doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.08.012
УДК 517.988

О.Ф. Кашпур [1], В.В. Хлобистов [2]

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
[2] Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: olena.kashpur@gmail.com

Інтерполяційний поліном Лагранжа в лінійному просторі зі скалярним добутком

Представлено академіком НАН України В.Л. Макаровим

У лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком і в скінченновимірному евклідовому просторі досліджено точність формули Лагранжа на поліномах відповідного степеня.

Ключові слова: *лінійний простір, евклідовий простір, формула Лагранжа, точність на поліномах.*

В [1] наведені інтерполяційні операторні поліноми в гільбертовому просторі. Один із цих інтерполянтів розглянуто в статті. Показано, що він являє собою інтерполяційну формулу Лагранжа з фундаментальними функціональними поліномами в лінійному просторі зі скалярним добутком. Цю інтерполяційну формулу Лагранжа досліджено для випадку скінченновимірного евклідового простору, визначено умови “збереження” полінома відповідного степеня.

Інтерполяційний операторний поліном в [1] n-го степеня для оператора f має вигляд

$$P_n(x) = \left\langle \bar{f}, \Gamma_m^{-1} \sum_{p=0}^{n} (x_i, x)^p \Big|_{i=1}^{m} \right\rangle, \tag{1}$$

де x_i — вузли інтерполяції; $P_n(x_i) = f(x_i) = f_i$, $\quad i = \overline{1, m}$; $\bar{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$; $x_i, x \in H$, H — гільбертовий простір; $f : H \to Y$, Y — лінійний простір, $f_i \in Y$; $\Gamma_m = \left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i, x_j)^p \right\|$, а x_i обираємо такими, щоб матриця Γ_m була невиродженою, $\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{i=1}^{m} f_i \alpha_i$, $\alpha_i \in R_1$.

Далі формулу (1) перепишемо в іншому вигляді та зведемо її до формули Лагранжа в лінійному просторі зі скалярним добутком.

Нехай X, Y — лінійні простори, X — зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, $f: X \to Y$, $P_n(x)$ — інтерполяційний операторний поліном степеня n для f з вузлами $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $P_n(x_i) = f(x_i) = f_i$, $x, x_i \in X$, $i = \overline{1, m}$, а вузли x_i обрані таким чином, щоб матриця $\left\| P_{ni}(x_j) \right\|$ була невиродженою, де

$$P_{ni}(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{ki} x^k, \quad L_{ki} x^k = (x_i, x)^k, \; L_{0i} = 1, \; P_{ni}: X \to R_1, \quad i = \overline{1, m}.$$

Невиродженість матриці для скінченновимірного евклідового простору розглянуто в [2] за рахунок вибору незалежних векторів, пов'язаних з вузлами. Введемо позначення: $\overline{P_n}(x) = (P_{n1}(x), P_{n2}(x), \ldots, P_{nm}(x))$, а $P_{ni}^{-1}(x_j)$ — елементи матриці $\left\| P_{ni}(x_j) \right\|^{-1}$. Відповідно до [1] маємо

$$P_n(x) = \left\langle \overline{f}, \left\| P_{ni}(x_j) \right\|^{-1} \overline{P_n}(x) \right\rangle = \left\langle \overline{f}, \left\| P_{ni}^{-1}(x_j) \right\| \overline{P_n}(x) \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f_i \sum_{j=1}^{m} P_{ni}^{-1}(x_j) P_{nj}(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i l_i(x), \tag{2}$$

де

$$l_i(x) = \sum_{j=1}^{m} P_{ni}^{-1}(x_j) P_{nj}(x),$$

$$l_i(x_k) = \sum_{j=1}^{m} P_{ni}^{-1}(x_j) P_{nj}(x_k) = \delta_{ik}, \tag{3}$$

δ_{ik} — символ Кронекера.

Враховуючи (2), (3), отримуємо

$$P_n(x_k) = \sum_{i=1}^{m} f_i l_i(x_k) = f_k = f(x_k), \quad k = \overline{1, m}.$$

Таким чином, формула (2) являє собою формулу Лагранжа для інтерполяційного полінома в лінійному просторі зі скалярним добутком:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i l_i(x), \quad l_i(x_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, m}, \tag{4}$$

де $l_i(x)$ — фундаментальні функціональні поліноми Лагранжа степеня n, $l_i: X \to R_1$.

Зауважимо, що інтерполянт (4) з вузлами $x_i, i = \overline{1, m}$, не єдиний в X. Дійсно, якщо $p_n: X \to Y$ — довільний операторний поліном n-го степеня [6], то формула

$$P_n(x) = p_n(x) + \sum_{i=1}^{m} (f_i - p_n(x_i)) l_i(x) \tag{5}$$

визначає множину інтерполяційних операторних поліномів n-го степеня для оператора f,

$$P_n(x_k) = p_n(x_k) + \sum_{i=1}^{m}(f_i - p_n(x_i))l_i(x_k) =$$

$$= p_n(x_k) + \sum_{i=1}^{m}(f_i - p_n(x_i))\delta_{ik} = f_k = f(x_k), \quad k = \overline{1, m}.$$

В [1] доведено, що інтерполянт вигляду (4), який належить множині (5), має мінімальну норму, породжену скалярним добутком за гаусовою мірою [3].

Відзначимо, що вираз

$$p_n(x) - \sum_{i=1}^{m} p_n(x_i) l_i(x)$$

не перетворюється в нуль-елемент нескінченновимірного лінійного простору Y [6], тобто формула Лагранжа не "зберігає" операторний поліном відповідного степеня, а числа m та n при побудові полінома (2) не пов'язані між собою.

Розглянемо частинний випадок, коли X є скінченновимірним евклідовим простором на прикладі простору E_2, $f: E_2 \to R_1$, $u \in E_2$, $u = (x, y)$, $u_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, m}$, де u_i обираємо таким чином, щоб матриця $\left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i x_j + y_i y_j)^p \right\|$ мала обернену [2]. З (2) одержимо

$$P_n(x, y) = \left(\bar{f}, \left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i x_j + y_i y_j)^p \right\|^{-1} \sum_{p=0}^{n} (x x_i + y y_i)^p \Big|_{i=1}^{m} \right) = \sum_{i=1}^{m} f_i l_i(x, y). \tag{6}$$

Тоді

$$l_i(x, y)\Big|_{i=1}^{m} = \left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i x_j + y_i y_j)^p \right\|^{-1} \sum_{p=0}^{n} (x x_i + y y_i)^p \Big|_{i=1}^{m},$$

$$l_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}, \; i, k = \overline{1, m}.$$

Враховуючи (6), маємо

$$P_n(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^{m} f_i l_i(x_k, y_k) = f_k = f(x_k, y_k), \quad k = \overline{1, m},$$

і формула (6) є інтерполяційною формулою Лагранжа для $f: E_2 \to R_1$, де $l_i(x, y)$ — фундаментальні поліноми Лагранжа двох змінних степеня n. Також на підставі [1] $P_n(x, y)$ є інтерполянтом мінімальної норми [3] на множині інтерполянтів n-го степеня двох змінних.

Надалі будемо вважати, що число m задано (фіксовано), а степінь n інтерполяційного полінома обираємо з нерівності $m \leqslant \min p = \bar{p}$, де p — розмірність простору поліномів степеня n в E_2, $p = (n+1)(n+2)/2$ [4].

Приклад 1. Нехай $m=2$, $u_i=(x_i, y_i)$, $i=1,2$, $u_1=(0,1)$, $u_2=(1,0)$. Тоді

$$m=2\leqslant \min(n+1)(n+2)/2=\overline{p}=3\text{ , }n=1,$$

$$\left\|\sum_{p=0}^{1}(u_i,u_j)^p\right\|^{-1}=\frac{1}{3}\left\|\begin{matrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\sum_{p=0}^{1}(u_i,u_j)^p\right\|^{-1}\sum_{p=0}^{1}(u_i,u)^p\Big|_{i=1}^{2}=\frac{1}{3}\left\|\begin{matrix}1-x+2y\\ 1+2x-y\end{matrix}\right\|,$$

$$l_1(x,y)=\frac{1}{3}(1-x+2y),\quad l_2(x,y)=\frac{1}{3}(1+2x-y),$$

$$l_i(u_j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,\quad P_1(x,y)=\sum_{i=1}^{2}f_i l_i(x,y).$$

Нехай $f(x,y)=1+2x+3y$. Тоді $f_1=f(0,1)=4$, $f_2=f(1,0)=3$,

$$P_1(x,y)=4\cdot\frac{1}{3}(1-x+2y)+3\cdot\frac{1}{3}(1+2x-y)=\frac{1}{3}(7+2x+5y)\neq 1+2x+3y,$$

тобто у випадку $m=2$, $\overline{p}=3$, $n=1$ інтерполянт $P_1(x,y)$ не “зберігає” поліном 1-го степеня.

Приклад 2. Нехай $m=3$, $u_i=(x_i, y_i)$, $i=1, 2, 3$, $u_1=(0, 1)$, $u_2=(1, 0)$, $u_3=(0, -1)$. Тоді

$$m=3\leqslant \min(n+1)(n+2)/2=\overline{p}=3,\quad n=1.$$

Маємо

$$\left\|\sum_{p=0}^{1}(u_i,u_j)^p\right\|^{-1}=\frac{1}{4}\left\|\begin{matrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\sum_{p=0}^{1}(u_i,u_j)^p\right\|^{-1}\sum_{p=0}^{1}(u_i,u)^p\Big|_{i=1}^{3}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1-x+y\\ 2x\\ 1-x-y\end{matrix}\right\|,$$

$$P_3(u)=\sum_{i=1}^{3}f_i l_i(u),$$

$$l_1(x,y)=\frac{1}{2}(1-x+y),\quad l_2(x,y)=x,\quad l_3(x,y)=\frac{1}{2}(1-x-y),$$

$$l_i(u_j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,3.$$

Нехай $f(u)=1+2x+3y$, тоді $f_1=f(0,1)=4$, $f_2=f(1,0)=3$, $f_3=f(0,-1)=-2$. Одержимо

$$P_1(x,y)=4\cdot\frac{1}{2}(1-x+y)+3x-2\cdot\frac{1}{2}(1-x-y)=1+2x+3y,$$

тобто у випадку $m = 3$, $\overline{p} = 3$, $n = 1$ інтерполянт Лагранжа (6) "зберігає" поліном 1-го степеня двох змінних.

Таким чином, для скінченновимірного евклідового простору E_2 приходимо до такого висновку: у випадку $m < \overline{p}$ маємо єдиний інтерполянт Лагранжа мінімальної норми, при цьому він не "зберігає" поліном відповідного степеня (приклад 1). Цей інтерполянт в [2] названо недовизначеним. Якщо $m = \overline{p}$, то інтерполяційний поліном Лагранжа єдиний та "зберігає" поліном відповідного степеня [5] (приклад 2).

Аналогічні міркування та перетворення можна провести для евклідового простору E_k, $u \in E_k$, $u = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, де кількість вузлів m задано (фіксовано), а степінь інтерполянта n визначаємо з умови

$$m \leqslant \min p = \overline{p}, \quad p = (n+k)!/n!k!, \quad k \geqslant 2, \tag{7}$$

де p — розмірність простору поліномів n-го степеня в E_k [5]. Самі вузли $u_1, u_2, \ldots, u_m$ обираємо таким чином, щоб існувала обернена матриця в (2), а степінь інтерполяційного полінома визначаємо з нерівності (7).

Сформулюємо такий висновок для простору E_k. Має місце

Теорема 1. Нехай $f : E_k \to R_1$, $k \geqslant 2$, m задано. Тоді якщо $m = \overline{p}$, то інтерполянт Лагранжа $P_n(u)$ буде точним на всіх поліномах степеня не вище n, а якщо $m < \overline{p}$, то інтерполянт мінімальної норми $P_n(u)$ не має такої властивості.

Зауваження. В разі зменшення розмірності евклідового простору зменшується "недовизначеність" інтерполянта Лагранжа мінімальної норми, а у випадку $f : R_1 \to R_1$ маємо $m = \overline{p} = n+1$, тобто одержуємо класичний поліном Лагранжа n-го степеня з $n + 1$ вузлами для функції однієї змінної.

Стосовно лінійного простору X зі скалярним добутком має місце таке твердження. Якщо вузли інтерполяції обрані так, що відповідна матриця невироджена, то завжди існує єдиний інтерполяційний поліном Лагранжа мінімальної норми [3], але цей інтерполянт не "зберігає" операторний поліном відповідного степеня. При цьому відзначимо, що при побудові інтерполяційного операторного полінома Лагранжа числа m (кількість вузлів) та n (степінь інтерполянта) не пов'язані між собою [1].

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Янович Л.А. Интерполирование операторов. Киев: Наук. думка, 2000. 407с.
2. Кашпур О.Ф., Хлобистов В.В. До деяких питань поліноміальної інтерполяції в евклідових просторах. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2016. № 10. С. 10—14. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.10.010
3. Егоров А.Д., Соболевский П.И., Янович Л.А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Минск: Наука и техника, 1985. 310 с.
4. Березин И.С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Москва: Физматгиз. 1962. Т. 1. 632 с.
5. Бабенко К.И. Основы численного анализа. Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. 848 с.
6. Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва: Наука, 1980. 495 с.

Надійшло до редакції 17.05.2018

REFERENCES

1. Makarov, V. L., Khlobystov, V. V.& Yanovich, L. A. (2000). Interpolation of operators. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
2. Kashpur, O. F. & Khlobystov, V. V. (2016). To some questions of a polynomial interpolation in Euclidean spaces. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 10, pp. 10-14 (in Ukrainian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.10.010
3. Yegorov, A. D., Sobolevsky, P. I. & Yanovich, L. A. (1985). Approximate methods for computation of continual integrals. Minsk: Nauka i Tehnika (in Russian).
4. Berezin, I. S. & Zhidkov, N. P. (1962). Methods of computations. Vol. 1. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
5. Babenko, K. I. (2002). Foundations of numerical analysis. Moscow, Izhevsk: RC “Regular and chaotic dynamics” (in Russian).
6. Trenogin, V. A. (1980). Functional analysis. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 17.05.2018

Е.Ф. Кашпур[1], *В.В. Хлобыстов*[2]

[1] Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
[2] Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: olena.kashpur@gmail.com

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ ЛАГРАНЖА
В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

В линейном бесконечномерном пространстве со скалярным произведением и в конечномерном евклидовом пространстве исследована точность формулы Лагранжа на полиномах соответствующей степени.

Ключевые слова: *линейное пространство, евклидово пространство, формула Лагранжа, точность на полиномах.*

O.F. Kashpur[1], *V.V. Khlobystov*[2]

[1] Taras Shevchenko National University of Kiev
[2] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: olena.kashpur@gmail.com

LAGRANGE INTERPOLATION POLYNOMIAL
IN A LINEAR SPACE WITH INNER PRODUCT

In a linear infinite-dimensional space with inner product and in a finite-dimensional Euclidean space, the accuracy of the Lagrange formula on polynomials of the corresponding degree is investigated.

Keywords: *linear space, Euclidean space, Lagrange formula, accuracy on polynomials.*