

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ

Класичний метод мультиполів для довільної двоперіодичної системи суцільних циліндрів узагальнений для порожнистих циліндрів. Задача зведена до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно моментів мультиполів. Отримані розрахункові вирази для вирішення системи рівнянь методом редукції. Наведені приклади чисельної реалізації польової задачі і запропонованого аналітичного методу.

Классический метод мультиполей для произвольной двоякопериодической системы сплошных цилиндров обобщен для полых цилиндров. Задача сведена к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно моментов мультиполей. Получены расчетные выражения для решения системы уравнений методом редукции. Приведены примеры численной реализации полевой задачи и предложенного аналитического метода.

ВВЕДЕНИЕ

Расчет потенциального поля в прямоугольной двоякопериодической системе круговых цилиндров с применением метода мультиполей рассмотрен в классической работе Дж. Рэлея [1]. В [2-4] эти результаты обобщены на случай произвольной решетки периодов. В данной статье сделана попытка дальнейшего развития упомянутых результатов, а именно, на примере задачи магнитостатики рассмотрен расчет поля в двоякопериодической системе полых круговых цилиндров, расположенных в однородном магнитном поле с напряженностью H_0 .

Рассмотрим произвольную периодическую решетку, в узлах которой расположены центры цилиндров с внутренними и внешними радиусами a и b соответственно (рис. 1). Магнитные проницаемости сред обозначим через μ_1, μ_2 и μ_3 . Обозначим основные периоды параллелограмма Ω через ω_1 и ω_2 , при этом выберем их так, чтобы выполнялось условие: $\tau = \omega_2 / \omega_1$, $\text{Im}\tau > 0$. Для произвольного периода будем использовать выражение $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$; $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

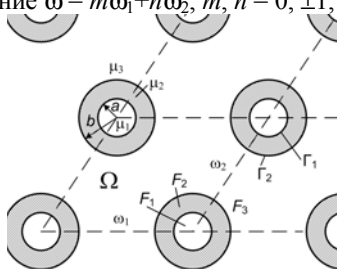


Рис.1. Двоякопериодическая система полых цилиндров

ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Введем комплексные потенциалы для областей F_1, F_2 и F_3 :

$$W_1 = \sum_k C_k z^k, \quad z \in F_1, \quad (1)$$

$$W_2 = \sum_k (A_k z^k + B_k z^{-k}), \quad z \in F_2, \quad (2)$$

$$W_3 = \sum_k (D_k z^k + E_k z^{-k}), \quad z \in F_3, \quad (3)$$

где $z = x + jy = |z| e^{j\varphi}$ – комплексная переменная, $k = 1, 3, 5, \dots$ в силу нечетности потенциалов относительно комплексной координаты z . Заметим, что потенциалы (1)-(3) не являются двоякопериодическими функциями и справедливы только в окрестности центрального цилиндра [2].

Пусть Γ – граница двух областей с индексами i и e , на которой выполняются стандартные условия сопряжения

$$B_{ni} = B_{ne}, \quad H_{\tau i} = H_{\tau e}. \quad (4)$$

Здесь индексы n и τ соответствуют нормальному и тангенциальному направлениям в произвольной точке границы Γ , а индексы i и e относятся к предельным значениям функций на границе Γ . Условимся при этом, что обход Γ осуществляется так, что "внешняя" область e остается справа (положительный обход Γ – против часовой стрелки).

Преобразуем граничное условие (4) в более удобную форму. Пусть $z(s) = x(s) + jy(s)$ – параметрическое уравнение контура Γ , где $z(s)$ – аффикс точки кривой Γ , соответствующий длине дуги s . Обозначим $z' = dz / ds = e^{j\gamma}$, где γ – угол, определяющий касательное к Γ направление dz (рис. 2). Тогда $d\bar{z} = \bar{z}' ds$ и, поскольку $|z'| = 1$, то

$$\frac{dz}{d\bar{z}} = z'(s)^2 = -e^{2j\gamma} \quad (5)$$

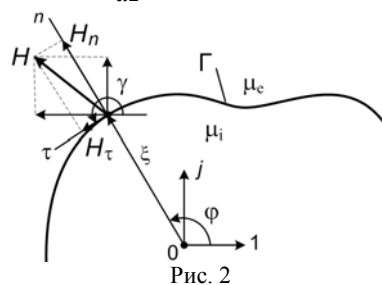


Рис. 2

В последнем соотношении и во всем тексте черта над комплексным числом означает операцию сопряжения. Граничное условие (4) представим в эквивалентной форме

$$(\mu_i + \mu_e)(H_{ni} + jH_{\tau i}) + (\mu_i - \mu_e)(H_{ni} - jH_{\tau i}) = 2\mu_e(H_{ne} + jH_{\tau e}) \quad (6)$$

Из рис. 2 видно, что $(H_n + jH_\tau) = j\bar{z}'H$, тогда $(H_n - jH_\tau) = -jz'\bar{H}$ и с учетом соотношения (5) выражение (6) принимает вид

$$(\mu_i + \mu_e)H_i(\xi) - (\mu_i - \mu_e)\bar{H}_i(\xi)z'(\xi)^2 = 2\mu_e H_e(\xi), \quad \xi \in \Gamma. \quad (7)$$

На границах Γ_1 и Γ_2 окружностей радиусов a и b соответственно $\xi_a = a e^{j\varphi}$, $\xi_b = b e^{j\varphi}$, $z'(\xi)^2 = -e^{2j\varphi}$, поэтому

$$\frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} H_2(\xi) = H_1(\xi) + \lambda_1 \bar{H}_1 e^{j2\varphi}, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad (8)$$

$$\frac{2\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} H_3(\xi) = H_2(\xi) + \lambda_2 \bar{H}_2 e^{j2\varphi}, \quad \xi \in \Gamma_2, \quad (9)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 + \mu_3}. \quad (10)$$

Поскольку $\bar{H} = -W'$, то используя выражения для потенциалов (1)-(3) и учитывая условия (8), (9) на границах Γ_1 и Γ_2 , нетрудно получить выражения

$$\frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} (A_k - B_k z^{-2k}) = C_k + \lambda_1 \bar{C}_k e^{-j2k\varphi}, \quad z \in \Gamma_1, \quad (11)$$

$$\frac{2\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} (D_k - E_k z^{-2k}) = (A_k - B_k z^{-2k}) + \lambda_2 \left(\bar{A}_k \frac{\bar{z}^{-k-1}}{z^{k-1}} - \bar{B}_k \frac{\bar{z}^{-k-1}}{z^{k-1}} \right) e^{-j2\varphi}, \quad z \in \Gamma_2. \quad (12)$$

Рассматривая эти выражения для произвольных $z = ae^{j\varphi}$ и $z = be^{j\varphi}$, получим связь между коэффициентами комплексных потенциалов (1)-(3):

$$C_k = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} A_k; \quad (13)$$

$$B_k = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} a^{2k} \bar{C}_k = -\lambda_1 a^{2k} \bar{A}_k, \quad (14)$$

$$D_k = \frac{(\mu_2 + \mu_3)[1 + \lambda_1 \lambda_2 (a/b)^{2k}]}{2\mu_3} A_k = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)[1 + \lambda_1 \lambda_2 (a/b)^{2k}]}{4\mu_2 \mu_3} C_k, \quad (15)$$

$$E_k = -\frac{(\mu_2 + \mu_3)[\lambda_1 a^{2k} + \lambda_2 b^{2k}]}{2\mu_3} \bar{A}_k = \frac{\lambda_1^{-1} a^{-2k} (\mu_2 + \mu_3)(\lambda_1 a^{2k} + \lambda_2 b^{2k})}{2\mu_3} \bar{B}_k, \quad (16)$$

$$D_k = -\frac{1 + \lambda_1 \lambda_2 (a/b)^{2k}}{\lambda_1 a^{2k} + \lambda_2 b^{2k}} \bar{E}_k = \beta_k \bar{E}_k, \quad (17)$$

$$\beta_k = -\frac{1 + \lambda_1 \lambda_2 (a/b)^{2k}}{\lambda_1 a^{2k} + \lambda_2 b^{2k}}.$$

Нетрудно видеть, что при $a = 0$ приведенные соотношения дают решение классической задачи о круговых цилиндрах.

Пусть $z \in F_3$. Результирующее поле образовано внешними источниками напряженностью H_0 и созданными ими мультиполями, расположенными в центрах всех цилиндров. Принимая во внимание, что в формуле (3) слагаемое $\Sigma E_k z^{-k}$ представляет собой потенциал всех мультиполей основного цилиндра, запишем очевидное выражение

$$\sum_k D_k z^k = -\bar{H}_0 z + \sum_{m, n} \sum_k E_k (z - \omega)^{-k}, \quad (18)$$

где символ ' при суммировании означает исключение

центрального цилиндра ($m^2 + n^2 \neq 0$).

Разлагая $(z - \omega)^{-k}$ в ряд по степеням z и обозначая

$$\Sigma' \omega^{-k} = \Sigma_k, \quad (19)$$

запишем уравнение (18) в виде эквивалентной системы уравнений

$$(-1)^k (\delta_{1k} \bar{H}_0 + k! D_k) = \sum_p E_p \frac{(k+p-1)!}{(p-1)!} \Sigma_{k+p} \quad (20)$$

или, учитывая выражение (17)

$$(-1)^k (\delta_{1k} \bar{H}_0 + k! \beta_k \bar{E}_k) = \sum_p E_p \frac{(k+p-1)!}{(p-1)!} \Sigma_{k+p}. \quad (21)$$

В выражениях (20) и (21) δ_{1k} – символ Кронеккера: $\delta_{11} = 1$, $\delta_{1k} = 0$ при $k \neq 1$. Систему уравнений (21) можно представить в матричном виде

$$\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{B}, \quad (22)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \bar{\mathbf{C}}\mathbf{C}$; $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{H}_0 + \bar{\mathbf{H}}_0$; \mathbf{H}_0 – матрица

столбец с компонентами $H_{0k} = -\frac{\delta_{1k} \bar{H}_0}{\beta_k k!}$; \mathbf{C} – матрица

с компонентами $C_{kp} = \frac{(k+p-1)!}{\beta_k k!(p-1)!} \Sigma_{k+p}$.

Бесконечная система уравнений (21) распадается на две независимые системы – с нечетными и четными индексами k, p . Вторая подсистема имеет только тривиальные решения, так как все $\delta_{1k} = 0$. Таким образом, в выражениях (19)-(21) следует принимать $k, p = 1, 3, 5, \dots$

Комплексные ряды Σ_{2l} в дальнейшем целесообразно использовать в виде

$$\Sigma_{2l} = \omega_1^{-2l} \sum' (m+n\tau)^{-2l} = \omega_1^{-2l} S_{2l}(\tau), \quad l = 1, 2, 3, \dots,$$

где $S_{2l}(\tau)$ – ряды Эйзенштейна, которые широко применяются в теории эллиптических функций [5, 6].

Для практических вычислений можно применять следующие выражения для рядов $S_2(\tau)$, $S_4(\tau)$ и $S_6(\tau)$ [5]:

$$S_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3} - 2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \text{sh}^{-2} jm\pi\tau; \quad (23)$$

$$S_4(\tau) = \frac{\pi^4}{45} + 2\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \text{sh}^{-2} jm\pi\tau + \text{sh}^{-4} jm\pi\tau \right); \quad (24)$$

$$S_6(\tau) = \frac{2\pi^6}{27 \cdot 35} - 2\pi^6 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{15} \text{sh}^{-2} jm\pi\tau + \text{sh}^{-4} jm\pi\tau + \text{sh}^{-6} jm\pi\tau \right). \quad (25)$$

Замечательной особенностью рядов Σ_{2l} (и S_{2l}) является возможность их выражения для $l > 3$ через Σ_4 и Σ_6 . Например, $\Sigma_8 = 3/7 \cdot \Sigma_4^2$, $\Sigma_{10} = 5/11 \cdot \Sigma_4 \cdot \Sigma_6$, $\Sigma_{12} = 1/143 \cdot (18\Sigma_4^3 + 25\Sigma_6^2)$, $\Sigma_{14} = 30/143 \cdot \Sigma_6 \Sigma_4^2, \dots$

Более подробно о рядах Σ_{2l} изложено в [2, 5, 6]. Таким образом, для решения системы уравнений (21) достаточно предварительно вычислить для заданного параметра τ числовые ряды $S_2(\tau)$, $S_4(\tau)$, и $S_6(\tau)$. Важно отметить, что при $l \geq 2$ ряды S_{2l} сходятся абсолютно [5]. Ряд S_2 , как нетрудно видеть, связан с комплексным потенциалом двоякопериодической системы диполей и его значение зависит от порядка суммирования. Именно с этой особенностью ряда S_2 связаны

анизотропные свойства приведенной среды.

В случае одиночного цилиндра в однородном поле, когда $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \infty$, все ряды Σ_{2l} равны нулю, поэтому из (20) следует, что $D_1 = -\bar{H}_0$, а моменты всех мультиполей более высоких порядков равны нулю. Используя соотношение (15), легко установить поле внутри цилиндра (в области F_1):

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{\bar{H}_1}{\bar{H}_0} = \frac{4\mu_2\mu_3}{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)[1 + \lambda_1\lambda_2(a/b)^2]} \quad (26)$$

Здесь H_1 – напряженность поля в области D_1 . В частном случае магнитного экрана, когда $\mu_1 = \mu_3 = \mu_0$, $\mu_2 \gg \mu_0$, выражение (26) упрощается и принимает известный вид [7]:

$$\frac{\bar{H}_1}{\bar{H}_0} = \frac{4\mu_{2r}}{(1 + \mu_{2r})^2} \cdot \frac{b^2}{[b^2 - \lambda^2 a^2]} \approx \frac{4}{\mu_{2r}} \cdot \frac{b^2}{b^2 - a^2}, \quad (27)$$

где μ_{2r} – относительная магнитная проницаемость ферромагнетика, $\lambda = (\mu_{2r} - 1) / (\mu_{2r} + 1)$.

В качестве другого примера рассмотрим произвольную двоякопериодическую систему полых ци-

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\Sigma_2 \cdot \bar{\Sigma}_2}{\beta_1 \cdot \bar{\beta}_1} - \frac{3\Sigma_4 \cdot \bar{\Sigma}_4}{\beta_3 \cdot \bar{\beta}_3} - \frac{5\Sigma_6 \cdot \bar{\Sigma}_6}{\beta_5 \cdot \bar{\beta}_5} & \frac{3\Sigma_4 \cdot \bar{\Sigma}_2}{\beta_1 \cdot \bar{\beta}_1} & \frac{30\Sigma_6 \cdot \bar{\Sigma}_4}{\beta_3 \cdot \bar{\beta}_3} & \frac{105\Sigma_8 \cdot \bar{\Sigma}_6}{\beta_5 \cdot \bar{\beta}_5} & \frac{5\Sigma_6 \cdot \bar{\Sigma}_2}{\beta_1 \cdot \bar{\beta}_1} & \frac{105\Sigma_8 \cdot \bar{\Sigma}_4}{\beta_3 \cdot \bar{\beta}_3} & \frac{630\Sigma_{10} \cdot \bar{\Sigma}_6}{\beta_5 \cdot \bar{\beta}_5} \\ \frac{\Sigma_2 \cdot \bar{\Sigma}_4}{\beta_1 \cdot \bar{\beta}_3} & 10\Sigma_4 \cdot \bar{\Sigma}_6 & 35\Sigma_6 \cdot \bar{\Sigma}_8 & 1 - \frac{3\Sigma_4 \cdot \bar{\Sigma}_4}{\beta_1 \cdot \bar{\beta}_1} - \frac{100\Sigma_6 \cdot \bar{\Sigma}_6}{\beta_3 \cdot \bar{\beta}_3} - \frac{735\Sigma_8 \cdot \bar{\Sigma}_8}{\beta_5 \cdot \bar{\beta}_5} & \frac{5\Sigma_6 \cdot \bar{\Sigma}_4}{\beta_1 \cdot \bar{\beta}_3} & \frac{350\Sigma_8 \cdot \bar{\Sigma}_6}{\beta_3 \cdot \bar{\beta}_3} & \frac{4410\Sigma_{10} \cdot \bar{\Sigma}_8}{\beta_5 \cdot \bar{\beta}_5} \\ \frac{\beta_1 \cdot \bar{\beta}_3}{\Sigma_2 \cdot \bar{\Sigma}_6} & \frac{\beta_3 \cdot \bar{\beta}_3}{21\Sigma_4 \cdot \bar{\Sigma}_8} & \frac{\beta_5 \cdot \bar{\beta}_3}{126\Sigma_6 \cdot \bar{\Sigma}_{10}} & \frac{\beta_1 \cdot \bar{\beta}_3}{3\Sigma_4 \cdot \bar{\Sigma}_6} & \frac{\beta_3 \cdot \bar{\beta}_3}{210\Sigma_6 \cdot \bar{\Sigma}_8} & \frac{\beta_5 \cdot \bar{\beta}_3}{2646\Sigma_8 \cdot \bar{\Sigma}_{10}} & 1 - \frac{5\Sigma_6 \cdot \bar{\Sigma}_6}{\beta_1 \cdot \bar{\beta}_1} - \frac{735\Sigma_8 \cdot \bar{\Sigma}_8}{\beta_3 \cdot \bar{\beta}_3} - \frac{15876\Sigma_{10} \cdot \bar{\Sigma}_{10}}{\beta_5 \cdot \bar{\beta}_5} \\ \frac{\beta_1 \cdot \bar{\beta}_5}{\Sigma_2 \cdot \bar{\Sigma}_6} & \frac{\beta_3 \cdot \bar{\beta}_5}{21\Sigma_4 \cdot \bar{\Sigma}_8} & \frac{\beta_5 \cdot \bar{\beta}_5}{126\Sigma_6 \cdot \bar{\Sigma}_{10}} & \frac{\beta_1 \cdot \bar{\beta}_5}{3\Sigma_4 \cdot \bar{\Sigma}_6} & \frac{\beta_3 \cdot \bar{\beta}_5}{210\Sigma_6 \cdot \bar{\Sigma}_8} & \frac{\beta_5 \cdot \bar{\beta}_5}{2646\Sigma_8 \cdot \bar{\Sigma}_{10}} & \frac{5\Sigma_6 \cdot \bar{\Sigma}_6}{\beta_1 \cdot \bar{\beta}_1} & \frac{735\Sigma_8 \cdot \bar{\Sigma}_8}{\beta_3 \cdot \bar{\beta}_3} & \frac{15876\Sigma_{10} \cdot \bar{\Sigma}_{10}}{\beta_5 \cdot \bar{\beta}_5} \end{pmatrix}$$

Нижне для иллюстрации приведены результаты решения системы уравнений (28) для следующих числовых параметров: основные периоды $\omega_1 = 4$, $\omega_2 = 3e^{j75^\circ}$, радиусы цилиндров $a = 0,5$, $b = 1$, относительные магнитные проницаемости областей $\mu_{1r} = 1$, $\mu_{2r} = 1000$, $\mu_{3r} = 1$, напряженность внешнего поля $H_0 = 1$.

Рассчитанные по (23) – (25) значения рядов S_{2j} : $S_2 = 3,024 - 0,799j$, $S_4 = 3,638 - 5,473j$, $S_6 = 1,441 - 12,430j$, $S_8 = -7,164 - 17,064j$, $S_{10} = 33,304 - 16,969j$.

В результате решения (28) получаем: $E_1 = 1,234 + 0,052j$, $E_3 = 0,016 - 0,026j$, $E_5 = 0,000709 + 0,003561j$. Коэффициенты A_k, B_k, C_k, D_k , входящие в выражения для потенциалов W_1, W_2, W_3 вычисляются по формулам (13) – (17).

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

На рис. 3,а – 6,а приведены картины силовых линий и эквипотенциалов поля, рассчитанные по выражениям (1) – (3). Для сравнения на рис. 3,б – 6,б показаны результаты расчета поля в тех же областях, полученные методом вторичных источников при численной реализации интегральных уравнений, ядро которого учитывает двоякопериодические особенности задачи [8]. Как видно из сравнения приведенных иллюстраций, в области центрального цилиндра картины полей практически совпадают даже при ограничении системы уравнений 3-м порядком. Это объясняется ограниченным кругом сходимости степенных рядов (1) – (3). В то же время моменты мультиполей могут быть вычислены из системы уравнений (28) практически точно, что позволяет предложить другой способ построения

линьев, ограничившись в системе уравнений (21) учетом только дипольного, квадрупольного и октупольного влияния, т.е. системой третьего порядка:

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_1 &= -\frac{\Sigma_2}{\beta_1} \cdot E_1 - \frac{3\Sigma_4}{\beta_1} \cdot E_3 - \frac{5\Sigma_6}{\beta_1} \cdot E_5 - \frac{\bar{H}_0}{\beta_1} \\ \bar{E}_3 &= -\frac{\Sigma_4}{\beta_3} \cdot E_1 - \frac{10\Sigma_6}{\beta_3} \cdot E_3 - \frac{35\Sigma_8}{\beta_3} \cdot E_5 \\ \bar{E}_5 &= -\frac{\Sigma_6}{\beta_5} \cdot E_1 - \frac{21\Sigma_8}{\beta_5} \cdot E_3 - \frac{126\Sigma_{10}}{\beta_5} \cdot E_5 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Согласно матричному соотношению (22)

$$C = \begin{pmatrix} \Sigma_2 & 3\Sigma_4 & 5\Sigma_6 \\ \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 \\ \Sigma_4 & 10\Sigma_6 & 35\Sigma_8 \\ \beta_3 & \beta_3 & \beta_3 \\ \Sigma_6 & 21\Sigma_8 & 126\Sigma_{10} \\ \beta_5 & \beta_5 & \beta_5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \bar{H}_0 \cdot \bar{\Sigma}_2 & \bar{H}_0 \\ \beta_1 \cdot \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_1 \\ \bar{H}_0 \cdot \bar{\Sigma}_4 & \\ \beta_1 \cdot \bar{\beta}_3 & \\ \bar{H}_0 \cdot \bar{\Sigma}_6 & \\ \beta_1 \cdot \bar{\beta}_5 & \end{pmatrix}$$

выражений для комплексного потенциала – через непосредственное вычисление потенциалов всех мультиполей в комплексной плоскости [2].

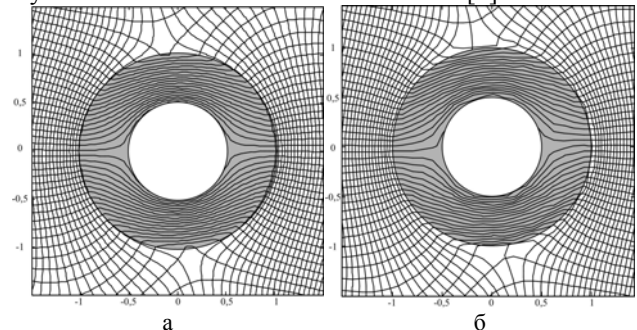


Рис. 3. Картина поля в окрестности основного цилиндра при направлении вектора напряженности H_0 вдоль горизонтальной оси: а – поле рассчитано по выражениям (1) – (3); б – поле рассчитано численным методом

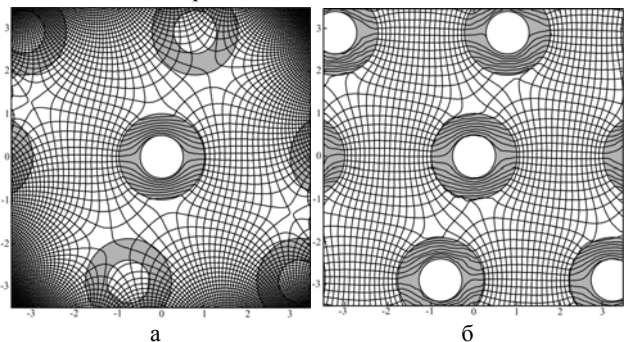


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но область расчетов расширена на несколько периодов

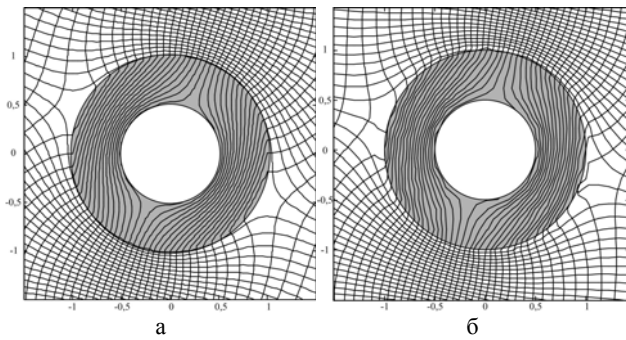


Рис. 5. Картина поля в окрестности основного цилиндра при направлении вектора напряженности H_0 под углом 75° к горизонтальной оси (вдоль периода ω_2): а – поле рассчитано по выражениям (1) – (3); б – поле рассчитано численным методом

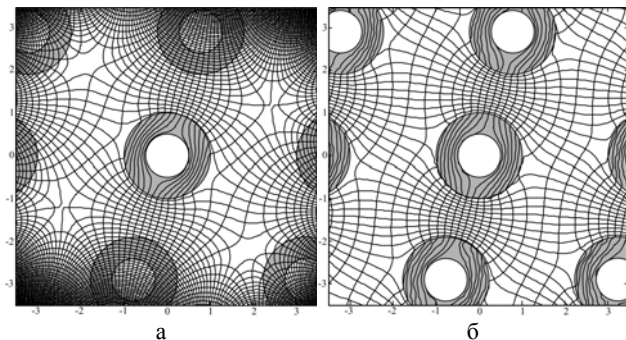


Рис. 6. То же, что на рис. 5, но область расчетов расширена на несколько периодов

Пусть $P_k(z) = (z - \omega)^{-k} = z^{-k} + \sum (z - \omega)^{-k}$. Тогда, например, для всех точек, расположенных вне цилиндров, $W_k = E_k P_k(z)$ – комплексный потенциал мультиполей порядка k , а комплексный потенциал двойкопериодической системы цилиндров во внешнем однородном поле H_0 :

$$W(z) = -\bar{H}_0 z + \sum_k E_k P_k(z), \quad z \in F_3, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (29)$$

Для $k \geq 3$ функции W_k являются двойкопериодическими (эллиптическими) и могут быть выражены через функцию Вейерштрасса $\wp(z)$ и ее производную $\wp'(z)$. По определению [5]

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum' \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right],$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2\sum' \frac{1}{(z-\omega)^3} = \sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3},$$

где $g_2 = 60\Sigma_4$, $g_3 = 140\Sigma_6$. Заметим также, что для нечетных k эллиптическую функцию можно представить в виде $R(\wp)\wp'$, где R – рациональная функция [5]. Легко также получить соотношение

$$P_k(z) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \wp^{k-2}(z), \quad k = 3, 5, 7, \dots,$$

в котором $k-2$ означает порядок производной. В частности $P_3(z) = -0,5 \cdot \wp'(z)$, $P_5(z) = -0,5 \cdot \wp(z) \cdot \wp'(z)$.

Функция $\wp(z)$ выражается в виде быстроходящегося ряда [5, 6], в котором достаточно оставлять 2-4 члена. Отдельного рассмотрения требует двойкопериодическая система диполей, поскольку функция $P_1(z)$ не выражается через абсолютно сходящийся ряд

и не является эллиптической. Однако и в этом случае можно учесть двойкопериодические особенности задачи [2], что обеспечивает эффективного решения задачи о системе полых цилиндров. Иллюстрация такого подхода будет предметом отдельной статьи.

ВЫВОДЫ

Метод мультиполей позволяет обобщить классическую задачу для системы сплошных цилиндров в прямоугольной матрице на случай двойкопериодической системы полых цилиндров с произвольными периодами. Получена система линейных алгебраических уравнений для моментов мультиполей любого порядка. Предложены два способа построения аналитических решений для комплексных потенциалов – в виде разложений в ряд в окрестности центрального цилиндра и в виде суммы потенциалов всех мультиполей. Сравнение с результатами численного решения, полученного методом вторичных источников, подтверждает правильность полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rayleigh J.W. On the Influence of Obstacles Arranged in Rectangular Order upon the Properties of a Medium // Phil. mag., 1982, v.5, p. 481-505.
2. Толмачев С.Т. Специальные методы решения задач магнитостатики. – Киев: Вища школа, 1983. – 166 с.
3. Толмачев С.Т. Однородное поле, возмущенное периодической системой круговых цилиндров // Теоретическая электротехника. Респ. межвед. научн.-техн. сб., вып. 23. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1977, с. 97-106.
4. Толмачев С.Т. Расчет эффективной электропроводности (проницаемости) двухфазных сред с цилиндрическими включениями // Электричество, 1975, №2, с. 39-43.
5. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 304 с.
6. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций, – М.: Наука, 1968. – 648 с.
7. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1996. – 638 с.
8. Толмачев С.Т., Ильченко А.В., Рожненко Ж.Г., Бондаревский С.Л. Математическое моделирование магнитного поля с двойкопериодической структурой // Праці Луганського відділення Міжнародної Академії інформатизації. – Луганськ, 2007. – № 1. – С. 141-146.

Поступила 09.10.2009

Толмачов Станіслав Трохимович, д.т.н., проф.

Юхимович Дмитро Леонідович,

Бондаревський Станіслав Львович,

Криворізький технічний університет,

кафедра електромеханіки,

Україна, 50027, Кривий Ріг, вул. XXII Партз'їзду, 11,

тел. (056) 409 06 33, e-mail: kafem@mail.ru

S.T. Tolmachov, D.L. Yukhimovich, S.L. Bondarevskiy

A doubly periodic problem for hollow circular cylinders.

A classical multifield method for an arbitrary doubly periodic system of solid cylinders is generalized for hollow cylinders. The problem is reduced to an infinite system of algebraic equations in multifield moments. Computational expressions for solving the system of equations by a reduction method are derived. Examples of numerical implementation of the field problem and the introduced analytical method are given.

Key words – doubly periodic problem, circular cylinders, potential field, numerical implementation.