УДК 519.681

КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ З ОПЕРАТОРАМИ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ

М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк, І.А. Антонова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
E-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua, sssh@unicyb.kiev.ua, irine@unicyb.kiev.ua

Розглянуто застосування операторів побудови нерухомої та *T*-нерухомої точок для композиційно-номінативних логік різних рівнів абстракції. Оператори побудови нерухомих точок можна розглядати і як метакомпозиції, які за композиціями-аргументами будують нові композиції. Наводяться відповідні теореми щодо подання класів предикатів як ω-областей, ω-неперервності та монотонності основних композицій предикатів, існування нерухомих та *T*-нерухомих точок, замкненості класів предикатів відносно операторів нерухомої точки, та властивостей таких операторів.

Application of fixed points and *T*-fixed points operators for composition nominative logics of different abstraction levels is considered in the report. It is possible to treat fixed points operators as metacompositions which build new compositions on compositions-arguments. Corresponding theorems about representation of predicates classes as ω-domains, ω-continuity and monotonicity of the basic predicates compositions, existence of fixed points and *T*-fixed points, completeness of predicates classes concerning fixed points operators, and properties of such operators are studied.

Вступ

Композиційно-номінативні логіки (КНЛ) [1] – це логічні системи, які будуються на основі принципів розвитку, інтегрованості інтенсіонального та екстенсіонального аспектів, композиційності та номінативності. Передумовою виникнення композиційно-номінативних логік стала необхідність посилення можливостей класичної логіки для розв'язку все нових і нових задач моделювання та програмування.

Для композиційно-номінативних логік екстенсіональну модель світу можна уточнити як трійку $M=(D, Pr, C)$. Тут D – можливий світ (множина даних), елементи якого (дані) трактуються як стани світу; Pr – множина предикатів на D, предикати трактуються як властивості станів світу та відношення між ними; C – множина композицій на Pr.

З екстенсіонального погляду семантичні аспекти КНЛ можна задати композиційними алгебрами предикатів $AP=(Pr,C)$. У цьому випадку множина формул $Form$ є множиною термів алгебри AP. Так дослідження семантичних аспектів КНЛ зводиться до вивчення властивостей алгебр предикатів, які є основним поняттям КНЛ. У цьому розумінні КНЛ можна назвати аксіоматичними системами алгебр предикатів. Тому основними семантичними проблемами теорії КНЛ є 1) проблема виділення класів предикатів, які задаються на відповідному рівні абстракції в єдності їх інтенсіональних та екстенсіональних аспектів та 2) проблема експлікації класів композицій, які є адекватними відповідному рівню абстракції.

Композиційно-номінативні логіки та їх ієрархія

Побудову КНЛ починаємо з гранично абстрактних рівнів, поступово їх конкретизуючи. На пропозиційному рівні дані трактуються гранично абстрактно. На цьому рівні предикати мають вигляд $A\to\{T,F\}$, де A – множина абстрактних даних. На сингулярному рівні дані трактуються конкретно. На цьому рівні фіксується єдиний клас даних, що пояснює його назву.

Подальший розвиток приводить до класів логік, для яких рівень розгляду є синтезом двох перших рівнів. На цьому рівні дані будуються індуктивно із множин предметних імен та предметних значень. Такі дані та відповідні логіки названі номінативними. Номінативні предикати (предикати, задані на номінативних даних) називають квазіарними. Вибір класу квазіарних предикатів як семантичної основи логіки є центральним моментом в перебудові логіки в семантико-синтаксичному стилі.

Номінативний рівень дуже багатий, він розпадається на низку підрівнів. 1-рівневі однозначні номінативні дані називають іменними множинами (ІМ). На цьому рівні дані – це однозначні відображення типу $V\to A$ із множини предметних імен V у множину предметних значень A. На рівні іменних множин природним чином можна виділити реномінативний, кванторний, кванторно-екваційний, функціональний та функціонально-екваційний рівні. Дані, що допускають багатозначне іменування, називаються номінативними даними (НД).

На наступному рівні абстракції елементи множини A можна розглядати як ієрархічні номінативні дані. Відповідні логіки названі логіками номінативних даних (ЛНД). На основі ЛНД визначається клас багатозначних натурально (абстрактно) обчислюваних функцій над НД. Цей клас можна подати за допомогою Σ-предикатів ЛНД [2].

Клас квазіарних предикатів дуже потужний, для логік квазіарних предикатів вже не діють деякі важливі закони класичної логіки. Тому для збереження основних властивостей класичної логіки клас квазіарних предикатів варто обмежити. Природне обмеження задається властивістю еквітонності, яка означає, що значення відображення не змінюється при розширенні даних. Друге обмеження – повнототальність – означає визначеність предиката на максимальних даних – V-повних ІМ.

Логіка повнототальних еквітонних предикатів (ПЕП) названа неокласичною, бо зберігає основні закони класичної логіки при істотному розширенні класу моделей. Для логіки ПЕП будуються аксіоматичні системи Гільбертівського типу, на їх основі доводяться теореми несуперечливості та повноти. Водночас логіка ПЕП та класична логіка не є ідентичними. Визначальною властивістю логік квазіарних предикатів, зокрема, логік ПЕП, що істотно відрізняє їх від класичної логіки, є можливість для формули бути залежною від нескінченної множини предметних імен. Логіки еквітонних предикатів (ЕП) теж зберігають основні закони класичної логіки, але для них вже не діють деякі правила виведення (modus ponens), порушуються певні властивості класичної логіки.

Узагальненням ЕП є локально-еквітонні предикати (ЛЕП). Для ЛЕП вимагається збереження значення при розширенні даних лише на скінченну кількість іменованих компонент.

Логіки, орієнтовані на такі особливості предметних областей, як невизначеність, неповнота наявної інформації, базуються на класах предикатів, визначених на даних з неповною інформацією. Такими є еквісумісні (ЕСП) та локально-еквісумісні (ЛЕСП) предикати. Еквісумісність предиката означає, що при можливості розширення різних даних (сумісність даних) до одного більшого даного, його значення на таких даних мають збігатися. При локально-еквісумісності вимагаємо збереження значень лише для розширень скінченною інформацією.

Відмова від modus ponens веде до необхідності проводити дослідження синтаксичних властивостей логік ЕП, ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП на базі не Гільбертівських, а Генценівських систем – секвенційних числень. Секвенційні числення логік ЕП, ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП ідентичні. Це засвідчує ідентичність синтаксичних властивостей логік ЕП, ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП. Водночас при переході від логік ЕП до логік ЛЕП та логік ЕСП, від логік ЛЕП та логік ЕСП до логік ЛЕСП отримуємо все ширші класи семантичних моделей.

Дослідження наведених класів предикатів проводились в рамках алгебр з традиційними композиціями, тобто тими композиціями, які відповідали пропозиційним логічним зв’язкам та кванторам, а також оператора реномінації. Разом з тим, широке використання індуктивних та рекурсивних методів визначення предикатів спонукає до дослідження композицій, що визначаються різними операторами побудови нерухомих точок (ПНТ).

Мета доповіді полягає в уточненні операторів побудови нерухомої точки та дослідженні відповідних КНЛ з такими операторами. У цьому випадку такий оператор можна розглядати і як метакомпозицію [3], яка за композиціями–аргументами будує нову композицію. Невизначені поняття та позначення розуміються у смислі [1].

Оператори побудови нерухомої точки в традиційних логіках

Існують різні оператори ПНТ. Найбільш відомим є оператор побудови найменшої нерухомої точки (least fixed point). Також використовуються оператор наповненої нерухомої точки (inflationary fixed point), оператор найбільшої нерухомої точки (greatest fixed point), та деякі інші [4].

Найчастіше нерухому точку (НТ) монотонного оператора φ розглядають в класичному розумінні, як точку x, що задовольняє рівнянню $\varphi(x) = x$ [4–6]. За теоремою Тарського у монотонного відображення (на повній гратці) завжди є найменша та найбільші нерухомі точки (див. напр. [5, 6]). Найменша НТ визначається, як перетин (інфінум) тих точок x, які не менші за $\varphi(x)$, а найбільша нерухома точка – як об’єднання (супремум) точок x, які не більші за $\varphi(x)$ [6].

Для немонотонного відображення можна побудувати наповнену нерухому точку, яка отримується шляхом взяття границі послідовності відношень, проіндексованих за ординалами [4]. Крім таких точок, А. Давар та Ю. Гуревич [4] дають визначення часткової, недетермінованої та альтернативної нерухомих точок. Ці нерухомі точки введені як варіанти наповненої НТ: часткова нерухома точка задана на скінчених структурах, недетермінована – для недетермінованих операторів, альтернативна запропонована як розширення недетермінованої НТ у випадку нескінченої кількості альтернатив і задається в термінах ігор. Такий підхід до визначення нерухомих точок індукує спеціальні методи для нерухомих точок предикатів, відмінні від загальних методів для нерухомих точок функцій.

Зупинимось на операторі побудови найменшої нерухомої точки (операторі lfp). Як відомо з теореми Кнастера–Тарського–Кліні [4], достатніми умовами існування найменшої нерухомої точки є умови ω-неперервності відображення φ та визначення його на ω-області (ω-повній частково впорядкованій множині з найменшим елементом). Ці умови виконуються для багатьох КНЛ.

Алгебри часткових предикатів

Розглянемо множину часткових предикатів, заданих на деякій множині даних *D*:

$$Pr = D \to Bool, Bool = \{F, T\}.$$

Певний клас композицій над предикатами позначимо *C*. Тоді $AP = (Pr, C)$ – алгебра предикатів. Терми алгебри предикатів можуть розглядатися як формули мови логіки.

Спочатку сформулюємо властивості класу *Pr*.

Визначення 1. Предикат *P* менший або рівний предикату *Q*, якщо графік предиката *P* є підмножиною графіка предиката *Q*:

$P \le_{Pr} Q \Leftrightarrow gr(P) \subseteq gr(Q)$,

де $P, Q : D \to Bool$,

$gr(P) \subseteq D \times Bool$ – графік предиката *P*.

Графіком предиката *P* називається множина $gr(P) = \{(d, b) \mid P(d) \downarrow = b, d \in D, b \in Bool\}$.

Відмітимо, що з умови $gr(P) \subseteq gr(Q)$ випливає, що, якщо $P(d)\downarrow$, то $Q(d) \downarrow = P(d)$.

Замість $P \le_{Pr} Q$ будемо також скорочено писати $P \le Q$.

Визначення 2. Найменшим елементом $\perp_{Pr}$ класу *Pr* покладемо всюди невизначений предикат, тобто такий предикат, графіком якого є порожня множина: $gr(\perp_{Pr}) = \{\}$.

$gr(\perp_{Pr}) = \{\} \Rightarrow \forall P \in Pr\ \{\} = gr(\perp_{Pr}) \subseteq gr(P) \overset{def}{\Rightarrow} \forall P \in Pr\ \perp_{Pr} \le P$. Отже, $\perp_{Pr}$ – найменший елемент множини предикатів *Pr*.

Лема 1. Клас предикатів *Pr* є ω-областю.

Доведення. Так як частковий порядок та найменший елемент вищевведені, залишилося перевірити, чи є *Pr* повною частково-впорядкованою множиною. Супремум ланцюга предикатів будемо визначати через об'єднання графіків предикатів цього ланцюга: $gr\left(\coprod_{i \in \omega} {}_{Pr} P_i\right) = \bigcup_{i \in \omega} gr(P_i)$.

Нехай $P_0 \le_{Pr} P_1 \le_{Pr} \ldots \le_{Pr} P_n \le_{Pr} \ldots$ – ланцюг в *Pr*. Треба довести, що $\coprod_{i \in \omega} {}_{Pr} P_i \in Pr$, тобто, що супремум ланцюга предикатів є предикатом. Це випливає з наведених визначень та теоретико-множинних властивостей графіків предикатів.

Відзначимо, що клас предикатів *Pr* є α-областю для довільного ординала α.

Крім відношення $\le_{Pr}$ в роботі використовуються відношення рівності $=_T$ прообразів *T* та часткового порядку $\le_T$. Це викликано тією обставиною, що ми будемо розглядати квазінерухомі точки, коли нерухомість стосується, наприклад, лише області істинності предиката.

Визначення 3. Два предикати *P* та *Q* *T*-рівні (рівні в області істинності), якщо вони приймають значення *T* на одних і тих самих даних:

$P =_T Q \Leftrightarrow$ (для будь-яких $d \in D$ $P(d) \downarrow = T \Leftrightarrow Q(d) \downarrow = T$).

Очевидно, що це відношення еквівалентності.

Визначення 4. Предикат *P* *T*-менший або рівний (менший або рівний в області істинності) предиката *Q*, якщо:

$P \le_T Q \Leftrightarrow (P \le Q$ та $P =_T Q)$.

Це відношення часткового порядку.

Крім традиційного визначення неперервності, будемо використовувати спеціальний варіант неперервності, орієнтований на області істинності предикатів.

Визначення 5. Відображення $\varphi : Pr \to Pr$, задане на частково-впорядкованій множині $(Pr, \le)$, – T-ω-неперервне (ω-неперервне в області істинності), якщо для будь-якого ланцюга предикатів $\{P_i\}_{i\in\omega}$ з Pr виконується нерівність:

$$\coprod_{i\in\omega} \varphi(P_i) \le_T \varphi\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right).$$

Предикат в вищезазначених визначеннях розглядається як функція, що приймає значення на множині *Bool*. Поняття порядка та ω-неперервності в області істинності для предикатів є похідним від понять порядка та ω-неперервності в деякій підмножині та всій множині результатів. Усі визначення та твердження, вищеописані для предикатів, справджуються і для функцій.

Лема 2. Нехай $(Pr, \le)$ – частково впорядкована множина (ЧВМ) предикатів та $\varphi : Pr \to Pr$ – T-ω-неперервне відображення, тоді φ – монотонне відображення.

Доведення. Нехай є ланцюг $P_1 \le_{Pr} P_2 \le_{Pr} ... \le_{Pr} P_2 \le_{Pr} ...$, всі елементи якого, крім першого P_1, дорівнюють P_2. Тоді з визначення ланцюга випливає, що

$$\coprod_{i\in\omega} \varphi(P_i) = \coprod_{i=1}^{2} \varphi(P_i) = \varphi(P_1) \amalg \varphi(P_2),$$

$$\varphi\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right) = \varphi\left(\coprod_{i=1}^{2} P_i\right) = \varphi(P_1 \amalg P_2) = \varphi(P_2).$$

З T-ω-неперервності φ випливає, що:

$$\coprod_{i\in\omega} \varphi(P_i) \le_T \varphi\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right) \Rightarrow \varphi(P_1) \amalg \varphi(P_2) \le_T \varphi(P_2) \Rightarrow \varphi(P_1) \amalg \varphi(P_2) \le \varphi(P_2) \Rightarrow \varphi(P_1) \le \varphi(P_2).$$

Поняття T-ω-неперервності та ω-неперервності зв'язані природним чином. Є очевидними наступні твердження.

Лема 3. Нехай $(Pr, \le)$ – ЧВМ предикатів та $\varphi : Pr \to Pr$ – ω-неперервне відображення, тоді φ – T-ω-неперервне відображення.

Також за T-ω-неперервним відображенням можна побудувати ω-неперервне відображення, якщо взяти його диз'юнкцію з всюди невизначеним предикатом. Дійсно, має місце наступна формула:

$$(P \vee \bot)(d) = \begin{cases} T, \text{якщо } P(d)\downarrow = T \\ \text{невизначене в усіх інших випадках } (P(d)\downarrow = F \text{ або } P(d)\uparrow). \end{cases}$$

Тому, для часткових логік диз'юнкція предиката з всюди невизначеним предикатом породжує предикат з порожньою областю хибності.

Визначення 6. Предикат $P \in Pr$ є T-нерухомою точкою відображення $\varphi : Pr \to Pr$, якщо $P \le_T \varphi(P)$.

T-нерухома точка належить до класу квазінерухомих точок. Це поняття можна трактувати як проміжне між найменшою та наповненою нерухомими точками.

Всі визначення і твердження, описані для області істинності, можна аналогічно застосувати і для області хибності, використовуючи дуальні формули. Розширення T-нерухомої точки значеннями F ("хибність") на точках області невизначеності складе одну з максимальних нерухомих точок заданого оператора. Отже, таке розширення T-нерухомої точки приводить до нерухомої точки в класичному розумінні.

Центральною теоремою про нерухому точку є теорема, яка стверджує наявність найменшого розв’язку рекурсивного рівняння, який може бути знайдений методом послідовних наближень. Ця теорема належить до розряду фольклорних ("народних") теорем. Як правило, до перших її авторів належать Кнастер, Тарський, та Кліні. Важливість теореми пов’язана з широтою її застосування.

Доведемо варіант теореми Кнастера–Тарського–Кліні для випадку T-нерухомої точки.

Теорема 1. Дана Pr – ω-область, $\varphi : Pr \to Pr$ – T-ω-неперервне відображення, задане на цій області. Тоді існує T-нерухома точка відображення φ, область істинності якої є найменшою серед областей істинності всіх T-нерухомих точок. Ця точка позначається *T-lfp* φ та задається наступною формулою:

$$T\text{-}lfp\ \varphi = \coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\bot_{Pr}),$$

де $\varphi^{(0)}(\bot_{Pr}) = \bot_{Pr}, \varphi^{(1)}(\bot_{Pr}) = \varphi(\varphi^{(0)}(\bot_{Pr})), \ldots, \varphi^{(i)}(\bot_{Pr}) = \varphi(\varphi^{(i-1)}(\bot_{Pr})), i \in \omega$.

Доведення теореми складається з трьох кроків:

1) доведення факту, що множина $\{\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})\}_{i\in\omega}$ є ланцюг (тому її супремум $\coprod_{i\in\omega}\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})$ існує);

2) доведення того, що $\coprod_{i\in\omega}\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})$ є T-нерухомою точкою φ;

3) доведення, що $\coprod_{i\in\omega}\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})$ є T-нерухомою точкою φ з найменшою областю істинності (T-найменша нерухома точка).

1) розглянемо послідовність $\bot_{Pr}, \varphi(\bot_{Pr}), \varphi(\varphi(\bot_{Pr}))\ldots$ Доведемо, що це є ланцюг методом математичної індукції.

База індукції – оскільки $\bot_{Pr}$ – найменший елемент Pr, то $\bot_{Pr} \le \varphi(\bot_{Pr})$.

Індуктивний крок. Треба довести, що з $\varphi^{(i)}(\bot_{Pr}) \le \varphi^{(i+1)}(\bot_{Pr})$ випливає $\varphi^{(i+1)}(\bot_{Pr}) \le \varphi^{(i+2)}(\bot_{Pr})$. Дійсно, за монотонністю φ маємо

$$\varphi^{(i)}(\bot_{Pr}) \le \varphi^{(i+1)}(\bot_{Pr}) \Rightarrow \varphi(\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})) \le \varphi(\varphi^{(i+1)}(\bot_{Pr})) \Rightarrow \varphi^{(i+1)}(\bot_{Pr}) \le \varphi^{(i+2)}(\bot_{Pr}).$$

Отже $\bot_{Pr}, \varphi(\bot_{Pr}), \varphi(\varphi(\bot_{Pr}))\ldots$ – ланцюг;

2) за T-ω-неперервністю φ, для будь-якого ланцюга $\{P_i\}_{i\in\omega}$ з Pr:

$$\coprod_{i\in\omega}\varphi(P_i) \le_T \varphi\left(\coprod_{i\in\omega}P_i\right) \Rightarrow \coprod_{i\in\omega}\varphi(\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})) \le_T \varphi\left(\coprod_{i\in\omega}\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})\right),$$
$$\coprod_{i\in\omega}\varphi(\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})) = \coprod_{i\in\omega}\varphi^{(i+1)}(\bot_{Pr}) = \coprod_{i\in\omega}\varphi^{(i)}(\bot_{Pr}).$$

Остання рівність випливає з того, що $\varphi^{(0)}(\bot_{Pr}) = \bot_{Pr}$ і найменший елемент не впливає на супремум.

Отже, $\coprod_{i\in\omega}\varphi^{(i)}(\bot_{Pr}) \le_T \varphi(\coprod_{i\in\omega}\varphi^{(i)}(\bot_{Pr}))$, тому $\coprod_{i\in\omega}\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})$ – T-нерухома точка φ;

3) тепер доведемо, що $\coprod_{i\in\omega}\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})$ – T-нерухома точка з найменшою областю істинності.

Для предиката P область істинності позначається P^T.

Нехай Q також T-нерухома точка, тобто $Q \le_T \varphi(Q) \Rightarrow Q \le \varphi(Q) \,\&\, Q =_T \varphi(Q)$. Оскільки $\bot_{Pr}$ – найменший елемент Pr, маємо, що $\bot_{Pr} \le Q$. За монотонністю $\varphi: \varphi(\bot_{Pr}) \le \varphi(Q) =_T Q$. Аналогічно, $\varphi^{(i)}(\bot_{Pr}) \le \varphi^{(i)}(Q) =_T Q$ для всіх $i \in \omega$. Отже, області істинності $\varphi^{(i)}(Q)$ та нерухомої точки Q збігаються, а графік $\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})$ є підмножиною графіка $\varphi^{(i)}(Q)$. Тому і області істинності $\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})$ є підмножиною області істинності $\varphi^{(i)}(Q)$, що дорівнює Q^T. Тому $\left(\coprod_{i\in\omega}\varphi^{(i)}(\bot_{Pr}))^T\right) \subseteq Q^T$. Отже, $\coprod_{i\in\omega}\varphi^{(i)}(\bot_{Pr})$ – нерухома точка з областю істинності найменшою з усіх областей істинності нерухомих точок.

Зауваження. На пропозиційному та реномінативному рівнях всі композиції (диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення та реномінації) є ω-неперервними, отже для них справедлива теорема Кнастера–Тарського–Кліні для ω-неперервних відображень. ω-неперервність порушується там, де виникають кванторні логіки. Для таких випадків і запропонований підхід визначення та побудови T-нерухомих точок.

Так продемонстровано, що, по-перше, класи різних типів предикатів (довільних, квазіарних, еквітонних, еквісумісних) утворюють ω-області для такого природного відношення часткового порядку, як включення графіків предикатів. По-друге, композиції диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення, реномінації, та інші композиції, що базуються на скінченних обчисленнях, є ω-неперервними. По-третє, композиції квантифікації, хоч і не є ω-неперервними, є монотонними, що інколи дозволяє скористатись результатами Тарського щодо монотонних операторів на повних гратках.

Далі замість $\bot_{Pr}$ будемо писати $\bot$.

Визначення 7.

1. Для деякого відображення $\varphi: Pr \to Pr$ стандартний апроксимаційний ланцюг (SAC) – це послідовність:

– $P^{(0)}(\perp) = \perp,$;
– $P^{(i+1)}(\perp) = P(P^{(i)}(\perp))$ (для ізольованого ординала i+1);
– $P^{(\gamma)}(\perp) = \coprod_{i<\gamma} P^{(i)}(\perp)$ (для граничного ординала γ).

2. α-стандартний апроксимаційний ланцюг (α-SAC) – це стандартний апроксимаційний ланцюг довжиною α.

Теорема 2. Дана Pr – ω-область, $\varphi : Pr \to Pr$ – T-ω-неперервне відображення, задане на цій області. Тоді область істинності предикатів, що задаються стандартним апроксимаційним ланцюгом довільного нескінченного ординала, збігаються і дорівнюють області істинності предиката T-*lfp* φ:

$$(T\text{-}lfp\ \varphi)^T = (\varphi^{(\beta)}(\perp))^T, \beta \geq \omega.$$

Доведення побудуємо за індукцією:

1. База індукції: T-*lfp* $\varphi = \coprod_{i\in\omega} \varphi^{(i)}(\perp) = \varphi^{(\omega)}(\perp) \Rightarrow (T\text{-}lfp\ \varphi)^T = (\varphi^{(\omega)}(\perp))^T$.

2. Припущення: $(T\text{-}lfp\ \varphi)^T = (\varphi^{(\beta)}(\perp))^T$. Треба довести, що $(T\text{-}lfp\ \varphi)^T = (\varphi^{(\beta+1)}(\perp))^T$. Ізольований ординал редукуємо до граничного ординала, використовуючи T-ω-неперервність φ. При такій редукції область істинності не змінюється.

3. Доведемо $(T\text{-}lfp\ \varphi)^T = (\varphi^{(\gamma)}(\perp))^T$, де $\varphi^{(\gamma)}(\perp) = \coprod_{\beta<\gamma} \varphi^{(\beta)}(\perp)$.

$$\varphi^{(\gamma)}(\perp) = \coprod_{\beta<\gamma} \varphi^{(\beta)}(\perp) \Rightarrow gr(\varphi^{(\gamma)}(\perp)) = \bigcup_{\beta<\gamma} gr(\varphi^{(\beta)}(\perp)) \Rightarrow (\varphi^{(\gamma)}(\perp))^T = \bigcup_{\beta<\gamma} (\varphi^{(\beta)}(\perp))^T = \bigcup_{\beta<\gamma} (T\text{-}lfp\,\varphi)^T = (T\text{-}lfp\ \varphi)^T.$$

Властивості композицій на предикатах

Наведемо визначення тих композицій предикатів, які є базовими для композиційно-номінативних логік.

Спочатку визначимо композиції диз’юнкції та заперечення на класі $Pr = D \to Bool$ наступними співвідношеннями (тут $p, q \in Pr, d \in D$):

$$(p \vee q)(d) = \begin{cases} T, \text{ при } p(d) \downarrow= T \text{ або } q(d) \downarrow= T, \\ F, \text{ при } p(d) \downarrow= F \text{ т } q(d) \downarrow= F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(\neg p)(d) = \begin{cases} T, \text{ при } p(d) \downarrow= F, \\ F, \text{при } p(d) \downarrow= T, \\ \text{невизначене, при } p(d) \uparrow. \end{cases}$$

Ці композиції є аналогами сильних зв'язок Кліні. Вони є композиціями абстрактного рівня.

На наступному рівні визначаємо D як ${}^{Vr}A$. На цьому рівні можна визначити нову параметричну композицію реномінації $R^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}$ та екзистенційний квантор (квантор існування) $\exists x$ (тут $p, q \in Pr, d \in {}^{Vr}A, v_1,..., v_n, x_1,..., x_n \in Vr$, причому $v_1,..., v_n$ – попарно відмінні імена):

$$R^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(p)(d) = p([v \mapsto a \in_n d, v \notin \{v_1,...,v_n\}]\nabla[v_i \mapsto a_i \mid x_i \mapsto a_i \in_n d, i \in \{1,...,n\}]).$$

$$(\exists x p)(d) = \begin{cases} T, \quad \text{існує } b \in A: \ p(d\nabla x \mapsto b) \downarrow= T, \\ F, \quad p(d\nabla x \mapsto a) \downarrow= F \text{ для всіх } a \in A, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Похідні композиції $\&, \to, \leftrightarrow, \forall x$ визначаються традиційним способом.

При наявності функцій вводяться ще композиції розіменування та суперпозиції [1].

Теорема 3. Композиції диз’юнкції, кон’юнкції, заперечення, реномінації та суперпозиції є ω-неперервними, композиції квантифікації є монотонними.

Доведення проводиться традиційним способом, тому його не наводимо.

Синтаксичні аспекти побудови *T*-нерухомої точки

Алгебри часткових предикатів утворюють семантичну основу КНЛ. Їх сигнатура дозволяє визначити мови (формули) КНЛ. Як основну розглядаємо алгебру предикатів AP з композиціями вигляду $\neg\Phi, \Phi \vee \Psi, \Phi \wedge \Psi, R_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(\Phi)$, $\exists x\Phi$ та $\forall x\Phi$.

Визначення 8. Поняття формули вводиться індуктивно:
- кожен предикатний символ буде формулою. Такі формули називають атомарними;
- якщо Φ та Ψ – формули, то $\neg\Phi, \Phi \vee \Psi, \Phi \wedge \Psi, R_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(\Phi)$ – формули;
- якщо Φ – формула, то $\exists x\Phi$ та $\forall x\Phi$ – формули.

Значення формули Φ в алгебрі *A* позначаємо Φ_A. Якщо виділяємо предикатний символ *P*, то пишемо Φ(*P*), відповідно $\Phi_A(P)$ означає оператор (композицію) типу $Pr \to Pr$.

Основним питанням є формулювання достатніх умов, за яких формула задає ω-неперервне або *T*-ω-неперервне відображення. Одними з таких умов є умови безкванторності та екзистенційності формули.

Визначення 9. Дамо індуктивне визначення P-безкванторної формули Φ:
- предикатний символ *P* є *P*-безкванторною формулою;
- якщо Φ не містить *P*, то Φ – *P*-безкванторна формула;
- якщо Φ та Ψ – *P*-безкванторні формули, то $\neg\Phi, \Phi \vee \Psi, \Phi \wedge \Psi, R_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(\Phi)$ – *P*-безкванторні формули.

Визначення 10. Дамо індуктивне визначення P-екзистенційної формули Φ:
- якщо Φ – *P*-безкванторна формула, то Φ – *P*-екзистенційна формула;
- якщо Φ та Ψ – *P*-екзистенційні формули, то $\Phi \vee \Psi, \Phi \wedge \Psi, \exists x\Phi$, $R_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(\Phi)$ – *P*-екзистенційні формули.

Теорема 4. Якщо формула Φ є *P*-безкванторною для деякого предикатного символу *P* з цієї формули, то її оператор Φ_A визначає ω-неперервне відображення.

Доведення здійснюється індукцією за структурою *P*-безкванторної формули.

Нехай $\Phi = P$. Тоді $\coprod_{i\in\omega}\Phi_A(P_i) = \Phi_A\left(\coprod_{i\in\omega}P_i\right)$ для будь-якого ланцюга предикатів P_i.

Нехай Φ не містить *P*, тоді Φ_A є константним відображенням (не залежить від *P*), а отже є ω-неперервним.

Замикання *P*-безкванторних формул відносно відповідних композицій зберігає ω-неперервність.

Доведення проводиться традиційним способом, тому його не наводимо.

Теорема 5. Якщо формула Φ є *P*-екзистенційною для деякого предикатного символу *P* з цієї формули, то її оператор Φ_A визначає *T*-ω-неперервне відображення.

Доведення здійснюється індукцією за структурою *P*-екзистенційної формули.

Нехай Φ є безкванторною формулою. Тоді за попередньою теоремою відповідне відображення є ω-неперервним, отже, воно є і *T*-ω-неперервним.

Нехай Φ та Ψ – *P*-екзистенційні формули, а отже їх оператори є *T*-ω-неперервними.

Доведемо, що логічна операція диз'юнкція ω-неперервна. Тобто покажемо, що $\coprod_{i\in\omega}(P_i \vee Q)(d) = \left(\coprod_{i\in\omega}P_i \vee Q\right)(d)$ (неперервність за першим аргументом).

Для деякого $d \in D$ $\coprod_{i\in\omega}(P_i \vee Q)(d) \downarrow= T \Leftrightarrow$ існує $k \in \omega : (P_k \vee Q)(d) \downarrow= T \Leftrightarrow$ існує $k \in \omega : (P_k(d) \downarrow= T$ або $Q(d) \downarrow= T) \Leftrightarrow$ існує $k \in \omega : P_k(d) \downarrow= T$, або $Q(d) \downarrow= T \Leftrightarrow$ $\left(\coprod_{i\in\omega}P_i\right)(d) \downarrow= T$, або $Q(d) \downarrow= T \Leftrightarrow$ $\left(\coprod_{i\in\omega}P_i \vee Q\right)(d) \downarrow= T$.

Для деякого $d \in D$ $\coprod_{i\in\omega}(P_i \vee Q)(d)\downarrow= F \Leftrightarrow$ існує $k \in \omega : (P_k \vee Q)(d)\downarrow= F \Leftrightarrow$ існує $k \in \omega : (P_k(d)\downarrow= F$ та $Q(d)\downarrow= F) \Leftrightarrow$ існує $k \in \omega : P_k(d)\downarrow= F$ та $Q(d)\downarrow= F \Leftrightarrow \left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right)(d)\downarrow= F$ та $Q(d)\downarrow= F \Leftrightarrow$ $\left(\coprod_{i\in\omega} P_i \vee Q\right)(d)\downarrow= F$.

Аналогічно доводиться, що логічна операція (композиція) кон'юнкція ω-неперервна.

Доведемо, що операція $\exists$-квантифікації T-ω-неперервна і монотонна. Тобто покажемо, що $\coprod_{i\in\omega}(\exists x P_i) \le_T \exists x\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right)$.

Для деякого $d \in D$ $\coprod_{i\in\omega}(\exists x P_i)(d)\downarrow= T \Leftrightarrow$ існує $k \in \omega : (\exists x P_k)(d)\downarrow= T \Leftrightarrow$ існує $k \in \omega$ та існує $a : P_k(d\nabla x \mapsto a)\downarrow= T \Leftrightarrow$ існує a та існує $k \in \omega : P_k(d\nabla x \mapsto a)\downarrow= T \Leftrightarrow$ існує a: $\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right)(d\nabla x \mapsto a)\downarrow= T$ $\Leftrightarrow$ $\exists x\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right)(d)\downarrow= T \Rightarrow \coprod_{i\in\omega}(\exists x P_i) =_T \exists x\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right)$.

Для деякого $d \in D$ $\coprod_{i\in\omega}(\exists x P_i)(d)\downarrow= F \Leftrightarrow$ існує $k \in \omega : (\exists x P_k)(d)\downarrow= F \Leftrightarrow$ існує $k \in \omega$, таке, що для будь-якого $a : P_k(d\nabla x \mapsto a)\downarrow= F \Rightarrow$ для будь-якого a знайдеться $k \in \omega : P_k(d\nabla x \mapsto a)\downarrow= F \Leftrightarrow$ для будь-якого a: $\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right)(d\nabla x \mapsto a)\downarrow= F$ $\Leftrightarrow$ $\exists x\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right)(d)\downarrow= F \Rightarrow \coprod_{i\in\omega}(\exists x P_i) \le \exists x\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right)$.

Отже, $\coprod_{i\in\omega}(\exists x P_i) \le_T \exists x\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right)$. Операція $\exists$-квантифікації T-ω-неперервна, а отже і монотонна (за лемою 2).

Зауваження: операція $\exists$-квантифікації не є ω-неперервною. Наприклад, візьмемо наступний ланцюг предикатів на множині натуральних чисел:

$$P_i = (x \le i \to F)\,\&\,(x > i \to \perp), i \in \omega.$$

$$gr(P_0) = \{(0, F)\};$$

$$gr(P_1) = \{(0, F), (1, F)\};\ gr(P_0) \subseteq gr(P_1) \Rightarrow P_0 \le P_1;$$

$$gr(P_2) = \{(0, F), (1, F), (2, F)\};\ gr(P_1) \subseteq gr(P_2) \Rightarrow P_1 \le P_2;$$

$$\ldots$$

$$gr(P_i) = \{(0, F), ..., (i, F)\};\ gr(P_{i-1}) \subseteq gr(P_i) \Rightarrow P_{i-1} \le P_i, i \in \omega.$$

$$gr\left(\coprod_{i\in\omega}(\exists x P_i)\right) = \bigcup_{i\in\omega} gr(\exists x P_i) = \bigcup_{i\in\omega}\{\} = \{\} \Rightarrow \coprod_{i\in\omega}(\exists x P_i) = \perp .$$

$$gr\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right) = \bigcup_{i\in\omega} gr(P_i) = \{(i, F) \mid i < \omega\} \Rightarrow \exists x\left(\coprod_{i\in\omega} P_i\right) = F \ne \coprod_{i\in\omega}(\exists x P_i).$$

n-арна функція неперервна тоді і тільки тоді, коли вона неперервна за кожним аргументом. Отже, будь-яка формула, побудована за допомогою операцій заперечення, диз'юнкції, кон'юнкції та реномінації задає ω-неперервний оператор (композицію). Якщо формула Φ є P-екзистенційною для деякого предикатного символу P, то відповідний оператор є монотонний та ω-неперервний в області істинності.

Отже, якщо формула Φ є P-екзистенційною для деякого предикатного символу P з цієї формули, то її оператор Φ_A за теоремою 1 має T-нерухому точку з найменшою областю істинності, що знаходиться методом послідовних наближень.

Для спрощення викладу, композиції реномінації та суперпозиції у прикладах не наводимо. Також замість Φ_A пишемо просто Φ.

Приклад 1

Розглянемо, наприклад, рекурсивне визначення транзитивного замикання $Tr(x,y)$ відношення $R(x,y)$:

$R(x,y) \vee \exists z(R(x,y) \wedge Tr(z,y))$.

Праву частину цієї формули можна тлумачити як композицію ψ від предикатів $Tr(x,y)$ та $R(x,y)$. Тому оператор ПНТ можна розглядати як метакомпозицію, яка будує композицію, що залежить від $R(x,y)$. Отже, $Tr(x,y) = \psi\ (Tr(x,y),R(x,y))$.

Формула $R(x,y) \vee \exists z(R(x,y) \wedge Tr(z,y))$ є Tr-екзистенційною, а отже рівняння $Tr(x,y) = R(x,y) \vee \exists z(R(x,y) \wedge Tr(z,y))$ має найменшу нерухому точку в області істинності:

$T\text{-}lfp\ Tr = \coprod_{i \in \omega} Tr^{(i)}(\perp)$,

де $gr(Tr^{(0)}(\perp)) = gr(\perp) = \{\}, Tr^{(1)}(\perp) = Tr(Tr^{(0)}(\perp)) = Tr(\perp),..., Tr^{(i)}(\perp) = Tr(Tr^{(i-1)}(\perp)), i \in \omega$.

Приклад 2

Розглянемо наступну рекурсивну формулу:

$P(x) = even(x) \wedge (x \neq 0 \to P(x-2)) \vee \neg(\forall y(even(y) \to P(y)) \wedge odd(x) \wedge (x \neq 1 \to \neg P(x-2))) \wedge \perp$.

Введемо такі позначення:

$O(x) = "x \neq 0"$;

$E(x) = "even(x)"$. Тоді $\neg E(x) = "odd(x)"$;

$L(x) = "x \neq 1"$.

Тоді $P(x) = E(x) \wedge (O(x) \to P(x-2)) \vee \neg(\forall y(E(y) \to P(y)) \wedge \neg E(x) \wedge (L(x) \to \neg P(x-2))) \wedge \perp$.

Побудуємо послідовність $P^{(i)}(x) = P(P^{(i-1)}(x))$, де $P^{(0)} = \perp$. Та знайдемо $P^{(\omega)}$, що дорівнює супремуму цієї послідовності: $P^{(\omega)} = \coprod_{i<\omega} P^{(i)}, gr(P^{(\omega)}) = \bigcup_{i<\omega} gr(P^{(i)})$.

1) $P^{(0)} = \perp . gr(P^{(0)}) = \{\}$;

2) $P^{(1)} = E(x) \wedge (O(x) \to \perp) \vee \neg(\forall y(E(y) \to \perp) \wedge \neg E(x) \wedge (L(x) \to \perp)) \wedge \perp$.

1. $E(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d - \text{парне;} \\ F, \text{при } d - \text{непарне;} \end{cases}$

2. $O(d) = \begin{cases} F, \text{ при } d = 0 \\ T, \text{ при } d > 0 \end{cases} \Rightarrow (O \to \perp)(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d = 0; \\ \text{невизначене, при } d > 0; \end{cases} \Rightarrow$

$(E \wedge (O \to \perp))(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d = 0; \\ F, \text{ при } d - \text{непарне;} \\ \text{невизначене у всіх інших випадках;} \end{cases}$

3. $(E \to \perp)(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d - \text{непарне;} \\ \text{невизначене у всіх інших випадках;} \end{cases}$

Тому результат $(\forall y(E(y) \to \perp))$ невизначений.

4. $L(d) = \begin{cases} F, \text{ при } d = 1 \\ T, \text{ при } d \neq 1 \end{cases} \Rightarrow (L \to \perp)(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d = 1 \\ \text{невизначене, при } d \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$(\neg E \wedge (L \to \perp))(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d = 1; \\ F, \text{ при } d - \text{парне;} \\ \text{невизначене у всіх інших випадках;} \end{cases}$

$\Rightarrow (\neg(\forall y(E \to \perp) \wedge \neg E \wedge (L \to \perp)))(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d - \text{парне;} \\ \text{невизначене у всіх інших випадках;} \end{cases}$

$\Rightarrow$ результат $(\neg(\forall y(E \to \perp) \wedge \neg E \wedge (L \to \perp)) \wedge \perp)(d)$ всюди невизначений.

Отже, $gr(P^{(1)}) = \{(0,T)\}$.

3) $P^{(2)} = E(x) \wedge (O(x) \to P^{(1)}(x-2)) \vee \neg(\forall y(E(y) \to P^{(1)}(y)) \wedge \neg E(x) \wedge (L(x) \to \neg P^{(1)}(x-2))) \wedge \perp$.

1. $E(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d - \text{парне;} \\ F, \text{ при } d - \text{непарне;} \end{cases}$

2. $O(d) = \begin{cases} F, \text{ при } d = 0; \\ T, \text{ при } d > 0; \end{cases}$ $P^{(1)}(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d = 0; \\ \text{невизначене у всіх інших випадках.} \end{cases} \Rightarrow$

Тому $O(x) \to P^{(1)}(x-2)$ буде приймати значення *T* при *x* = 0 або *x* = 2 та невизначене на всіх інших даних, а $E(x) \wedge O(x) \to P^{(1)}(x-2)$ буде приймати значення *T* при *x* = 0 або *x* = 2, *F* – на непарних значеннях *x* та невизначене на всіх інших даних.

3. $(E \to P^{(1)})(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d - \text{непарне або } d = 0; \\ \text{невизначене у всіх інших випадках;} \end{cases}$

Тому результат $(\forall y(E(y) \to P^{(1)}(y)))$ невизначений.

4. $L(d) = \begin{cases} F, \text{ при } d = 1; \\ T, \text{ при } d \neq 1. \end{cases}$

Тому $(L(x) \to \neg P^{(1)}(x-2))$ буде приймати значення *T* при *x* = 1, *F* при *x* = 2 та невизначене у всіх інших випадках, а $\neg E(x) \wedge (L(x) \to \neg P^{(1)}(x-2))$ буде приймати значення *T* при *x* = 1, *F* – на парних значеннях *x* та невизначене на всіх інших даних.

$\neg(\forall y(E(y) \to P^{(1)}(y)) \wedge \neg E(x) \wedge (L(x) \to \neg P^{(1)}(x-2)))$ буде приймати значення *T* при парних значеннях *x* та невизначене у всіх інших випадках, а результат $\neg(\forall y(E(y) \to P^{(1)}(y)) \wedge \neg E(x) \wedge (L(x) \to \neg P^{(1)}(x-2))) \wedge \perp$ буде всюди невизначеним.

Отже, $gr(P^{(2)}) = \{(0,T),(2,T)\}$.

4) $P^{(i)} = E(x) \wedge (O(x) \to P^{(i-1)}(x-2)) \vee \neg(\forall y(E(y) \to P^{(i-1)}(y)) \wedge \neg E(x) \wedge (L(x) \to \neg P^{(i-1)}(x-2))) \wedge \perp$.

$gr(P^{(i)}) = \{(0,T),...,(2i-2,T)\}$.

5) $gr\left(\coprod_{i<\omega} P^{(i)}\right) = \bigcup_{i<\omega} gr(P^{(i)}) = gr(P^{(\omega)}) = \{(2k,T) \mid k \geq 0\}$.

Розглянемо наступний предикат послідовності:

6) $P^{(\omega+1)} = E(x) \wedge (O(x) \to P^{(\omega)}(x-2)) \vee \neg(\forall y(E(y) \to P^{(\omega)}(y)) \wedge \neg E(x) \wedge (L(x) \to \neg P^{(\omega)}(x-2))) \wedge \perp$.

1. $E(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d - \text{парне;} \\ F, \text{ при } d - \text{непарне;} \end{cases}$

2. $O(d) = \begin{cases} F, \text{ при } d = 0; \\ T, \text{ при } d > 0; \end{cases}$ $P^{(\omega)}(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d - \text{парне;} \\ \text{невизначене у всіх інших випадках.} \end{cases} \Rightarrow$

Тому $O(x) \to P^{(\omega)}(x-2)$ буде приймати значення *T* при парних значеннях *x* та невизначене на всіх інших даних, а $E(x) \wedge O(x) \to P^{(1)}(x-2)$ буде приймати значення *T* при парних значеннях *x* та *F* – на непарних значеннях *x*.

3. $P^{(\omega)}(d) = \begin{cases} T, \text{ при } d - \text{парне;} \\ \text{невизначене у всіх інших випадках;} \end{cases} \Rightarrow$

$(E \to P^{(\omega)})(d) = T$ для будь-яких значень d .

Тому $(\forall y(E(y) \to P^{(\omega)}))(d) = T, \forall d$.

4. $L(d) = \begin{cases} F, \text{ при } d = 1; \\ T, \text{ при } d \neq 1; \end{cases}$

Тому $(L(x) \to \neg P^{(\omega)}(x-2))$ буде приймати значення *T*, якщо $x = 1$, *F*, якщо *x* – парне та невизначене у всіх інших випадках.

$\neg E(x) \wedge (L(x) \to \neg P^{(\omega)}(x-2))$ буде приймати значення *T* при *x* = 1, *F* – на парних значеннях *x* та невизначене на всіх інших даних.

$\neg(\forall y(E(y) \to P^{(\omega)}(y)) \wedge \neg E(x) \wedge (L(x) \to \neg P^{(\omega)}(x-2))) \wedge \perp$ буде приймати значення *F* при *x* = 1 та невизначене у всіх інших випадках.

Отже, $gr(P^{(\omega+1)}) = \{(2k,T) \mid k \geq 0\} \cup \{(1,F)\}$.

7) $gr(P^{(\omega+i)}) = \{(2k,T) \mid k \geq 0\} \cup \{(1,F),..,(2i-1,F)\}$.

$$gr\left(\coprod_{i<\omega+\omega} P^{(i)}\right) = \bigcup_{i<\omega+\omega} gr(P^{(i)}) = gr(P^{(\omega+\omega)}) = \{(2k,T) \mid k \geq 0\} \cup \{(2k+1,F) \mid k \geq 0\}.$$

Розглянутий приклад демонструє сформульовані теореми щодо нерухомих точок. А саме:

– формула $P(x) = even(x) \wedge (x \neq 0 \rightarrow P(x-2)) \vee \neg(\forall y(even(y) \rightarrow P(y)) \wedge odd(x) \wedge (x \neq 1 \rightarrow \neg P(x-2))) \wedge \perp$ еквівалентна *P*-екзистенційній формулі (при заміні заперечення універсального квантора на екзистенційний квантор);

– оператор, що задається формулою, є *T*-ω-неперервним відображенням;

– *T*-нерухома точка з найменшою областю істинності досягається на першому граничному ординалі;

– ця точка не є нерухомою точкою, бо апроксимації ω+1, ω+2, … збагачують область хибності, не змінюючи область істинності. Причиною є відсутність *F*-ω-неперервності. Така точка є квазінерухомою точкою (субнерухомою в даному випадку);

– "справжня" найменша нерухома точка (вона і максимальна), досягається апроксимаційним ланцюгом з другим граничним ординалом ω+ω. Предикат, що визначається так, є всюди визначеним предикатом.

Наведені властивості формул дозволяють ввести наступні схеми аксіом:

– $lfp_P(\Phi) = \Phi(lfp_P(\Phi))$;

– $T\text{-}lfp_P(\Phi) \vee\perp = \Phi(T\text{-}lfp_P(\Phi)) \vee \perp$.

Теорема 6. Якщо Φ є *P*-безкванторною формулою, то $lfp_P(\Phi) = \Phi(lfp_P(\Phi))$ є коректною схемою аксіом. Якщо Φ є *P*-екзистенційною формулою, то $T\text{-}lfp_P(\Phi) \vee\perp = \Phi(T\text{-}lfp_P(\Phi)) \vee\perp$ є коректною схемою аксіом.

Побудовані схеми аксіом можуть бути використані для аксіоматизації мов предикатів, розширених операторами нерухомих та квазінерухомих точок $lfp_P(\Phi)$ та $T\text{-}lfp_P(\Phi)$. Втім, ця проблема потребує окремого розгляду.

Висновки

Розглянуто застосування операторів побудови нерухомої точки для композиційно-номінативних логік різних рівнів абстракції. Наводяться відповідні теореми щодо подання класів предикатів як ω-областей, ω-неперервності та монотонності основних композицій предикатів, існування нерухомих та квазінерухомих точок, замкненості класів предикатів відносно операторів нерухомої точки та властивостей таких операторів. Отримані результати можуть бути застосовані в мовах специфікацій програм.

1. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Основи математичної логіки. – К.: Київський ун-т.– 2006. – 246 с.
2. *Nikitchenko N.N., Omelchuk L.L., Shkilniak S.S.* Formalisms for Specification of Programs over Nominative Data. – Electronic computers and informatics (ECI 2006). Th. of conf. rep. – Košice – Herľany, Slovakia.– 2006. – P. 134–139.
3. *Никитченко Н.С.* Композиции программ, индуцирующих монотонные функции специального вида // Программирование.– 1987.– № 1.– С. 3–17.
4. *Dawar A., Gurevich Y.* Fixed point logics // The Bulletin of Symbolic Logic.– 2002.– Vol. 8, N 1.– P. 65–88.
5. *Davey B.A., Priestley H.A.* Introduction to Lattices and Order. Second edition // Cambridge University Press.– 2002. – 248 p.
6. *Грамберг О., Кларк Э.М., Пелед Д.* Верификация моделей программ: Model checking. – М.: Московский центр непрерывного математического образования.– 2002. – 416 с.