

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ БАГАТОМАСОВОЇ СИСТЕМИ З АСИНХРОННИМ ПРИВОДОМ

Чабан А., к.т.н.

Національний університет "Львівська політехніка", каф. теоретичної та загальної електротехніки, Україна, 79013, вул. Ст. Бандери, 12

*Запропоновано метод аналізу коливних процесів багатомасової системи асинхронного електроприводу у фазних координатах. Також показано новий підхід до формування математичної моделі крутильних коливаний системи з глибокопазним приводним асинхронним двигателем. Диференціальні рівняння моделі представлені в нормальній формі Коші. Результати комп'ютерної симуляції використовуються для аналізу кутової швидкості обертання асинхронної машини та пружних моментів, які виникають у муфтових з'єднаннях валопроводів електроприводу.*

*Предложен метод анализа колебательных процессов многомассовой системы асинхронного электропривода в фазных координатах. Также предложен иной подход к формированию математической модели крутящихся колебаний системы с глубокопазным приводным асинхронным двигателем. Дифференциальные уравнения модели представлены в нормальной форме Коши. Результаты расчета на ЭВМ использовались для анализа угловой скорости машины и упругих моментов, возникающих в муфтовых соединениях валопроводов электропривода.*

### ВСТУП

Аналіз математичних моделей електроприводів є чи не одна з найосновніших проблем електромеханіки. Цілком зрозуміло, що описати такі моделі можливо лише поєднанням електричної та механічної частини системи. У цій роботі розглядаються крутильні коливні процеси в асинхронному електроприводі багатомасової системи, де окремі ланки зв'язані між собою через пружну муфту. Математична модель асинхронного електропривода представлена рівняннями електромагнітних кіл для статора й ротора, і рівняннями електромагнітного поля для стрижнів білячої клітки ротора мотора, а також рівняннями руху, представлені на основі фундаментальних законів аналітичної механіки. Модель представлена у фазній системі координат, що дає змогу повноцінно розглядати крутильні коливні процеси багатомасової системи.

Для доведення актуальності проблеми розглянемо простий приклад. В електромашинних системах досить часто обриваються болти та шпильки муфтових з'єднань. Причому ці болти розраховані на багаторазне навантаження. А причина досить проста. Попадають у резонанс власні частоти багатомасових систем та збудовальні частоти напруги живлення мотора. У результаті виникають досить великі пружні моменти, які саме й спричиняють ці процеси. Зрозуміло, що розрахунок пружних моментів є невід'ємною частиною аналізу моделей електроприводів.

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ

Як було сказано вище, математична модель системи складається з глибокопазного асинхронного мотора, який через пружну муфту з'єднаний з активним моментом навантаження. Момент інерції навантаження заданий та незмінний, а також задані коефіцієнти дисипації теплової енергії. Коефіцієнти пружності визначаються, у залежності від жорсткості муфти. Математичну модель глибокопазного мотора представимо так [2]:

$$\frac{d\Psi_S}{dt} = u_S - R_S \cdot i_S, \quad \frac{d\Psi_R}{dt} = u_R - R_{RL} \cdot i_R; \quad (1)$$

$$\Psi_S = \alpha_S^{-1} i_S + \psi_S, \quad \Psi_R = \alpha_{RL}^{-1} i_R + \psi_R, \quad (2)$$

де  $S$  і  $R$  – індекси приналежності до статора й ротора, відповідно;  $\Psi_S, \Psi_R$  – вектор-стовпці повних потокозчеплень статора й ротора, відповідно;  $R_S, R_{RL}$  – матриця опорів обмоток статора й опорів лобових частин фаз ротора, відповідно;  $i_S, i_R$  – вектор-стовпці струмів фаз статора й ротора, відповідно;  $u_S$  – вектор-стовпець фазних напруг статора;  $u_R$  – вектор-стовпець напруг на стрижнях білячої клітки обмотки ротора;  $\psi_S, \psi_R$  – вектор-стовпці основних (робочих) потокозчеплень статора й ротора, відповідно;  $\alpha_S, \alpha_{RL}$  – матриця обернених індуктивностей розсіяння обмоток фаз статора й лобових частин обмоток фаз ротора, відповідно.

Запишемо вираз для обчислення модуля просторового вектора струму намагнічування мотора [2]:

$$i_m = 2\sqrt{(i_A^2 + i_A \cdot i_B + i_B^2)}/3, \quad i_m = \tau \cdot \psi_m \quad (3)$$

$$\tau = \left( \frac{\psi_m(i_m)}{i_m} \right)^{-1}, \quad \rho = \left( \frac{\partial \psi_m(i_m)}{\partial i_m} \right)^{-1} = \tau^\rho \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} i_A & i_B \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} i_{SA} & i_{SB} \end{bmatrix}^T + \Pi \begin{bmatrix} i_{RA} & i_{RB} \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

де  $A$  і  $B$  – індекси фаз живлення мотора;  $\psi_m(i_m)$  – основне потокозчеплення машини;  $\tau, \rho$  – статична та диференціальна основні обернені індуктивності машини.

$$\Psi_S = \Psi = \Pi \Psi_R, \quad \Psi_R = \Pi^{-1} \Psi_S, \quad \Psi = \tau(i_S + \Pi i_R), \quad (6)$$

де  $\Psi$  – вектор-стовпець основних потокозчеплень машини.

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin(\gamma + 2\pi/3) & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & -\sin(\gamma - 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\Pi^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sin(\gamma - 2\pi/3) & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \sin(\gamma + 2\pi/3) \end{bmatrix}$$

де  $\gamma$  – електричний кут повороту ротора мотора.

Запишемо  $A$  – модель асинхронної машини з урахуванням скін-ефекту в стрижнях ротора [2]:

$$\frac{di_S}{dt} = A_S(u_S - R_S i_S) + A_{SR} \Pi(-u_R - \Omega \cdot \Psi_R - R_{RL} i_R),$$

$$\frac{di_R}{dt} = \Pi^{-1} A_{RS}(u_S - R_S i_S) + \Pi^{-1} A_R \Pi(-u_R - \Omega \Psi_R - R_{RL} i_R) + \Omega i_R, \quad (8)$$

$$\text{де } \Omega = \Pi \frac{d\Pi^{-1}}{dt} = -\Pi^{-1} \frac{d\Pi}{dt} = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\omega$  – електрична кутова швидкість обертання ротора мотора,

$$A_S = \alpha_S(1 - \alpha_S G), \quad A_{SR} = A_{RS} = \alpha_S \alpha_{RL} G, \quad A_R = \alpha_{RL}(1 - \alpha_{RL} G) \quad (10)$$

$$i = i_S + \Pi i_R, \quad R = 1/(\alpha_S + \alpha_{RL} + \rho), \quad T = 1/(\alpha_S + \alpha_{RL} + \tau) \quad (11)$$

$$G = \begin{bmatrix} T + b_A \cdot i_A & b_B \cdot i_A \\ b_A \cdot i_B & T + b_B \cdot i_B \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{де } b = \frac{2}{3} \cdot \frac{R - T}{i_m^2}, \quad b_A = b \cdot (2i_A + i_B),$$

$$b_B = b \cdot (2i_B + i_A). \quad (13)$$

Напругу на стрижнях ротора  $u_R$  знаходимо з рівнянь Максвелла. Запишемо їх:

$$\text{rot } \vec{H} \equiv \nabla \times \vec{H} = \gamma \vec{E} \quad (14)$$

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (15)$$

Для спрощення задачі розглянемо прямокутний паз. Тоді, зорієнтувавши відповідно Декартові координати, задачу можемо звести до одновимірної. Просторову координату  $z$  направимо по глибині паза, координату  $x$  направимо за напрямком протікання струму в стрижнях ротора, а координата  $y$  буде направлена перпендикулярно до стінок паза в напрямку, який утворює правосторонню декартову систему координат. Тоді, урахувавши вищесказане, отримаємо:

$$\vec{H} = \vec{y}_0 H, \quad \vec{E} = \vec{x}_0 E \quad (16)$$

розв'яжемо сумісно (14) і (15) та представимо їх за умови (16) у скалярній формі:

$$\frac{\partial H_A}{\partial t} = \frac{v}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 H_A}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial H_B}{\partial t} = \frac{v}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 H_B}{\partial z^2}; \quad (17)$$

$$E = -\frac{k_u k_i}{\gamma} \cdot \frac{\partial H}{\partial z}, \quad v = \frac{1}{\mu}; \quad (18)$$

де  $\mu, \gamma$  – магнітна проникність та питома електрична провідність алюмінію (струмопроводу);  $k_u, k_i$  – коефіцієнти трансформації машини за напругою та струмом, відповідно.

Крайові умови першого роду знаходимо за законом повного струму. Контур інтегрування проходить по поверхні паза, сусідньому зубці ротора, далі проходить по дну паза та через зубець з протилежної сторони паза повертається на поверхню самого паза. Запишемо це:

$$H_A(0) = \frac{i_{RA}}{a}, \quad H_B(0) = \frac{i_{RB}}{a},$$

$$H_A(h) = H_B(h) = 0 \quad (19)$$

де  $a$  – ширина паза ротора за координатою  $y$ ;  $h$  – глибина паза за координатою  $z$ .

Дискретизуючи (17) за просторовою координатою  $z$  за методом скінчених різниць, отримаємо:

$$\frac{dH_{Ai}}{dt} = \frac{v}{\gamma(\Delta z)^2} (H_{Ai-1} - 2H_{Ai} + H_{Ai+1}); \quad (20)$$

$$\frac{dH_{Bi}}{dt} = \frac{v}{\gamma(\Delta z)^2} (H_{Bi-1} - 2H_{Bi} + H_{Bi+1}), \quad (21)$$

де  $\Delta z$  – число вузлів просторової сітки дискретизації;  $i = 1, 2, \dots, m-1$ ,  $\Delta z = h/(m-1)$ .

Для достатньо точного розрахунку  $m \geq 10$ . Тоді на підставі теореми про поверхню паза запишемо[1]:

$$u_R = E(0) \cdot l, \quad (22)$$

де  $E(0)$  – напруженість електричного поля на поверхні паза білячої клітки ротора;  $l$  – довжина паза за координатою  $x$ .

Аналізуючи сказане вище та розв'язуючи сумісно (17) та (22) запишемо дискретні рівняння для знаходження спаду напруги на стрижнях ротора:

$$u_{RA} = \frac{k_u k_i}{2\gamma} l (-3H_{A1} + 4H_{A2} - H_{A3}); \quad (23)$$

$$u_{RB} = \frac{k_u k_i}{2\gamma} l (-3H_{B1} + 4H_{B2} - H_{B3}); \quad (24)$$

Доповнимо систему рівнянь електромагнітного стану рівняннями руху електроприводу, записаними на основі рівнянь Лагранжа другого роду. Причому ротор машини вважався абсолютно жорстким тілом [4]:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{J_1} (M_E - c(\gamma_1 - \gamma_2) - v'(\omega_1 - \omega_2)) \quad (25)$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{-1}{J_2} (M(\omega) + c(\gamma_1 - \gamma_2) + v'(\omega_2 - \omega_1)) \quad (26)$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \omega_1, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \omega_2 \quad (27)$$

$$M_E = \sqrt{3} p_0 (i_{RA}^{\Pi} i_{SB}^{\Pi} - i_{RB}^{\Pi} i_{SA}^{\Pi}) / \tau, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} i_{RA}^{\Pi} & i_{RB}^{\Pi} \end{bmatrix}^T = \Pi \begin{bmatrix} i_{RA} & i_{RB} \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

де  $\omega = p_0 \cdot \omega_1$ ,  $\gamma = p_0 \cdot \gamma_1$ ;  $p_0$  – число пар магнітних полюсів статора;  $J_1$  – момент інерції ротора мотора;  $J_2$  – момент інерції приводного механізму;  $M(\omega)$  – момент навантаження мотора;  $\omega_1$  – механічна кутова швидкість обертання ротора;  $\omega_2$  – механічна кутова швидкість обертання приводного механізму;  $\gamma_1$  – кут повороту ротора мотора;  $\gamma_2$  – кут повороту приводного механізму;  $c$  – коефіцієнт жорсткості пружних зв'язків;  $v'$  – коефіцієнт дисипації теплової енергії.

Таким чином сумісному інтегруванню підлягає система диференціальних рівнянь (8)–(13), (20)–(29). Причому система диференціальних рівнянь представлена в нормальній формі Коші. На кожному часовому кроці знаходимо напругу ротора за (23), (24) та підставляємо в систему (8)–(13). Рівняння стану є жорсткими, тому інтегрування здійснювались неявними методами [3].

## РЕЗУЛЬТАТИ КОМП'ЮТЕРНОЇ СИМУЛЯЦІЇ

Для дослідження запропоновано реальний електропривод з активним моментом на валу ротора. Тип двигуна А 12-52-8А ( $P_H = 320$  кВт,  $U_H = 6$  кВ,  $I_H = 39$  А,  $\omega_H = 740$  об/хв): та параметри машини:  $R_S = 1,27$  Ом,  $R_{RL} = 0,21$  Ом,  $\alpha_S = 38$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_R = 35,7$  Гн,  $p_0 = 4$ ,  $J_1 = 49$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_2 = 130$  кг·м<sup>2</sup>,  $M(\omega) = const = 4000$  Нм.  $h = 0,038$  м,  $l = 0,23$  м,  $a = 0,005$  м – розміри паза мотора.

Коефіцієнт жорсткості пружних зв'язків муфтового з'єднання визначається за формулою [1]:

$$\omega_0 = \sqrt{c \cdot \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}, \quad (30)$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (31)$$

де  $\omega_0$  – колова частота власних механічних коливань системи;  $f_0$  – механічна частота власних коливань системи.

Представимо графіки пружних моментів для різних механічних частот власних коливань системи, тобто для різних коефіцієнтів пружності та дисипації, а також графіки кутової швидкості ротора глибокопазного мотора при цих же частотах системи.

## ВИСНОВКИ

Аналізуючи графіки пружних моментів та кутових швидкостей обертання ротора машини при різних власних частотах коливань системи, приходимо до висновку, що характер протікання коливних процесів у валопроводах електроприводу суттєво залежить від цих частот. Тобто від жорсткості муфти з'єднань (30).

На рис. 1 та рис. 2 відтворено характер коливного процесу в електроприводі при власній частоті системи  $f_0 = 15$  Гц. Як бачимо з рисунків пружні моменти сягають відносно невеликих значень до 12 кНм. Причому як при навантаженій машині, так і при ненавантаженій (до маховика приводного механізму не під'єднувався активний момент) пружні моменти мало відрізнялись за максимальним значенням. Зрозуміло, що картини коливного процесу дещо відрізняється одна від одної. Ці процеси пов'язані з моментом навантаження мотора та часом перехідного процесу пуску мотора.

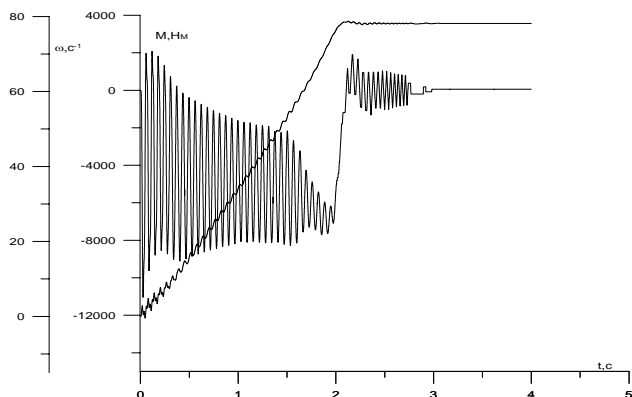


Рис. 1. Кутова швидкість ротора асинхронного мотора та пружний момент у валопроводі електроприводу при власній частоті коливань системи  $f_0 = 15$  Гц. При  $M(\omega) = 0$  Нм

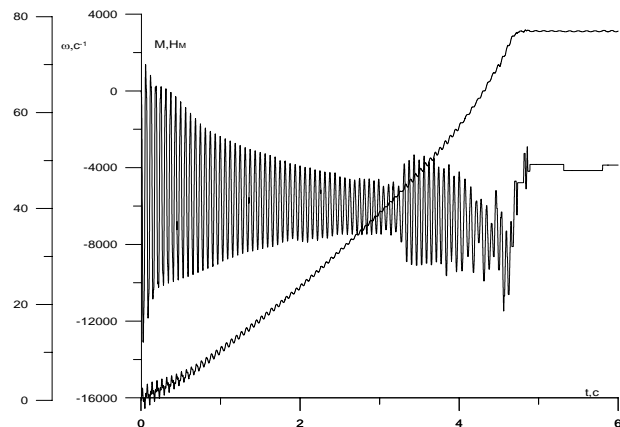


Рис. 2. Кутова швидкість ротора асинхронного мотора та пружний момент у валопроводі електроприводу при власній частоті коливань системи  $f_0 = 15$  Гц. При  $M(\omega) = 4000$  Нм

На рис. 3–5 представлені кутові швидкості ротора мотора та пружні моменти, що виникають у валопроводах електроприводу при частотах близьких до резонансних  $f_0 = 40$  і  $60$  Гц. Як бачимо з рисунків ситуація дещо відрізняється від попередньої. По-перше суттєво зросли пружні моменти (до  $40$  кНм). По-друге змінився характер розгону мотора. По-третє в кривих моментів та розгону мотора виникли додаткові флуктуації під час пуску. Цей процес називається биттям коливань. Явище биття негативно впливає на роботу електроприводу (особливо при частих пусках та самозапущах моторів). Зрозуміло, що при битті різко змінюється пружний момент, і, як наслідок, розхитуються болтові з'єднання пружних муфт. Це приводить до послаблення різбових кріплень, та до зрізування самих болтів та шпильок. Аналізуючи графіки рис. 4 та рис. 5, легко бачити різницю між процесами, що виникають у електроприводі з активним моментом на валу та в ненавантаженому електроприводі. Максимальне значення моменту навантаженого приводу (рис. 5) майже в два рази більше, ніж ненавантаженого (рис. 4). Крім того, після розгону мотора (рис. 5) пружний момент не зразу приймає постійне значення, що приводить до коливання швидкості електроприводу деякий час після пуску приводного мотора. Тобто биття коливань суттєво впливає на роботу як самого мотора так і приводного механізму. Для усунення цього процесу необхідно змінити власну частоту коливань системи (змінити частоту зовнішніх збурень тобто частоту напруги живлення мотора практично неможливо при нерегульованому джерелі живлення). Є два варіанти зміни частоти власних коливань або змінити момент інерції приводного механізму, або замінити з'єднувальну муфту. Найбільш реальний підхід, це замінити муфту (муфту іншої жорсткості). *Зауважимо, що процес биття електромеханічних коливань аналітично досліджено вперше.*

На рис. 6 та рис. 7 відтворено найбільш небезпечний режим роботи електроприводу, навіть можна сказати, аварійний режим роботи приводу. Аналізуючи рисунки приходимо до висновку, що при резонансних частотах  $f_0 = 48,5$  Гц, процеси в електроприводі досить непередбачені. По-перше максимальне значення пружного моменту досягає величезних значень (понад  $200$  кНм). По-друге швидкість при розгоні електроприводу зазнає значних коливань, що негати-

вно впливає як на сам мотор, так і на приводний механізм. Аналізуючи роботу електроприводу під навантаженням та без навантаження, можемо заключити, що в обох випадках ситуація небезпечна для системи.

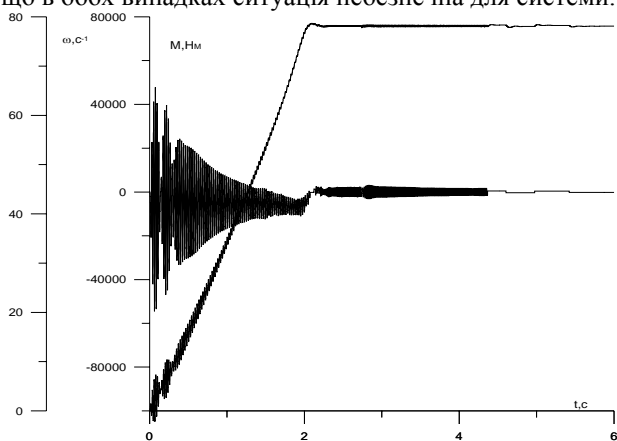


Рис. 3. Кутова швидкість ротора асинхронного мотора та пружний момент у валопроводі електроприводу при власній частоті коливань системи  $f_0 = 40$  Гц. При  $M(\omega) = 0$  Нм

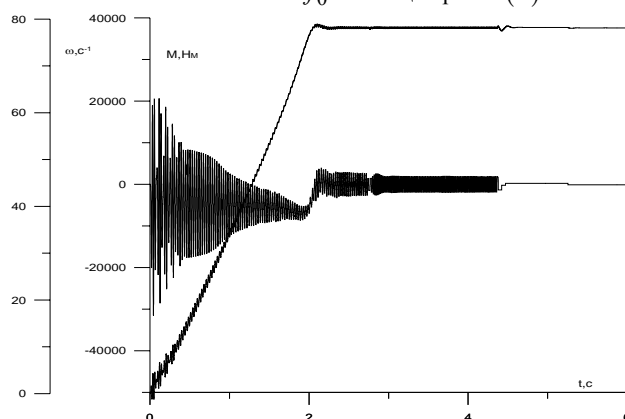


Рис. 4. Кутова швидкість ротора асинхронного мотора та пружний момент у валопроводі електроприводу при власній частоті коливань системи  $f_0 = 60$  Гц. При  $M(\omega) = 0$  Нм

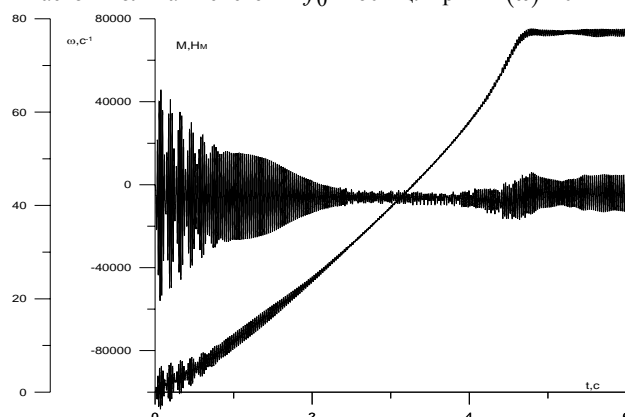


Рис. 5. Кутова швидкість ротора асинхронного мотора та пружний момент у валопроводі електроприводу при власній частоті коливань системи  $f_0 = 60$  Гц. При  $M(\omega) = 4000$  Нм

Тепер постає зрозумілим факт обриву болтових з'єднань пружних муфт, про який згадувалось у вступі. Зауважимо, що проблема крутильних коливань постає досить суттєво в регульованих електроприводах (частотне регулювання швидкості асинхронного й синхронного моторів). При плавній зміні частоти напруги живлення мотора є імовірність попасти в резо-

нансні частоти або близькі до резонансних. Тому при моделюванні електроприводу необхідно відтворювати практично всі режими роботи приводу на математичній моделі електромеханічного пристрою.

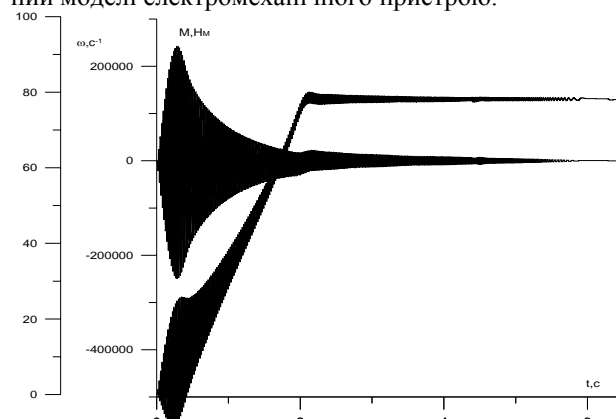


Рис. 6. Кутова швидкість ротора асинхронного мотора та пружний момент у валопроводі електроприводу при власній резонансній частоті коливань системи  $f_0 = 48,5$  Гц.

При  $M(\omega) = 0$  Нм

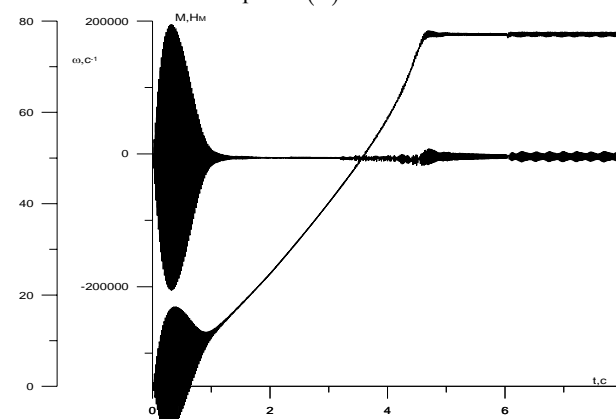


Рис. 7. Кутова швидкість ротора асинхронного мотора та пружний момент у валопроводі електроприводу при власній резонансній частоті коливань системи  $f_0 = 48,5$  Гц.

При  $M(\omega) = 4000$  Нм

Аналізуючи вищесказане, варто відмітити беззаперечний факт необхідності математичного моделювання коливних процесів у валах електроприводу. Адже неможливо прорахувати всі коливні процеси, які виникають у валопроводах на реальній моделі та визначити аварійні частоти. Тому задачі подібного типу можна розв'язати лише використовуючи математичні моделі, побудовані на основі фундаментальних законів електродинаміки та аналітичної механіки.

#### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Чабан В. Математичне моделювання електромеханічних процесів. – Львів–1997– 344 с.
- [2] Чабан А. Симуляція комутаційних перенапруг глибокопазного асинхронного мотора, що живиться через кабель.– Електротехніка і електромеханіка–2004'3. С. 61-64.
- [3] Л.О.Чуа, Пен–Мин Лин. Машинний аналіз електронних схем.–М.: Энергия, 1980.– 638 с.
- [4] В.В. Петкевич. Теоретическая механика.– М.: Наука–1981– 496 с.

Надійшла 01.09.2005