УДК 621.3.011

# ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ФЕРРОРЕЗОНАНСНОЙ ЦЕПИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СХЕМНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Канов Л.Н., к.т.н., доц.
Севастопольский национальный технический университет
Украина, 99053, Севастополь, Стрелецкая бухта, СевНТУ,
кафедра "Судовые и промышленные электромеханические системы"
тел. (0692) 235-272

***Запропоновано схемні моделі основних лінійних і нелінійних електротехнічних елементів у стаціонарному режимі змінного струму, на підставі яких побудована схемна модель ферорезонансного кола. Запропоновано методику побудови вольтамперних і амплітудочастотних характеристик коли, а також визначення границь областей стійких режимів.***

***Предложены схемные модели основных линейных и нелинейных электротехнических элементов в стационарном режиме переменного тока, на основании которых получена схемная модель феррорезонансной цепи. Предложена методика построения вольтамперных и амплитудочастотных характеристик цепи и определения границ устойчивых режимов.***

## ВВЕДЕНИЕ

В электроприводах переменного тока, где применяются магнитные усилители и все чаще частотно регулируемые асинхронные двигатели, важное значение имеет анализ вольтамперных (ВАХ) и амплитудочастотных (АЧХ) характеристик феррорезонансных цепей [1]. Точное аналитическое исследование периодических режимов в таких цепях невозможно. Существует несколько методов приближенного аналитического определения параметров периодических режимов, постоянно появляются новые их модификации. Так в [2] на основе метода оптимальной линеаризации изложен итеративный подход к расчету установившихся режимов нелинейных цепей переменного тока, особенностью которого является возможность нахождения параметров нелинейных элементов по их ВАХ. В [3] предлагается метод последовательных приближений для анализа вынужденных колебаний в цепях, описываемых дифференциальными уравнениями высокого порядка. Для нахождения очередных приближений предлагается формировать системы нелинейных алгебраических уравнений, распадающихся на каждом шаге решения на отдельные подсистемы линейных уравнений второго порядка.

В ряду этих методов выделяется простой и экономный метод гармонической линеаризации [4, 5], который является основой частотного анализа нелинейных цепей. Этот метод предполагает близкую к синусоидальной форму токов и напряжений в цепи и позволяет использовать комплексные амплитуды. Существует несколько модификаций этого метода, позволяющих повысить его точность, например, [6]. Обзор этих методов показывает, что все они связаны с большим количеством аналитических преобразований и не позволяют получить явных выражений для характеристик феррорезонансных цепей. Графические методы построения таких характеристик громоздки и имеют невысокую точность.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью статьи является разработка методики применения схемного моделирования для построения ВАХ и АЧХ нелинейных цепей в рамках условий метода гармонической линеаризации, т.е. в предположении малого отличия форм токов и напряжений от синусоидальной. Схемное моделирование представляет эффективный численный метод исследования режимов переменного тока в нелинейных цепях [7].

## МАТЕРИАЛЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Определим схемные модели основных элементов в режиме синусоидального тока. Для линейного комплексного сопротивления $\underline{Z} = R + jX$ справедливо $(R + jX)(I' + jI'') = U' + jU''$, где $R, X$ – активное и реактивное сопротивление; $I', I'', U', U''$ – вещественные и мнимые части комплексных, действующих токов и напряжений. Отделяя вещественные и мнимые части, получаем $RI' - XI'' = U'; RI'' + XI' = U''$. Этим уравнениям соответствует схемная модель в виде пары последовательных цепей, изображенная на рис. 1, на которой реактивное сопротивление  входит коэффициентом управления в управляемые источники напряжения. Очевидно, в схемной модели резистора эти источники будут отсутствовать, а для реактивных элементов будет отсутствовать активное сопротивление. Аналогично строятся схемные модели проводимостей, взаимных индуктивностей [7] и др.

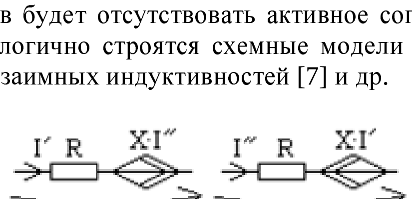


Рис. 1. Схемная модель комплексного сопротивления

Нелинейные элементы с однозначной ВАХ по действующим значениям токов и напряжений $I = f(U)$ представляются парой нелинейных управляемых источников тока, соответствующих вещественным и мнимым частям тока в элементе. Эти источники зависят от вещественных и мнимых частей напряжения на них: $I' = f_1(U', U'')$; $I'' = f_2(U', U'')$. Для конкретизации этих функций обратимся к записи активной и реактивной мощностей элемента: $P = U'I' + U''I''$; $Q = U''I' - U'I''$. В резистивном нелинейном элементе

$$U''I' = U'I'', \tag{1}$$

в реактивном элементе

$$U'I' = -U''I''. \tag{2}$$

Запишем ВАХ нелинейного элемента в виде $I^2 = f^2(U) = (I')^2 + (I'')^2$. Тогда для резистивного элемента с учетом (1) получаем

$$I' = \pm\frac{U'}{U} f(U); I'' = \pm\frac{U''}{U} f(U); \tag{3}$$

для реактивного элемента с учетом (2)

$$I' = \pm\frac{U''}{U} f(U); I'' = \pm\frac{U'}{U} f(U). \tag{4}$$

Из выражения активной мощности следует для резистивного элемента $U'I' > -U''I''$. Подставляя сюда $U'', U'$ из (1), получаем $U'I' > -\frac{U'}{I'}(I'')^2$; $\frac{U''}{I''}(I')^2 > -U''I''$. Поэтому знаки $U'$ и $I'$, а также $U''$ и $I''$ в выражениях (3) совпадают, и эти выражения принимают окончательный вид

$$I' = \frac{U'}{U} f(U); \; I'' = \frac{U''}{U} f(U).$$

Из выражения для реактивной мощности в индуктивном элементе $U''I' > U'I''$. Подставляя сюда $U', U''$ из (2), получаем $U''I' > -\frac{U''}{I'}(I'')^2$; $-\frac{U'}{I''}(I')^2 > U'I''$. Поэтому знаки $U''$ и $I'$ в выражениях (4) совпадают, а знаки $U'$ и $I''$ противоположны, и эти выражения принимают окончательный вид

$$I' = \frac{U''}{U} f(U); \; I'' = -\frac{U'}{U} f(U). \tag{5}$$

Для нелинейного емкостного элемента знаки в (5) будут противоположны. Аналогичное представление можно выполнить для нелинейных элементов с ВАХ вида $U = f(I)$.

С помощью полученных схемных моделей элементов строятся схемные модели цепей переменного тока, представляющие собой две цепи, объединенные управляемыми источниками. Расчет этих моделей дает вещественные и мнимые составляющие токов и напряжений в исследуемой цепи.

Рассмотрим построение характеристик последовательной феррорезонансной цепи с подмагничиванием. Примем для веберамперной характеристики индуктивности полиномиальную аппроксимацию $F = a_1\Phi + a_3\Phi^3$, где магнитодвижущая сила определяется как током $i$ рабочей обмотки $w$, так и током $I_y$ обмотки подмагничивания $w_y$: $F = wi + w_y I_y$. Магнитный поток кроме основной гармоники содержит постоянную составляющую $\Phi_0$:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_M \cos\omega t, \; \Phi_M = \frac{U_M}{\omega w}, \tag{6}$$

где $U_M$ – амплитуда напряжения на рабочей обмотке.

Выделим в выражении веберамперной характеристики слагаемые, соответствующие постоянным составляющим тока и потока

$$w_y I_y = \left(a_1 + 3a_3\left(\frac{U}{\omega w}\right)^2\right)\Phi_0 + a_3\Phi_0^3 \tag{7}$$

и составляющим первой гармоники

$$wi = -\left(a_1\frac{U_M}{\omega w} - 3\Phi_0^2\frac{U_M}{\omega w}a_3 - \frac{3}{4}a_3\left(\frac{U_M}{\omega w}\right)^3\right)\cos\omega t.$$

Последнее выражение дает уравнение ВАХ нелинейной индуктивности по действующим значениям тока и напряжения $I = \frac{U}{\omega w^2}\left(a_1 + 3a_3\Phi_0^2 + 1{,}5a_3\left(\frac{U}{\omega w}\right)^2\right)$, в котором $\Phi_0$ определяется из (7) и зависит от тока подмагничивания. В соответствии с этим выражения (5) для управляемых источников тока схемной модели индуктивности принимают вид

$$I' = \frac{U''}{\omega w^2}\left(a_1 + 3a_3\Phi_0^2 + 1{,}5a_3\left(\frac{U}{\omega w}\right)^2\right); \tag{8}$$

$$I'' = -\frac{I'}{U''}U'; \; U^2 = (U')^2 + (U'')^2.$$

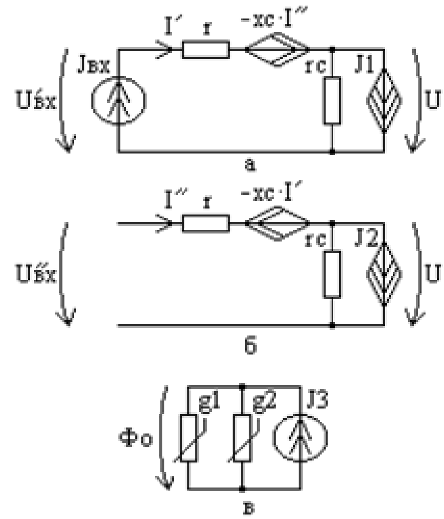


Рис. 2. Схемная модель последовательной феррорезонансной цепи

Схемная модель последовательной феррорезонансной цепи изображена на рис. 2, где в соответствии с (7) обозначены: $g1 = a_1 + 3a_3\left(\frac{U}{\omega w}\right)^2$ – управляемая проводимость, $g2 = a_3\Phi_0^2$ – нелинейная проводимость, $J3 = w_y I_y$, $r$ – сопротивление рабочей обмотки, управляемые источники напряжения представляют емкость, а сопротивление $r_c$ имитирует потери на гистерезис и принимается постоянным [8]. Управляемые источники тока $J1, J2$ определяются в соответствии с (8). Напряжение на проводимости $g1$ численно соответствует постоянной составляющей магнитного потока.

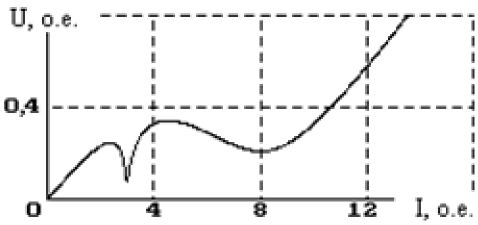


Рис. 3. Вольтамперная характеристика последовательной феррорезонансной цепи

На рис. 3 изображена ВАХ цепи, полученная просчетом схемной модели при изменении величины $J_{BX}$. Входное напряжение подсчитывается по выражению $U_{BX} = \sqrt{(U'_{BX})^2 + (U''_{BX})^2}$. Параметры цепи в относительных единицах: $r = 0{,}025$; $\omega w = 1$; $x_c = 0{,}22$; $r_c = 100$; $a_1 = 0{,}5$; $a_3 = 1$; $w_y I_y = 1$. Провал напряжения при $I = 8$ возникает из-за насыщения индуктивности при больших токах, второй провал при $I = 3$ объясняется искривлением ВАХ индуктивности вследствие подмагничивания. При плавном изменении входного напряжения в цепи возникает двойной триггерный эффект.

Для построения АЧХ в схемной модели на рис. 2,а источник тока $J_{BX}$ следует заменить единичным источником напряжения, а на рис.2,б контакты с левой стороны схемы закоротить. На рис. 4 изображена АЧХ цепи, построенная просчетом измененной таким образом схемной модели при изменении частоты. Наклон резонансной кривой вправо (участок 2 – 4) при высоких токах объясняется повышением резонансной частоты с падением индуктивности, а наклон влево (участок 1 – 2) при небольших токах возникает при некотором возрастании индуктивности вследствие подмагничивания.

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для оценки устойчивости режима цепи обратимся к уравнению

$$u_L + ri(\Phi, I_y) + \frac{1}{C}\int i(\Phi, I_y)dt = U_M \sin \omega t,$$

где $i(\Phi, I_y)$ – нелинейная зависимость между мгновенными значениями токов и магнитного потока. После дифференцирования получаем

$$\frac{du_L}{dt} = f(\Phi, I_y) + \omega U_M \cos \omega t, \qquad (9)$$

где $f(\Phi, I_y) = -r\frac{\partial i}{\partial \Phi}\frac{d\Phi}{dt} - \frac{1}{C}i(\Phi, I_y)$. Перепишем далее выражение (6) в более общем виде:

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \Phi_M(t)\cos x;\ x = \omega t + \varphi(t),$$

где $\Phi_M(t), \varphi(t)$ – медленно меняющиеся амплитуда первой гармоники потока и его начальная фаза.

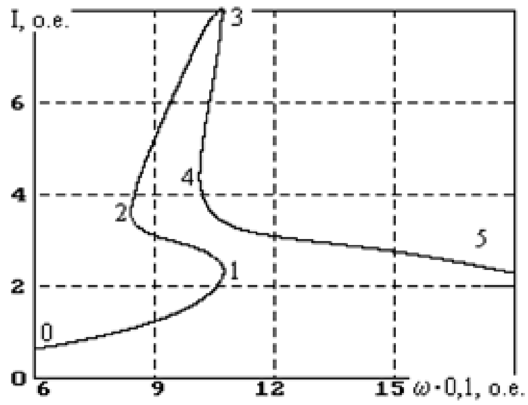


Рис. 4. Амплитудочастотная характеристика последовательной феррорезонансной цепи

Дифференцируя последнее выражение по "короткому времени", как это принято в методе медленно меняющихся амплитуд [4, 5, 8], получаем $\frac{d\Phi}{dt} = -\omega\Phi_M \sin x$. Дифференцирование же по "длинному времени" дает

$$\frac{d\Phi_M}{dt}\cos x - \Phi_M(t)\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)\sin x = -\omega\Phi_M \sin x. \qquad (10)$$

С учетом равенства $u_L(t) = w\frac{d\Phi(t)}{dt}$ и соотношения (10) уравнение (9) принимает вид

$$\frac{d\Phi_M}{dt}\sin x + \Phi_M \cdot \left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)\cos x - \frac{1}{\omega w} f(\Phi, I_y) = -\frac{U_M}{w}\cos \omega t. \qquad (11)$$

Уравнения (10), (11) представляют уравнения для медленно меняющихся амплитуды магнитного потока $\Phi_M(t)$ и начальной фазы $\varphi(t)$. После приведения этих уравнений к нормальному виду и усреднения за период по $x$, получаем укороченные уравнения, правые части которых не зависят явно от времени:

$$\frac{d\Phi_M(t)}{dt} = F_1(\Phi_M, \varphi);\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = F_2(\Phi_M, \varphi). \qquad (12)$$

Необходимое условие устойчивости стационарного режима состоит в выполнении неравенств

$$-(a_{11} + a_{22}) > 0;\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

где $a_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial \Phi_M}$; $a_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial \varphi}$; $a_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial \Phi_M}$; $a_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial \varphi}$.

Непосредственная проверка этих условий для исследуемой цепи достаточно громоздка, однако для второго условия непосредственно по виду АЧХ можно определить граничные по устойчивости точки, в которых $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

Для этого отметим, что условия стационарного режима укороченных уравнений имеют вид: $F_1(\Phi_M, \varphi) = 0$; $F_2(\Phi_M, \varphi) = 0$. Последнее равенство задает неявную функцию $\varphi = \varphi(\Phi_M)$; тогда для стационарного режима получаем уравнение относительно одной переменной

$$F_1(\Phi_M, \varphi(\Phi_M)) = 0. \qquad (13)$$

Согласно правилам дифференцирования неявной функции получаем $\frac{dF_1}{d\Phi_M} = \frac{\partial F_1}{\partial \Phi_M} - \frac{\partial F_1}{\partial \varphi}\frac{\frac{\partial F_2}{\partial \Phi_M}}{\frac{\partial F_2}{\partial \varphi}}$. Следовательно, граничное условие состоит в равенстве $\frac{dF_1}{d\Phi_M} = 0$. Поэтому для выявления граничных точек на АЧХ, которая является графическим представлением уравнения (13), нужно найти точки касания АЧХ с вертикальными прямыми, так как при заданном токе управления амплитуды рабочего тока и потока связаны однозначно.

В соответствии с выполненным анализом на рис.4 выделим граничные точки 1 – 4, отделяющие устойчивые и неустойчивые режимы. Из физических соображений можно заключить, что режимы на участках 0 – 1 и 4 – 5 устойчивы. Тогда участкам 1 – 2 и 3 – 4 соответствуют неустойчивые режимы. К устойчивым можно отнести участок 2 – 3. В соответствии с этим в цепи возможны множественные триггерные эффекты при плавном изменении частоты.

При плавном увеличении частоты с точки 1 происходит скачок тока вверх на участок 2 – 3; при дальнейшем увеличении частоты с точки 3 на вершине кривой происходит скачок тока вниз на участок 4 – 5. При плавном уменьшении частоты с точки 4 происходит скачок тока вверх на участок 2 – 3; при дальнейшем уменьшении частоты происходит скачок тока вниз на участок 0 – 1. Кроме того, при увеличении частоты с точки 1 скачок тока может происходить сразу на участок 4 – 5, минуя вершину графика. Поэтому неустойчивые участки не могут быть достигнуты при изменении частоты.

## ВЫВОДЫ

Предложены схемные модели основных линейных и нелинейных электротехнических элементов в стационарном режиме переменного тока в условиях метода гармонической линеаризации. Построена схемная модель последовательной феррорезонансной цепи, состоящая из сопротивлений, линейных, нелинейных, управляемых и независимых источников напряжения и тока.

Предложена методика построения вольтамперных и амплитудочастотных характеристик феррорезонансных цепей с помощью полученных схемных моделей, основанная на просчете режима при изменении входного тока и частоты.

Обосновано применение метода медленно меняющихся синусоид для выявления граничных точек на АЧХ, отделяющих участки, соответствующие устойчивым и неустойчивым режимам феррорезонансной цепи. Граничные точки являются точками касания вертикальных прямых и графика амплитудочастотной характеристики.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Соколовский Г.Г. Электроприводы переменного тока с частотным регулированием. – М.: Изд. центр "Академия", 2006. – 272 с.

[2] Калугин Е.Н. Метод оптимальной линеаризации для расчета установившихся режимов нелинейной электрической цепи // Электричество. – 1989. – № 10. – С. 53-60.

[3] Орешников В.Г. Метод анализа вынужденных колебаний в нелинейных цепях // Известия ВУЗов. Электромеханика. – 1997. – № 6. – С. 9-11.

[4] Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Изд-во "Гардарики", 2006.– 701 с.

[5] Данилов Л.В Теория нелинейных электрических цепей / Л.В.Данилов, П.Н.Матханов, Е.С.Филиппов. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 256 с.

[6] Бирюк Н.Д. Анализ колебаний в нелинейном контуре методом комплексных амплитуд / Н.Д.Бирюк, В.Н.Дальчев // Электричество. – 1988. – № 8. – С. 46-51.

[7] Канов Л.Н. Схемное моделирование нелинейных электрических цепей переменного тока // Вестник СевГТУ. Вып. 41. Информатика, электроника, связь: Сб. науч. тр. Севастоп. нац. техн. ун-т. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – С. 151-154.

[8] Филиппов Е. Нелинейная электротехника. – М.: Энергия, 1976. – 496 с.


*Поступила 30.05.2008*