УДК 621.313.322

В.В. Кузьмин, В.С. Шпатенко

К ВЫВОДУ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ПОТОКОМ И ВЕКТОРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В статті наведено математично коректний та фізично змістовний доказ фундаментальної залежності між потоком та векторним потенціалом магнітного поля.

В статье приведено математически корректное и физически содержательное доказательство фундаментальной зависимости между потоком и векторным потенциалом магнитного поля.

ВВЕДЕНИЕ

В [1] нами показана несостоятельность применения формулы Стокса для доказательства закона полного тока (ЗПТ) вследствие нарушения условий, при соблюдении которых допускается ее применение.

В связи с тем, что научно-техническая общественность с укоренившихся чисто эмпирических позиций скептически относится к необходимости соблюдения упомянутых условий, воспринимая их как некоторого рода "перегибы" чисто математического характера, считаем необходимым вернуться к разъяснению существа проблемы.

Согласно [2] формула Стокса

$$\int\limits_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{S} = \oint\limits_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \qquad (1)$$

справедлива, если:

- векторная функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ однозначна и имеет непрерывные частные производные всюду в конечной поверхностно-односвязной области V; (2.1)
- лежащая в области V поверхность S односвязна, регулярна и ограничена регулярной замкнутой кривой C. (2.2)

Наглядной иллюстрацией ошибочного применения формулы Стокса при несоблюдении условий (2) может служить пример ее приложения к случаю вращения полого цилиндрического тела (рис. 1), когда

$$F(r) = \omega r \boldsymbol{e}_\varphi, \ \mathrm{rot}F = 2\omega \boldsymbol{e}_z,$$

но формула (1) дает ошибочные результаты как по контуру C_1 вследствие несоблюдения условия (2.1), так и по контуру C_2, т.к. не соблюдается условие (2.2).

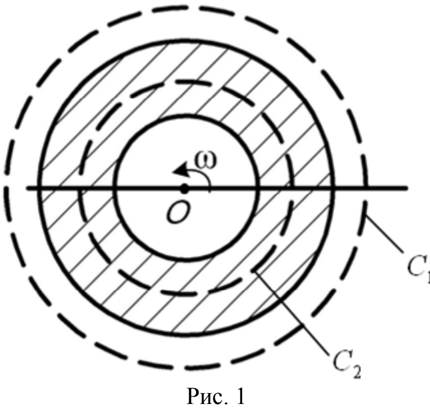

Рис. 1

В [1] показано, что ЗПТ в форме

$$\oint \boldsymbol{B}d\boldsymbol{l} = \mu_0 I, \qquad (2)$$

сходной с (1) справедлив не вопреки нарушениям ограничений (2), а потому, что он является следствием объективных закономерностей изменения поля вектора $\boldsymbol{B}$ как внутри, так и вне проводников с током любого поперечного сечения при условии, что

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{j} = 0. \qquad (3)$$

1. К выводу формулы связи параметров магнитного поля. Вот классический вариант решения рассматриваемой задачи [3]:

"Пользуясь векторным потенциалом часто оказывается удобным выражать магнитный поток

$$\Phi = \oint \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S}. \qquad (4)$$

Действительно, представляя индукцию как вихрь векторного потенциала A и применяя теорему Стокса, находим:

$$\Phi = \int \mathrm{rot}\boldsymbol{A}d\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{A}d\boldsymbol{l}, \qquad (5)$$

т.е. что магнитный поток, сцепленный с контуром интегрирования, равен линейному интегралу от векторного потенциала вдоль этого контура".

Здесь, как и в случае доказательства ЗПТ [1] формула Стокса (1) с соблюдением условий (2) применима только для внутренней области бесконечно длинного соленоида, не имеющей ферромагнитного сердечника. Во всех остальных случаях, используемых в промышленной электротехнике, внутри соленоида находится пакетированный ферромагнетик (многосвязность области), а контур интегрирования A находится снаружи соленоида, в токоведущих слоях которого происходит разрыв первой производной $\partial A/\partial r$.

Таким образом, для доказательства весьма важного соотношения (5), которое мы в дальнейшем будем называть законом магнитного потока (ЗМП), используем тот же подход, что и применен в [1] для доказательства аналогичного по форме ЗПТ, а именно

- установление физической сущности, связывающей параметры в ЗМП для элементарного контура;
- обобщение его для произвольной конфигурации поля на основе принципа суперпозиции и потенциальности внешнего поля векторного потенциала A, где соблюдается его соленоидальность, т.е.

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0, \ \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = 0. \qquad (6)$$

Здесь по аналогии с "нитью тока" в ЗПТ рассмотрим элементарную трубку магнитного потока в виде длинного соленоида, для которого согласно [4]

$$d\Phi = \oint\limits_L d\boldsymbol{A}d\boldsymbol{L}, \qquad (7)$$

где – L контур интегрирования, в частности – для поля вне соленоида.

С учетом потенциальности этого "внешнего" поля dA последнее соотношение оказывается справедливым для замкнутой трубки поля любой формы (кривой L) и даже с переменным поперечным сечением dS при условии

$$d\Phi = B(L)dS(L) = \text{const} . \qquad (8)$$

На основе принципа суперпозиции, суммируя вклады трубок потока $d\Phi$ по поперечному сечению соленоида (или одновиткового контура тока) при неизменном контуре обхода l получаем

$$\sum_S d\Phi = \oint_l \left(\sum d\boldsymbol{A}\right) d\boldsymbol{l} , \qquad (9)$$

что эквивалентно искомому закону

$$\Phi = \oint_l \boldsymbol{A} d\boldsymbol{l} , \qquad (10)$$

для контура l, расположенного в соленоидальном поле A. По аналогии с ЗПТ, можно было бы рассмотреть в какой мере соотношение (10) закономерно для вихревой области поля A, но решения этой задачи не представляет интереса для прикладной электротехники.

2. Пример практического приложения.

На основе соотношения (7) для трубки потока $d\Phi$ и полученного в [1] соотношения

$$\oint H dl = j ds , \qquad (11)$$

для внешнего поля трубки тока можно найти ответ на вопрос – почему эквивалентны полевая и локальная формулы для энергии магнитного поля, запасенной в контуре тока [5]

$$W_{\text{м}} = \int_V \frac{HB}{2} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} dV , \qquad (12)$$

где согласно [5] физический смысл имеет только вторая часть последнего соотношения.

Рассмотрим контур тока

$$I = j ds , \qquad (13)$$

длиной l, внутри которого проходит поток Ф (рис. 2).

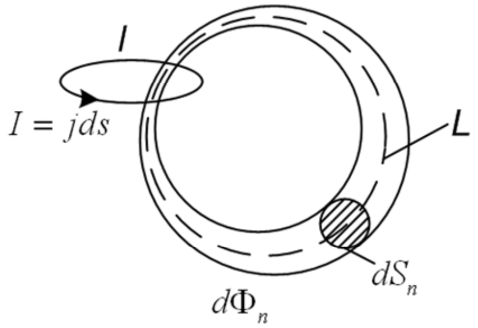

Рис. 2

Представляя его в виде суммы трубок потока

$$\Phi = \sum_n d\Phi_n \; ; \; d\Phi = B(L)dS(L) = \text{const} , \qquad (14)$$

для каждой трубки потока согласно (7) находим, что

$$d\Phi_n = B_n(L) dS_n(L) = \oint dA_n dl .$$

С другой стороны, согласно (11)

$$\oint H(L)_n dL = j ds ,$$

откуда следует, что для любой трубки потока

$$\oint_L B(L)_n H(L)_n dS(L)_n dL(L)_n = \oint_{V_n} B_n H_n dV_n =$$

$$= \oint_l dA_n dl \cdot j ds = \int_{\upsilon} d\boldsymbol{A}_n \cdot \boldsymbol{j} d\upsilon_n ,$$

где V_n – объем трубки потока, υ_n – объем трубки тока.

Суммируя последние выражения по всем трубкам, находим, что

$$\int_V BH dV = \int_{\upsilon} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} d\upsilon ,$$

что и требовалось доказать.

ВЫВОДЫ

1. При доказательстве закона магнитного потока формула Стокса справедлива только внутри длинного соленоида без сердечника.

2. Во всех практически важных приложениях справедливость этого закона для соленоидального характера поля векторного потенциала A основывается на объективных физических свойствах этого поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмин В.В., Шпатенко В.С. О легитимности использования формулы Стокса для доказательства теоремы Ампера (закон полного тока) // Електротехніка і електромеханіка. – 2010. – № 4.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 831 с.
3. Нетушил А.В., Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Теория электромагнитного поля. – М. – Л. ГЭИ, 1956.
4. Кузьмин В.В., Шпатенко В.С. К проблеме "нелокального" действия магнитного поля на обмотки элекрических машин // Электроинформ. – 2005. – № 4.
5. Кузьмин В.В., Шпатенко В.С. К разрешению парадоксов, порожденных ошибочной концепцией о локализации потенциальной энергии в электромагнитном поле // Вісник Крем. ДПУ. – 2010. – вип. 4, ч. 3.

Поступила 23.09.2010

Кузьмин В.В., д.т.н., проф.,
Шпатенко В.С.
АО МЭА ЭЛТА
61091, Харьков, Стадионный проезд, 14/3
тел. (057) 392-00-45; тел./факс: (057)713-41-02

V.V. Kuzmin, V.S. Shpatenko
On derivation of relation between flux and vector potential of magnetic field.
In the article, the authors present a mathematically correct and physically meaningful proof of a fundamental relation between flux and vector potential of magnetic field.
Key words – **magnetic field, flux, vector potential, relation.**