

К ПОСТАНОВКЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОВИТКОВОЙ ОБМОТКИ

Бранспиз М.Ю.,

Восточноукраинский национальный университет имени Владимира Даля

Украина, 91034, Луганск, квартал Молодежный, 20-а, ВНУ им. В. Даля, кафедра электротехники

тел. (0642) 63-66-28

Приведено розв'язання двох задач оптимізації для електричної обмотки у вигляді одного витка. Показано, що при формулюванні задачі оптимізації електромагнітів необхідно враховувати можливе обмеження на область визначення початкових даних

Приведено решение двух задач оптимизации для электрической обмотки в виде одного витка. Показано, что при формулировке задачи оптимизации электромагнитов необходимо учитывать возможное ограничение на область определения исходных данных

ВВЕДЕНИЕ

При расчете и проектировании различных типов электрических аппаратов и других электротехнических устройств часто имеет место ситуация, когда удовлетворить каким-либо эксплуатационным требованиям можно для нескольких вариантов набора геометрических и электрических параметров устройства, в результате чего перед расчетчиком возникает задача выбора наилучшего варианта [1, 2]. В общем случае формализация этой задачи как задачи оптимизации некоторого электротехнического устройства является достаточно сложной, поскольку требует установления зависимости критерия оптимизации от параметров устройства для получения функции цели [1-3]. Сложным в общем случае является и решение соответствующей оптимизационной задачи, что приводит на практике к стремлению использования накопленного опыта в виде определенных баз данных, нерациональность которого отмечается в [2]. Но, если учесть определенную однотипность электротехнических устройств, то некоторые особенности решения оптимизационных задач для них можно установить, рассматривая их обобщенно-упрощенные варианты. В частности, для электромагнитов с осевой симметрией такой обобщенный вариант представляет собой цилиндрическую катушку с током и железо магнитной системы, которое также может быть эквивалентно представлено некоторым замкнутым током. Это дает возможность осуществлять анализ особенностей оптимизационных задач электромагнитов с осевой симметрией, используя предварительный анализ оптимизационной задачи для нескольких катушек с током, которые имеют общую ось симметрии. При этом появляется возможность введения новых аналитических соотношений для указанных электромагнитов, снижая эвристический «произвол» при проектировании, что находится в соответствии с тенденцией повышения роли теоретических рекомендаций при проектировании электромагнитов [2]. В данной работе приведены результаты анализа оптимизационной задачи для одновитковой катушки. Для этих результатов предполагается в дальнейшем их развитие на многovitковые катушки и катушки непосредственно с железом магнитной системы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На рис. 1 представлен эскиз одновитковой обмотки с током, рассматриваемый в качестве расчетной системы, которая предназначена для создания в т. А на некотором расстоянии x_0 по оси симметрии от плоскости витка магнитного поля напряженности H

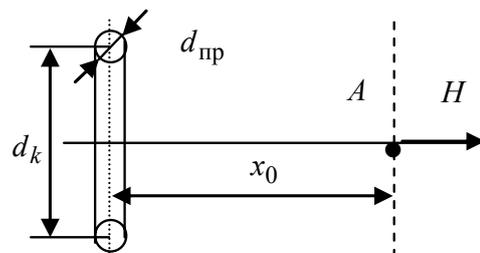


Рис. 1. Характерные геометрические размеры одновитковой обмотки

Для этой расчетной системы имеем следующие ее параметры: $d_{пр}$ – диаметр провода витка; r_k – радиус витка по его средней линии; U – напряжение источника постоянного тока, приложенное к витку; i – постоянный ток витка; R_k – активное электрическое сопротивление витка.

Очевидно, что численные значения этих параметров не могут быть произвольными, а должны быть такими, чтобы удовлетворить уравнениям, которыми описываются физические процессы в рассматриваемой системе: распределение магнитного поля в пространстве вокруг витка; протекание тока по витку, сопровождаемое процессом нагрева и охлаждения витка. При этом из известного описания распределения магнитного поля в пространстве вокруг витка можно записать следующее уравнение для напряженности H в т. А на некотором расстоянии x_0 по оси симметрии от плоскости витка [4]

$$H = \frac{1}{2} \cdot i \cdot \frac{r_k^2}{(x_0^2 + r_k^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

Процесс же протекания тока по витку описывается уравнением закона Ома

$$i = U / R_k,$$

которое, с учетом представления сопротивления витка как сопротивления цилиндрического проводника в виде (здесь ρ – постоянное удельное сопротивление материала витка)

$$R_k = \rho \cdot \frac{2\pi \cdot r_k}{\left(\frac{\pi d_{\text{пр}}^2}{4}\right)} = 8\rho \cdot \frac{r_k}{d_{\text{пр}}^2}, \quad (2)$$

может быть записано в виде

$$i = U \cdot d_{\text{пр}}^2 / (4\rho \cdot d_k). \quad (3)$$

Что же касается процесса нагрева и охлаждения витка, то считаем, что этот процесс происходит в условии установившегося теплового равновесия, когда количество выделившегося джоулева тепла, характеризуемое мощностью тепловыделения $P_i = i^2 \cdot R_k$ (или $P_i = U^2 / R_k$), равняется количеству тепла, отводимому с поверхности витка при охлаждении (характеризуется мощностью теплоотдачи P_0). То есть, принимаем, что в рассматриваемом случае имеет место тепловое равновесие, описываемое равенством соответствующих мощностей

$$P_i = P_0. \quad (4)$$

Принимаем также, что мощность теплоотдачи с поверхности витка P_0 может быть определена [5] как произведение q – удельная мощность теплоотдачи с единицы поверхности охлаждения, на площадь поверхности провода витка – поверхность охлаждения (равна $2\pi^2 d_{\text{пр}} \cdot r_k$). Это позволяет, с учетом (2), переписать после несложных преобразований уравнение теплового равновесия (4) к следующему виду

$$i^2 \cdot 4\rho = q \cdot \pi^2 \cdot d_{\text{пр}}^3. \quad (5)$$

Таким образом, согласно тому, что изложено выше, имеем пять параметров рассматриваемой системы – одновитковая обмотка ($d_{\text{пр}}$, r_k , U , i , R_k), которые связаны между собой четырьмя уравнениями (1)-(3) и (5). Это означает, что, если какой-либо один параметр из указанных будет задан, то остальные четыре параметра могут быть определены из решения уравнений (1)-(3) и (5). Эти уравнения представляющих в таком случае систему уравнений, имеющую однозначное решение (расстояние x_0 и напряженность H должны быть при этом заданы).

Такая возможность произвольного задания значения какого-либо параметра и порождает ситуацию наличия некоторого множества возможных вариантов рассматриваемой системы, позволяющих создать на заданном расстоянии заданное значение напряженности. Указанной вариантности как раз можно избежать, если наложить на параметры рассматриваемой системы дополнительное условие – получение экстремума определенного критерия оптимизации. В этом случае запись критерия через параметры системы позволяет получить еще одно уравнение для параметров системы, которое и дает однозначный вариант окончательного набора значений параметров.

В частности, возможны следующие оптимизационные задачи: минимизация потребляемой энергии; минимизация веса материала витка. Их анализ и был задачей, решение которой приведено ниже.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СВЯЗИ

Учтем, что сопротивление R_k однозначно определяется по (2) через параметры $d_{\text{пр}}$ и r_k . Также учтем, что ток i при заданном напряжении U тоже однозначно определяется этими параметрами ($d_{\text{пр}}$ и r_k). Тогда, опустив уравнение (2) и подставив (3) в (1) и (5), количество уравнений (1)-(3) и (5), которыми параметры рассматриваемой системы связаны между собой, можно уменьшить до двух, уменьшив до трех и число рассматриваемых параметров. А именно, если рассматривать только параметры $d_{\text{пр}}$, d_k и U , то для них можно записать в результате несложных преобразований уравнений (1) и (5), после подстановки в них i из (3), следующую систему уравнений

$$\begin{cases} H = \frac{1}{16} \cdot \frac{U}{\rho} \cdot \frac{r_k \cdot d_{\text{пр}}^2}{(x_0^2 + r_k^2)^{3/2}}; \\ \frac{U^2}{\rho} = 16 \cdot q \cdot \pi^2 \cdot \frac{r_k^2}{d_{\text{пр}}} \end{cases}, \quad (6)$$

которая является системой уравнений связи между параметрами при решении указанных оптимизационных задач.

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ ПОТРЕБЛЯЕМОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

Формулировка задачи: требуется определить численные значения параметров U , $d_{\text{пр}}$ и r_k одновитковой обмотки, которые позволяют создать на заданном расстоянии x_0 по оси симметрии от плоскости витка магнитное поле напряженности H при минимуме потребляемой электроэнергии.

Поскольку потребляемая электроэнергия определяется произведением $P = U \cdot i$, то, учитывая соотношение (3), функцию цели для сформулированной задачи оптимизации можно представить как

$$P = \frac{U^2}{8\rho} \cdot \frac{d_{\text{пр}}^2}{r_k}. \quad (7)$$

Параметры U , $d_{\text{пр}}$ и r_k , позволяющие получить минимум этой функции с учетом связи этих параметров, задаваемой системой уравнений (6), и будут решением сформулированной оптимизационной задачи.

Наличие двух уравнений связи (ограничений) между тремя параметрами, входящими в функцию цели (7) означает, что эта функция цели может быть представлена как функция одного параметра (в принципе, любого из трех параметров U , $d_{\text{пр}}$ или r_k).

Такая возможность представления функции цели как функции одного параметра позволяет относительно легко определить ее экстремум и решить тем самым задачу оптимизации.

С этой целью, выразив из второго уравнения в системе (6) напряжение U

$$U = 4 \cdot \pi \sqrt{\rho \cdot q} \cdot \frac{r_k}{\sqrt{d_{\text{пр}}}}, \quad (8)$$

и, подставив полученное в первое уравнение этой системы, решим его относительно параметра $d_{\text{пр}}$, что дает соотношение

$$d_{\text{пр}} = \left(\frac{16}{\pi^2} \cdot H^2 \cdot \frac{\rho}{q} \right)^{1/3} \cdot \frac{x_0^2 + r_k^2}{r_k^{4/3}}. \quad (9)$$

В результате, подставив (8) в функцию цели (7), а затем, подставив в полученное (9), несложно получить для функции цели ее представление в виде функции одной переменной (а именно – r_k)

$$P = \left[2\pi^2 \cdot q^{2/3} \cdot \left(\frac{16}{\pi^2} \cdot H^2 \cdot \rho \right)^{1/3} \right] \cdot \frac{x_0^2 + r_k^2}{r_k^{1/3}}. \quad (10)$$

При этом, учитывая, что в полученном выражении (10) для функции цели множитель в квадратных скобках является постоянным для решаемой задачи, поиск минимума должен осуществляться для функции

$$f_1(r_k) = \frac{x_0^2 + r_k^2}{r_k^{1/3}}. \quad (11)$$

Используя стандартный прием (взятие производной по r_k , приравнивание ее нулю и решение полученного уравнения относительно r_k) несложно получить, что функция (11) имеет единственный экстремум при

$$r_k = x_0 / \sqrt{5}, \quad (12)$$

и этот экстремум является минимумом.

Таким образом, приведенное решение задачи на минимизацию потребления электроэнергии одновитковой обмоткой, создающей заданное значение напряженности магнитного поля на заданном расстоянии, позволяет записать, после подстановки (12) в (9), а полученного результата – в (8), следующие соотношения для этой оптимизационной задачи

$$\begin{cases} r_k = 0.447 \cdot x_0, \\ d_{\text{пр}} = 12.057 \cdot H^{2/3} \cdot \rho^{1/3} \cdot q^{-1/3} \cdot x_0^{2/3}, \\ U = 0.7234 \cdot H^{-1/3} \cdot \rho^{1/3} \cdot q^{2/3} \cdot x_0^{2/3}. \end{cases} \quad (13)$$

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ МАССЫ МАТЕРИАЛА ВИТКА

Формулировка задачи: требуется определить численные значения параметров U , $d_{\text{пр}}$ и r_k одновитковой обмотки, которые позволяют создать на заданном расстоянии x_0 по оси симметрии от плоскости витка магнитное поле напряженности H при минимальной массе витка.

Если обозначить плотность материала витка γ , то масса витка может быть определена как произведение γ на объем витка, который, очевидно, равен

$$0.25 \cdot \pi \cdot d_{\text{пр}}^2 \cdot 2\pi \cdot r_k = 0.5 \cdot \pi^2 \cdot d_{\text{пр}}^2 \cdot r_k,$$

что позволяет записать для сформулированной задачи оптимизации функцию цели в виде (здесь M – масса материала витка)

$$M = \gamma \cdot 0.5 \cdot \pi^2 \cdot d_{\text{пр}}^2 \cdot r_k. \quad (14)$$

Как и для предыдущей оптимизационной задачи, эту функцию цели можно представить как функцию одной переменной (а именно – r_k), для чего следует подставить (9) в (14), что дает

$$M = \left[\gamma \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \left(\frac{16}{\pi^2} \cdot H^2 \cdot \frac{\rho}{q} \right)^{2/3} \right] \cdot \frac{(x_0^2 + r_k^2)^2}{r_k^{5/3}}. \quad (15)$$

Тогда, учитывая, что в (15) множитель в квадратных скобках является постоянным для решаемой задачи, получаем, что поиск минимума в данном случае должен осуществляться для функции

$$f_2(r_k) = \frac{(x_0^2 + r_k^2)^2}{r_k^{5/3}}. \quad (16)$$

Далее, используя опять стандартный прием поиска экстремума функции одной переменной, несложно получить, что функция (16) имеет единственный экстремум при $r_k = \sqrt{\frac{5}{7}} \cdot x_0$, и этот экстремум является тоже минимумом. Подстановка найденного значения оптимального радиуса r_k в (9), а полученного результата – в (8), позволяет записать для задачи на минимизацию массы одновитковой обмоткой, создающей заданное значение напряженности магнитного поля на заданном расстоянии, следующие соотношения

$$\begin{cases} r_k = 0.845 \cdot x_0, \\ d_{\text{пр}} = 2.521 \cdot H^{2/3} \cdot \rho^{1/3} \cdot q^{-1/3} \cdot x_0^{2/3}, \\ U = 6.685 \cdot H^{-1/3} \cdot \rho^{1/3} \cdot q^{2/3} \cdot x_0^{2/3}. \end{cases} \quad (17)$$

АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Следующий ниже анализ касается ограничения на область существования полученных решений оптимизационных задач для начальных условий этих задач (расстояние x_0 и напряженность H).

Эти ограничения связаны с тем, что для рассматриваемой системы имеет место ограничение на геометрические параметры $d_{\text{пр}}$ и r_k , связанное с геометрией витка, согласно которой всегда должно выполняться неравенство

$$2 \cdot r_k > d_{\text{пр}}. \quad (18)$$

Этому неравенству, очевидно, должны удовлетворять и полученные решения (13) и (17) рассмотренных выше оптимизационных задач.

Так, для задачи минимизации потребляемой витком электроэнергии подстановка в (18) соотношений из (13), после несложных преобразований, дает следующее неравенство

$$x_0 > \frac{5 \cdot 16 \cdot 3^3}{\pi^2} \cdot \frac{\rho}{q} \cdot H^2, \quad (19)$$

или

$$H < 0.0676 \cdot \sqrt{x_0 \cdot \frac{q}{\rho}}.$$

То есть решение указанной оптимизационной задачи является возможным, если ее исходные данные (расстояние x_0 и напряженность H) удовлетворяют неравенствам (19), которое и определяет область существования полученных решений этой задачи. А именно: если задана напряженность поля H , то первое неравенство (19) определяет допустимые значения расстояния x_0 ; если же задано расстояние x_0 , то второе неравенство (19) определяет допустимые значения напряженности поля H .

Аналогично, для задачи минимизации массы материала витка подстановка в (18) радиуса r_k и диаметра $d_{пр}$ из (17), после несложных преобразований, дает неравенство

$$x_0 > \frac{32 \cdot 715}{\pi^2} \cdot \frac{\rho}{q} \cdot H^2, \quad (20)$$

или

$$H < 0.549 \cdot \sqrt{x_0 \cdot \frac{q}{\rho}}.$$

Причем, как и в предыдущем случае, неравенства (20) определяют область существования полученных решений соответствующей задачи для ее начальных условий (расстояние x_0 и напряженность H).

Согласно (19) и (20) допустимый диапазон области существования решений соответствующих оптимизационных задач определяется физическими условиями процесса протекания электрического тока (характеризуется удельным сопротивлением ρ) и процесса отвода тепла от витка (характеризуется удельной мощностью теплоотдачи q). В частности, чем меньше удельное сопротивление ρ и больше удельная мощность q , тем больше допустимый диапазон области существования решений рассмотренных оптимизационных задач. Практически это означает, что известная тенденция повысить теплоотдачу с поверхности электротехнических устройств позволяет не только повысить энергетические показатели этих устройств, но и дает возможность оптимизации этих показателей за счет расширения диапазона существования решений соответствующих оптимизационных задач.

В заключение заметим, что в связи с ограничением для напряженности магнитного поля как исходного параметра рассмотренных оптимизационных

задач, возникает вопрос о возможности создания одновитковой обмоткой максимума напряженности на некотором расстоянии от витка, имеющего определенные размеры. Так, например, если заданы диаметр $d_{пр}$ и радиус r_k , то максимум напряженности будет соответствовать максимально возможному напряжению U , при котором выполняется еще условие теплового равновесия. Анализ таких и других задач, позволяющий расширить понимание оптимизационных задач для электромагнитных систем, можно рассматривать, наряду с рассмотрением многовитковых обмоток, как следующий этап развития исследований, результаты которых приведены в данной работе.

ВЫВОДЫ

1. Электромагнитная система в виде одновитковой обмотки является такой системой, задание численного значения одного из параметров которой однозначно определяет остальные параметры, поскольку число параметров на одно больше числа уравнений, связывающих эти параметры между собой.

2. Оптимизационные задачи для электромагнитной системы в виде одновитковой обмотки сводятся к задачам на экстремум функции одной переменной.

3. Оптимизационные задачи для электромагнитной системы в виде одновитковой обмотки имеют ограничения на исходные данные, определяемые проводимостью материала витка и его способностью к теплоотдаче.

4. Интенсификация теплоотдачи электромагнитных систем дает возможность оптимизации их энергетических показателей за счет расширения диапазона существования решений соответствующих оптимизационных задач.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Клименко Б.В. Форсированные электромагнитные системы. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 160 с.
- [2] Макарычев Ю.М., Рыжов С.Ю., Жидарева Т.П. Проектирование электромагнитов: этапы, методы, модели // Электричество. – 1994. – №2. – С. 46-51.
- [3] Любчик М.А. Оптимальное проектирование силовых электромагнитных механизмов. – М.: Энергия, 1974. – 392 с.
- [4] Ахиезер А.И. Общая физика. Электрические и магнитные явления. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1982. – 472 с.
- [5] Теория электрических аппаратов / Г.Н. Александров, В.В. Борисов, В.Л. Иванов и др.; Под ред. проф. Г.Н. Александрова. – М.: Высш. шк., 1985. – 312 с.

Поступила 30.08.2006