

РАЗРЯД ЁМКОСТИ НА ПЛОСКИЙ ОДНОВИТКОВЫЙ ИНДУКТОР, РАСПОЛОЖЕННЫЙ НАД ТОНКОСТЕННОЙ ЛИСТОВОЙ ЗАГОТОВКОЙ

Бондаренко А.Ю., к.т.н., с.н.с.,

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"

Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, НТУ "ХПИ", кафедра "Инженерная электрофизика"

тел. (057) 707-62-45, E-mail: baiu@kharkov.ua

Проведено теоретичний аналіз перехідного процесу в розрядному контурі ємнісного накопичувача енергії з навантаженням у вигляді плоского одновиткового індуктора, розташованого над тонкостінною заготовкою, з урахуванням проникнення електромагнітного поля в метал заготовки. Показано, що перехідний процес не робить істотного впливу на інтегральну форму розрядного струму.

Проведен теоретический анализ переходного процесса в разрядном контуре ёмкостного накопителя энергии с нагрузкой в виде плоского одновиткового индуктора, расположенного над тонкостенной заготовкой, с учетом проникновения электромагнитного поля в металл заготовки. Показано, что переходный процесс не оказывает существенного влияния на интегральную форму разрядного тока.

Во многих публикациях, посвященных магнитно-импульсной обработке металлов (МИОМ), с достаточной степенью точности, считается, что временная зависимость разрядного тока описывается экспоненциально затухающей синусоидой, параметры которой не зависят от диффузии электромагнитного поля в металл заготовки и остаются неизменными в течении всего процесса разряда конденсаторной батареи [1, 2]. В действительности диффузия электромагнитного поля в металл обрабатываемой заготовки влияет на форму разрядного тока магнитно-импульсной установки (МИУ).

В работах [3-5] учтено влияние процессов проникновения электромагнитного поля в металл элементов, представляющих собой нагрузку в разрядном контуре МИУ, на параметры контура в целом. Расчеты выполнены для случая массивных проводников в режимах, близких к резкому поверхностному эффекту. Их авторами проведена оценка и показано некоторое изменение амплитудно-временных характеристик разрядного тока в начальной стадии формирования импульса.

Одним из направлений развития МИОМ в настоящее время является разработка и исследование МИУ и индукторов для выполнения операции притяжения обрабатываемой плоской заготовки к индуктору. Для выполнения указанной операции необходимы низкочастотные магнитные поля [6, 7], которые проникают сквозь обрабатываемую заготовку и процессы диффузии поля не в среду, а сквозь тонкий проводящий слой весьма значимы.

Целью работы является теоретическое исследование переходного процесса в разрядном контуре МИУ с нагрузкой в виде плоского одновиткового индуктора, расположенного над тонкостенной металлической заготовкой (рис. 1).

Уравнения Максвелла для возбуждаемых составляющих вектора электромагнитного поля ($E_\varphi \neq 0, H_{r,z} \neq 0$), преобразованных по Лапласу с учётом нулевых начальных условий, имеют вид [7]:

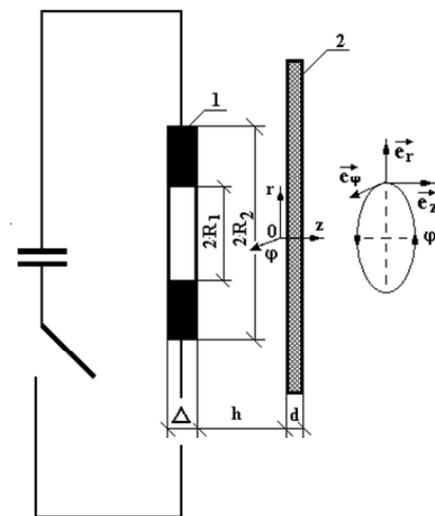


Рис. 1

1 – плоский одновитковый индуктор, 2 – листовая заготовка, $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ – направляющие орты цилиндрической системы координат

$$\begin{cases} \frac{\partial H_r(p,r,z)}{\partial z} - \frac{\partial H_r(p,r,z)}{\partial r} = j_\varphi(p,r,z); & (1) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi(p,r,z)) = -\mu_0 \cdot p \cdot H_z(p,r,z); & (2) \\ \frac{\partial E_\varphi(p,r,z)}{\partial z} = \mu_0 \cdot p \cdot H_r(p,r,z), & (3) \end{cases}$$

где p - параметр преобразования Лапласа; $j_\varphi(t,r,z)$ - плотность стороннего тока в индукторе, $E_\varphi(p,r,z) = L\{E_\varphi(t,r,z)\}$; $H_{r,z}(p,r,z) = L\{H_{r,z}(t,r,z)\}$; $j_\varphi(p,r,z) = L\{j_\varphi(t,r,z)\}$; $J_\varphi(p,r,z) = j(p) \cdot f(r) \cdot \delta(z+h)$; $j(p) = \frac{I(p)}{R_2 - R_1}$ - изображение плотности тока в индукторе, $f(r)$ - функция радиального распределения тока в витке индуктора; $\delta(z+h)$ - дельта функция Дирака.

Используем полученные в работе [7] результаты решения уравнений (1 – 3) для исследования переход-

ного процесса в разрядном контуре МИУ при низкой частоте разрядного тока. Тангенциальная компонента напряжённости электрического поля, возбуждаемого над листовой заготовкой, найдена с помощью системы уравнений относительно неизвестных постоянных интегрирования (17), (18) и выражения (11), приведенных в работе [7]. Сохраняя принятые в указанной работе обозначения, получаем, что

$$E_{\varphi}^{(1)}(p, \lambda, z) = \frac{\mu_0 \cdot p \cdot j(p) \cdot f(\lambda)}{\lambda} \times \left[\eta(z+h) \cdot sh(\lambda(z+h)) - \frac{e^{\lambda z}}{\left(1 + \frac{\lambda}{q}\right)} \times \left(\left[sh(\lambda h) + \frac{\lambda}{q} ch(\lambda h) \right] + \frac{2e^{-(\lambda h + qd)} \left(1 - \frac{q}{\lambda}\right)}{G(p, \lambda)} \right) \right], \quad (4)$$

где $G(p, \lambda) = \left(1 - \frac{q}{\lambda}\right)^2 \cdot e^{-qd} - \left(1 + \frac{q}{\lambda}\right)^2 \cdot e^{qd}$,

$f(\lambda) = \int_{R_1}^{R_2} r J_1(\lambda \cdot r) d\lambda$ - ядро интегрального преобразования Фурье – Бесселя, $\eta(z+h)$ - ступенчатая функция, $q = \sqrt{\lambda^2 + p\mu_0\gamma}$, λ - параметр преобразования Фурье – Бесселя.

При $z = -h$ из формулы (4) после тождественных преобразований получаем, что

$$E_{\varphi}^{(1)}(p, \lambda, z = -h) = -\frac{\mu_0 \cdot p \cdot j(p) \cdot f(\lambda)}{2\lambda} \times \left(1 + e^{-2\lambda h} \cdot \frac{(\lambda - q)}{(\lambda + q)} \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{q}{\lambda} \cdot \frac{e^{-qd}}{G(p, \lambda)} \right) \right). \quad (5)$$

С помощью закона электромагнитной индукции в интегральной форме и выражения (5) находим э.д.с., возбуждаемую в индукторе. При этом полагаем, что весь поток сконцентрирован во внутреннем отверстии витка.

$$p \cdot \Phi(p) = -E(p) \cdot 2\pi \cdot R_1 = \frac{\pi\mu_0 p I(p)}{\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)} \cdot \int_0^{\infty} f(\lambda) J_1(\lambda R_1) \times \left(1 + e^{-2\lambda h} \cdot \frac{(\lambda - q)}{(\lambda + q)} \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{q}{\lambda} \cdot \frac{e^{-qd}}{G(p, \lambda)} \right) \right) d\lambda. \quad (6)$$

Операторное сопротивление индукторной системы находится из зависимости (6) делением на изображение тока $-I(p)$.

$$Z(p) = p \cdot \frac{\pi\mu_0}{\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)} \cdot \int_0^{\infty} f(\lambda) \cdot J_1(\lambda R_1) \left(1 + e^{-2\lambda h} \times \frac{(\lambda - q)}{(\lambda + q)} \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{q}{\lambda} \cdot \frac{e^{-qd}}{G(p, \lambda)} \right) \right) d\lambda. \quad (7)$$

Проанализируем полученный результат для различных режимов работы системы. Для этого рассмотрим возможные физические идеализации при интенсивном проникновении поля и при резком скин-эффекте. В первом случае для $(\gamma, \omega) \rightarrow 0$ $q \approx \lambda$. Операторное сопротивление имеет строго индуктивный характер.

$$Z(p) \Big|_{(\gamma, \omega) \rightarrow 0} \approx p \cdot \frac{\pi\mu_0}{\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)} \cdot \int_0^{\infty} f(\lambda) \cdot J_1(\lambda R_1) \cdot d\lambda. \quad (8)$$

Аналогичным образом, для режима резкого поверхностного эффекта при $(\gamma, \omega) \rightarrow \infty$ и $|q| \approx \sqrt{p\mu_0\gamma} \rightarrow \infty$ находим, что операторное сопротивление индукторной системы так же имеет индуктивный характер, но в его значении учитывается величина зазора между рабочей поверхностью индуктора и заготовкой. Практически это означает, что весь магнитный поток сконцентрирован между витком и заготовкой, что позволяет ожидать существенно меньшую величину сопротивления.

$$Z(p) \Big|_{(\gamma, \omega) \rightarrow \infty} \approx p \cdot \frac{\pi\mu_0}{\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)} \times \int_0^{\infty} f(\lambda) \cdot J_1(\lambda R_1) \cdot (1 - e^{-2\lambda h}) \cdot d\lambda. \quad (9)$$

Выполним оценку для индукторной системы со следующей геометрией: $R_1 = 0,05$ м, $R_2 = 1,25$ м,

$h = 0,0005$ м, где R_1 - внутренний радиус одновиткового индуктора, R_2 - внешний радиус индуктора, h - расстояние между индуктором и заготовкой.

Для низкочастотного режима $|Z(p)| \approx 1,67 \cdot 10^{-7}$ Гн. При высокой частоте $|Z(p)| \approx 7,49 \cdot 10^{-9}$ Гн. Сравнение результатов численных оценок показывает значительную разницу в величинах сопротивлений, определяющих связь тока и напряжения на индукторе. Кроме того, полученные оценки позволяют считать, что величина и характер сопротивления должны изменяться в процессе разряда. Это означает, что возможно искажение временной формы токового импульса в индукторе по сравнению со строгой экспоненциально затухающей синусоидой.

Проведём оценку отмеченного эффекта.

Разрядный контур МИУ [1] состоит из последовательно соединенных конденсаторной батареи - C , собственной индуктивности контура - L_0 , собственного сопротивления - R_0 и сопротивления индукторной системы - $Z(p)$. Напряжение емкостного накопителя энергии - U_0 .

Операторная форма тока в разрядном контуре описывается выражением:

$$I(p) = -U_0 \cdot Y(p), \quad (10)$$

где $Y(p)$ - физически соответствует операторной проводимости разрядного контура,

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 \cdot L_0 + p \cdot R_0 + p \cdot Z(p) + \frac{1}{C}}$$

Определение оригинала операторной проводимости с использованием выражения (7) представляется весьма громоздкой и сложной вычислительной задачей. Непосредственно применить аппарат теории вычетов для выполнения обратного преобразования Лапласа [8] не представляется возможным.

Поставленную задачу можно упростить, если аппроксимировать операторное сопротивление индукторной системы алгебраической зависимостью относительно параметра преобразования Лапласа.

Выражение (7) запишем в виде суммы:

$$Z(p) = Z_1(p) + Z_2(p), \quad (11)$$

где $Z_1(p) = p \cdot F_1$, $Z_2(p) = p^2 \cdot F_2(p)$,

$$F_1 = \frac{\pi \mu_0}{\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)} \cdot \int_0^\infty f(\lambda) \cdot J_1(\lambda R_1) \cdot d\lambda,$$

$$F_2(p) = -\frac{\pi \mu_0}{\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)} \cdot \int_0^\infty f(\lambda) \cdot J_1(\lambda \cdot R_1) \cdot e^{-2\lambda h} \times$$

$$\times F_3(p, \lambda) \cdot d\lambda,$$

$$F_3(p, \lambda) = \left(\frac{\mu_0 \gamma}{\lambda^2}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{1 + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) \cdot \text{cth}(q(p, \lambda) \cdot d)}$$

Первое слагаемое в выражении (11) совпадает с (8) и, как уже было указано, по физическому смыслу соответствует постоянной индуктивности системы "виток - тонкостенная листовая заготовка".

Второе слагаемое в пространстве оригиналов можно интерпретировать как индуктивность, но переменную. Эта составляющая определяет начальное развитие диффузионных процессов во времени и их влияние на электродинамические параметры системы.

Следует отметить, что данное представление операторного сопротивления наглядно не только для физической интерпретации, но также необходимо для выполнения обратного преобразования Лапласа и сходимости полученного результата в начальной стадии процесса, то есть вблизи момента $t \approx 0$. Произведение продольного волнового числа на толщину листовой заготовки представим как мнимую величину:

$$(q(p, \lambda) \cdot d) = i \cdot \beta_k. \quad (12)$$

Приравняв к нулю знаменатель дроби в $F_3(p, \lambda)$ и подставляя (12) в полученное выражение, получаем уравнение для величин β_k :

$$\text{ctg}(\beta_k) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\beta_k}{(\lambda d)} - \frac{(\lambda d)}{\beta_k} \right). \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что особыми точками функции комплексного переменного $F_3(p, \lambda)$, явля-

ются простые отличные от нуля полюсы - p_k :

$$p_k = -\frac{1}{\tau} \cdot (\beta_k^2 + (\lambda d)^2), \quad k = 0, \pm 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где $\tau = \mu_0 \gamma d^2$ - характерное время диффузии поля в металл листовой заготовки.

Из выражения для $F_3(p, \lambda)$ с помощью теоремы об оригинале дробно - рациональной функции находим соответствующую временную зависимость:

$$F_3(t, \lambda) = \left(\frac{\mu_0 \gamma}{\lambda^2}\right) \times \sum_k \frac{e^{p_k \cdot t}}{\left. \frac{d}{dp} \left(1 + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)^2 + 2 \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) \times \right) \right|_{p=p_k}} = \sum_k Q_k \cdot (\lambda d) \cdot e^{-\frac{\beta_k^2 + (\lambda d)^2}{\tau} \cdot t}, \quad (15)$$

$$\text{где } Q_k(\lambda d) = \frac{1}{1 + (\lambda d) \left[1 + 0.25 \left(\frac{\beta_k}{(\lambda d)} - \frac{(\lambda d)}{\beta_k} \right) \times \left(\left(\frac{\beta_k}{(\lambda d)} - \frac{(\lambda d)}{\beta_k} \right) - \frac{2}{\beta_k} \right) \right]}$$

С использованием (15) выражение для оригинала функции $F_2(p)$ принимает вид:

$$F_2(t) = -\frac{\pi \mu_0}{\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)} \cdot \int_0^\infty f(\lambda) \cdot J_1(\lambda R_1) \times e^{-2\lambda h} \cdot \sum_k Q_k \cdot (\lambda d) \cdot e^{-\frac{\beta_k^2 + (\lambda d)^2}{\tau} \cdot t} d\lambda. \quad (16)$$

Для ранее принятой геометрии индуктора, расположенного над тонколистовой заготовкой с толщиной $d \approx 0,0001 \div 0,001$ м, рассмотрим временное изменение функции (16).

Как показывают вычисления, для $(\lambda d) \in [0, 1]$ решения уравнения (13) с относительной погрешностью не выше 3% записываются в виде:

$$\beta_k \approx k\pi + \frac{2 \cdot (\lambda d)}{k\pi}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Корни (17) подставим в выражение (16), при этом интервал изменения параметра (λd) соответствует принятой толщине листовых заготовок - $d \leq 0,001$ м. Более конкретную оценку всегда можно получить, исходя из значения λ_{\max} , вычисленного табулированием функции $f(\lambda)$. Например, в принятой индукторной системе при равномерном распределении тока в витке $f(\lambda_{\max}) \approx 0$ для $\lambda_{\max} \geq 500 \div 600$.

Результаты вычислений по формуле (15) приведены на рис. 2. На рис. 2а представлены амплитудные

значения $F_2(t=0)$ в зависимости от толщины листовой заготовки, а на рис. 2б - значения $F_{20}(t) = \frac{F_2(t)}{F_2(t=0)}$ в функциональной зависимости от отношения реального времени к характерному времени диффузии поля в проводящий слой с заданной толщиной и удельной электропроводностью.

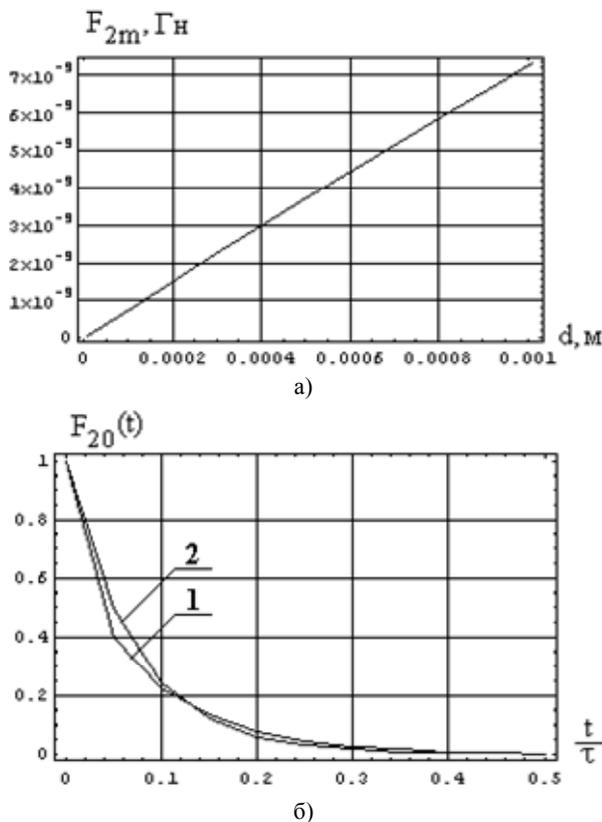


Рис. 2

кривая 1 - строгий расчёт по формуле (16), кривая 2 - аппроксимация экспоненциальной зависимостью

$$F_{20}(t) \approx \exp\left(-\theta \cdot \frac{t}{\tau}\right), \quad \theta \approx 14,2$$

Расчеты показали, что выражение (16) с достаточной точностью можно аппроксимировать экспонентой:

$$F_2(t) \approx F_2(t=0) \cdot \exp\left(-\theta \cdot \frac{t}{\tau}\right). \quad (18)$$

Теперь изображение

$$F_2(t) \Leftrightarrow F_2(p) \approx \frac{\tau \cdot F_2(t=0)}{p\tau + \theta}$$

позволяет записать аппроксимированное выражение для операторного сопротивления индукторной системы (11).

$$Z(p) \approx p \cdot F_1 - p^2 \cdot \frac{\tau \cdot F_2(t=0)}{p\tau + \theta}. \quad (19)$$

Формула (10) с учётом (18) принимает вид:

$$I(p) = - \frac{U_0 \cdot (p\tau + \theta)}{a_3 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0}, \quad (20)$$

где

$$a_3 = \tau \cdot (L_0 + F_1 + F_2(t=0)), \quad a_2 = (\theta \cdot (L_0 + F_1) + \tau \cdot R_0),$$

$$a_1 = \left(\frac{\tau}{C} + \theta \cdot R_0\right), \quad a_0 = \frac{\theta}{C}.$$

Оригинал выражения (20) находится с помощью теоремы об обращении рациональной дроби [8]:

$$I(t) = -U_0 \cdot \sum_{k=1}^3 \frac{(p_k \cdot \tau + \theta) \cdot e^{p_k \cdot t}}{3 \cdot a_3 \cdot p_k^2 + 2 \cdot a_2 \cdot p_k + a_1}, \quad (21)$$

где p_k - корни многочлена в знаменателе дроби (20).

В качестве иллюстрации проведем расчет по формуле (21) для МИУ со следующими параметрами: $C = 900$ мкФ, $L_0 = 1680$ нГн, $R_0 \approx 0,012$ Ом, $U_0 = 4,5$ кВ. Величина собственной индуктивности МИУ включает в себя индуктивность согласующего трансформатора [1, 9], включенного в разрядную цепь. Обрабатываемая заготовка выполнена из электротехнической стали, и имеет характеристики:

$$d = 0,0005 \text{ м } \gamma = 0,2 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}.$$

Знаменатель дроби (20) имеет один действительный и два комплексно сопряженных корня:

$$p_1 = -4,7 \cdot 10^8, \quad p_{2,3} = -1916,7 \pm 17816,3 \cdot i.$$

Первый из них соответствует, так называемой, переходной составляющей тока в индукторе:

$$I_{\text{п}}(t) = -U_0 \cdot \frac{(p_1 \cdot \tau + \theta) \cdot e^{p_1 \cdot t}}{3 \cdot a_3 \cdot p_1^2 + 2 \cdot a_2 \cdot p_1 + a_1}. \quad (22)$$

Два остальных соответствуют стационарной составляющей тока в индукторе:

$$I_{\text{ст}}(t) = -U_0 \cdot \text{Re} \left[\sum_{k=2}^3 \frac{(p_k \cdot \tau + \theta) \cdot e^{p_k \cdot t}}{3 \cdot a_3 \cdot p_k^2 + 2 \cdot a_2 \cdot p_k + a_1} \right]. \quad (23)$$

Переходная и стационарная составляющие разрядного тока МИУ, рассчитанные с помощью выражений (22), (23) в одном и том же амплитудно-временном масштабе, представлены на рис. 3.

Сравнительный анализ результатов вычислений, представленных на рис. 3, показывает, что

- переходная и стационарная компоненты тока в индукторе направлены противоположно;

- амплитуда переходной составляющей тока много ниже амплитуды его стационарной компоненты, что обусловлено весьма малой величиной переменной индуктивности $F_2(t=0)$;

- длительность переходного процесса составляет не более половины характерного времени диффузии поля в металл листовой заготовки, что много меньше времени развития и периода колебаний разрядного тока;

- в целом, переходный процесс практически не оказывает влияния на интегральную форму разрядного тока МИУ ($I_{\text{инт}}(t) = I_{\text{п}}(t) + I_{\text{ст}}(t)$), график которого представлен на рис. 4. Это позволяет считать процесс его установления практически квазистационарным.

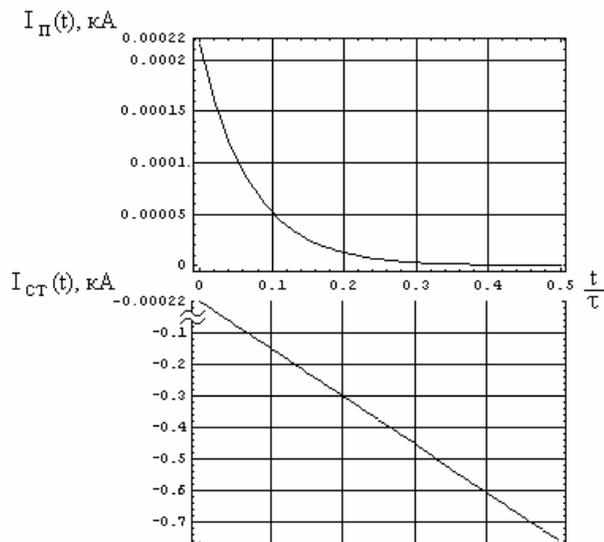


Рис. 3

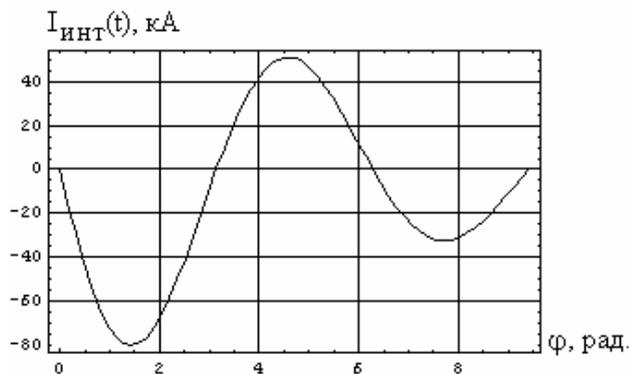


Рис. 4

Уменьшение рабочей частоты разрядного тока по сравнению с собственной частотой МИУ определяется составляющей операторного сопротивления $Z_1(p)$ и носит стационарный характер.

Также как и при проявлении резкого поверхностного эффекта, незначительное изменение формы первой полуволны разрядного тока МИУ может быть, в случае необходимости, учтено с помощью приведенного в статье математического аппарата.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов. – Харьков: Вища школа, 1977. – 168 с.
- [2] Батыгин Ю.В., Лавинский В.И., Хименко Л.Т. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Том 1. 2-е изд., перераб. и доп. - Харьков: МОСТ-Торнадо, 2003. - 288 с.
- [3] Новгородцев А.Б., Шнейерсон Г.А. О разряде конденсатора на идеальный бифиляр, образованный массивными проводниками // Известия вузов. Энергетика. - 1965. - №12. - С. 96–98.
- [4] Юрченко В.И. Разряд ёмкости на нагрузку из двух параллельных шин с учетом скин – эффекта // Журн. техн. физики. – 1973. - №9. – С. 1866 – 1873.
- [5] Михайлов В.М. Переходный процесс в разрядном контуре конденсатора с массивным одновитковым соленоидом // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1974. - №2. – С. 79–85.
- [6] Батыгин Ю.В., Лавинский В.И., Чаплыгин Е.А. Особенности токов индуцированных низкочастотным полем одновиткового соленоида в плоских листовых металлах // Электротехніка і електромеханіка. – 2005. - №3. – С. 69-73.
- [7] Батыгин Ю.В., Чаплыгин Е.А. Вихревые токи в плоских листовых металлических заготовках // Электротехніка і електромеханіка. – 2006. - №5. – С. 54-59.
- [8] Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. - М: Наука, 1971. – 288 с.
- [9] Вдовин С.С. Проектирование импульсных трансформаторов. – 2-е изд., перераб. и доп.- Л.: Энергия, 1991. – 208 с.

Поступила 31 03.2008