виток с током имеет координаты $r = r'', z = 0$. Тогда уравнение для плотности тока запишется следующим образом

щие от времени величины изменяющимися по гармоническому закону и применим комплексный метод.

В цилиндрической системе координат $(\bar{r}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{k})$

$$\text{rot} \bar{A} = \bar{r}_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \bar{\varphi}_0 \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \bar{k} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right)$$

Тогда

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \text{rot} \bar{A} \right) = \text{rot} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\bar{r}_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \dot{A}_\varphi}{\partial z} \right) + \bar{\varphi}_0 \left(\frac{\partial \dot{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right) + \bar{k} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r \dot{A}_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial \dot{A}_r}{\partial \varphi} \right) \right] \right\} = \bar{j} - \gamma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} & \bar{r}_0 \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 (r \dot{A}_\varphi)}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\partial^2 \dot{A}_r}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial^2 \dot{A}_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial r \partial z} \right] + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial (r \dot{A}_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial \dot{A}_r}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\mu} \right) - \left(\frac{\partial \dot{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \right) \right\} + \\ & + \bar{\varphi}_0 \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial^2 \dot{A}_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\dot{A}_\varphi}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \dot{A}_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{A}_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \dot{A}_r}{\partial \varphi \partial r} \right] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \dot{A}_\varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \right) - \left(\frac{\dot{A}_\varphi}{r} + \frac{\partial \dot{A}_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_r}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu} \right) \right\} + \\ & + \bar{z}_0 \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \dot{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \dot{A}_r}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \dot{A}_r}{\partial z \partial \varphi} \right] + \left(\frac{\partial \dot{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu} \right) - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_\varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\mu} \right) \right\} = \\ & = \frac{iW}{4\pi r} \left[\bar{r}_0 (\delta(z+z_0) - \delta(z-z_0)) \left(\frac{|r-r'|}{r-r'} - \frac{|r-r''|}{r-r''} \right) + \bar{k} (\delta(r-r'') - \delta(r-r')) \left(\frac{|z+z_0|}{z+z_0} - \frac{|z-z_0|}{z-z_0} \right) \right] + \\ & + \bar{\varphi}_0 i \delta(z) \delta(r-r'') - j \omega \left\{ \frac{\gamma \bar{n} \delta}{8} \left(\frac{|r-r_1 - a\varphi|}{r-r_1 - a\varphi} - \frac{|r-\rho_1 - a\varphi|}{r-\rho_1 - a\varphi} \right) \left(\frac{|\varphi|}{\varphi} - \frac{|\varphi - \varphi_0|}{\varphi - \varphi_0} \right) \left(\frac{|z+b|}{z+b} - \frac{|z-b|}{z-b} \right) \right\} + \\ & + \frac{\gamma m}{2} \left[(\delta(z+z_0) + \delta(z-z_0)) \left(\frac{|r-r'|}{r-r'} - \frac{|r-r''|}{r-r''} \right) + (\delta(r-r') + \delta(r-r'')) \left(\frac{|z+z_0|}{z+z_0} - \frac{|z-z_0|}{z-z_0} \right) \right] (\bar{r}_0 \dot{A}_r + \bar{\varphi}_0 \dot{A}_\varphi + \bar{k} \dot{A}_z). \end{aligned}$$

Здесь $1/\mu$ — из (1) или (2).

Приравнявая множители при одинаковых единичных векторах $\bar{r}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{k}$, получим три уравнения, которые необходимо решить относительно проекций векторного потенциала $\dot{A}_r, \dot{A}_\varphi, \dot{A}_z$. Учитывая взаимозависимость координат, имеющую место в полученных таким образом уравнениях, разрешить эту систему уравнений аналитическими методами не представляется возможным. Задача может быть решена, если использовать применяемое в таких случаях приближение — рассматривать тороидальный трансформатор в развернутом виде, то есть представить его в виде бесконечно длинного пакета изолированных между собой стальных лент, на котором равномерно намотана обмотка с током, или численными методами.

Решение задачи для пакета изолированных стальных лент с обмоткой [6-8] позволяет учесть влияние конечной ширины стальной ленты, но эффекты, связанные со спиральной намоткой стальной ленты (изменение индукции магнитного поля в зависимости от радиуса, наличие осевого витка обмотки и немагнитных зазоров (прослоек изоляции) между витками стальной ленты на пути тангенциального магнитного потока) в этом случае отсутствуют.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Васютинский В.С. Вопросы теории и расчета трансформаторов. — Л.: Энергия, 1970.
- [2] Лейтес Л.В. Электромагнитные расчеты трансформаторов и реакторов. — М.: Энергия, 1981.
- [3] Тихомиров П.М. Расчет трансформаторов. — М.: Энергоатомиздат, 1986.
- [4] Туровский Я. Техническая электродинамика. — М.: Энергия, 1974.
- [5] Боев В.М. Обоснование корректности граничных условий при использовании разрывных функций в задачах электромагнетизма. // Электротехника и электромеханика. — 2002, №3.
- [6] Боев В.М., Глибикий М.М., Ушакова И.В. Распределение магнитного поля в тороидальном ленточном магнитопроводе трансформатора. // Изв. ВУЗов. Электромеханика. — 1988, №7.
- [7] Боев В.М., Глибикий М.М., Ушакова И.В. Об учете конечной ширины ленты магнитопровода в расчетах поля тороидального трансформатора. // Изв. ВУЗов. Электромеханика. — 1988, №8.
- [8] Боев В.М., Глибикий М.М., Ушакова И.В. Вихревые потери в тороидальных ленточных магнитопроводах трансформаторов повышенной частоты. // Электричество. — 1991, №7.

Поступила 11.05.03