УДК 519.17

М.Ф. СЕМЕНЮТА

(*a*, *d*)-ДИСТАНЦІЙНА АНТИМАГІЧНА РОЗМІТКА ОКРЕМИХ ТИПІВ ГРАФІВ

Анотація. Досліджено необхідні умови існування (a,d)-дистанційної антимагічної розмітки графа $G=(V,E)$ порядку n. Одержано теореми, що розширюють сімейство не (a,d)-дистанційних антимагічних графів. Зокрема, доведено, що корона $P_n \circ P_1$ не допускає $(a,1)$-дистанційної антимагічної розмітки для $n \geq 2$, якщо $a \leq 2$. Встановлено значення a, при яких ланцюг P_n може бути $(a,1)$-дистанційним антимагічним графом. Досліджено окремий випадок циркулянтного графа.

Ключові слова: дистанційна магічна розмітка, дистанційна антимагічна розмітка, (a,d)-дистанційна антимагічна розмітка, ланцюг, регулярний граф, циркулянтний граф.

ВСТУП

Поняття розмітки графа має широкий діапазон застосувань у різних галузях науки, а саме у рентгенівській кристалографії, теорії кодування, криптографії, астрономії, схемотехніці, мережевому плануванні. За останні 20 років з'явилося багато різних типів і підтипів розміток [1]. У цій статті йдеться про (a,d)-дистанційну антимагічну розмітку, поняття якої введено в [2], де одержано результати про наявність (a,d)-дистанційної антимагічної розмітки у циклів, ланцюгів, призм та M-розширень циклів. Це антимагічна версія дистанційного типу розмітки, яка безпосередньо пов'язана з дистанційною магічною розміткою, запропонованою незалежно в [3, 4].

Дистанційна магічна розмітка та її різновиди застосовуються до задач планування, зокрема в плануванні неповних турнірів з різними властивостями. Дистанційні магічні та врівноважені дистанційні магічні мультичасткові графи використано в [5–7] як моделі неповних кругових турнірів. Якщо $d=0$, то (a,d)-дистанційна антимагічна розмітка стає дистанційною магічною, тому її можна вважати узагальненням цього поняття. У роботі [7] доведено, що диз'юнктивне об'єднання копій декартового добутку двох повних графів є $(a,2)$-дистанційним антимагічним графом, а його доповнення — $(a,1)$-дистанційним антимагічним. У статті [2] зазначено, що цей напрямок відкриває можливості для подальших досліджень і запропоновано знайти необхідні і достатні умови існування (a,d)-дистанційної антимагічної розмітки та охарактеризувати різні класи графів відносно неї.

Далі вивчено необхідні умови існування (a,d)-дистанційних антимагічних графів. Одержано теореми, що доповнюють сімейство не (a,d)-дистанційних антимагічних графів. Поміж регулярних графів досліджено окремий випадок циркулянтного графа.

БАЗОВІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Розглянемо скінченні неорієнтовані графи без кратних ребер та петель. Доповнення графа G позначимо $\overline{G}$.

Граф $G' = (V', E')$ є підграфом графа $G = (V, E)$, якщо $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. Максимальний зв'язний підграф графа G вважають компонентою зв'язності або компонентою графа G. Якщо G — зв'язний граф, то mG — граф з m компонентами, кожна з яких ізоморфна G. Також зазначимо, що $mG = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$ — це диз'юнктивне об'єднання графів G_i, кожний з яких є копією графа G .

Граф $G \circ H$ називають короною, якщо його можна отримати з диз'юнктивного об'єднання графа G та n, $n = |V(G)|$, копій графа H за допомогою з'єднання i-ї вершини G з кожною вершиною i-ї копії H для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Нехай $s_1, s_2, \ldots, s_m$, n — натуральні числа такі, що $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_m < n$. Неорієнтований граф $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ з множиною вершин $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ та ребрами (u_i, u_{i+s_j}) для $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, де $i + s_j$ береться за модулем n, називають циркулянтним графом, а m — його розмірністю.

Елементи породжувальної множини $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ називають твірними. Параметричний опис $C(n; S)$ повністю визначає циркулянтний граф порядку n та розмірності m. Його степінь дорівнює $2m$, якщо $s_m \ne n/2$. Якщо n парне і $s_m = n/2$, то $C(n; S)$ має степінь $2m - 1$. У [8, 9] показано, що циркулянтний граф $C(n; S)$ є зв'язним тоді і тільки тоді, коли НСД $(s_1, s_2, \ldots, s_m, n) = 1$.

Розмітки поділяються на вершинні, реберні та тотальні залежно від області відображення функції, яка їх задає.

Далі мова йде про вершинні розмітки графа. Для них вага $w(u)$ вершини u визначається як сума міток вершин суміжних з u, тобто $w(u) = \sum_{v \in N(u)} f(v)$, де $N(u)$ — множина суміжності вершини u.

Дистанційною магічною розміткою f графа $G = (V, E)$ порядку n називається бієкція $f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}$, для якої існує натуральне число k таке, що для кожної вершини u справедлива рівність $k = \sum_{v \in N(u)} f(v)$. Величина k називається магічною сталою розмітки f. Граф, що допускає розмітку f, називається дистанційним магічним.

Припустимо, що граф G не містить ізольованих вершин. Нехай G є дистанційним магічним графом порядку n з розміткою f і магічною сталою k. Для доповнення $\overline{G}$ графа G ваги вершин визначаються за формулою $\sum_{v \in N(u)} f(v) =$ $= n(n+1)/2 - k - f(u)$ і складають множину $\{n(n+1)/2 - k - i : 1 \le i \le n\}$, елементи якої утворюють арифметичну прогресію з першим членом $a = n(n+1)/2 - k - n$ та різницею $d = 1$. Ці міркування змотивували авторів [2] до введення нової версії дистанційної розмітки, наведеної в означенні 1.

Означення 1 [2]. (a, d)-дистанційною антимагічною розміткою графа $G = (V, E)$ порядку n називається така бієкція $f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}$, що множина всіх ваг вершин утворює арифметичну прогресію $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n-1)d$, де $a \ge 1$, $d \ge 0$. Граф G, що допускає таку розмітку, називають (a, d)-дистанційним антимагічним графом.

Коли $d = 0$, розмітка f є дистанційною магічною, а при $d = 1$ — дистанційною антимагічною. Надалі будемо проводити дослідження для $d \ge 1$.

Якщо G — дистанційний магічний граф, то його доповнення $\overline{G}$ є $(a, 1)$-дистанційним антимагічним графом. Обернене твердження не справджується.

Далі у лемі сформульовано необхідну умову існування (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки.

Лема 1 [2]. Якщо граф G є (a, d)-дистанційним антимагічним порядку n, то

$$d \leq \frac{2n\Delta - \Delta(\Delta - 1) - \delta(\delta + 1)}{2(n-1)}.$$

Наслідок 1 [2]. Якщо граф G є r-регулярним (a, d)-дистанційним антимагічним порядку n з $r \geq 2$, то $d < r$.

Аналогічну властивість одержуємо для r-регулярних графів порядку n з $r \geq \frac{n}{2}$.

Наслідок 2. Якщо граф G є r-регулярним (a, d)-дистанційним антимагічним порядку n з $r \geq \frac{n}{2}$, то $d \leq \frac{n}{2}$.

Доведення. Розглянемо r-регулярний граф G порядку n, що має (a, d)-дистанційну антимагічну розмітку. За лемою 1 знайдемо межі для d:

$$d \leq \frac{r(n-r)}{n-1}. \tag{1}$$

Відомо, що r-регулярний граф існує для натуральних чисел r і n, з яких одне парне, якщо r та n задовольняють подвійну нерівність $0 \leq r \leq n-1$. Тоді з (1) випливає нерівність: $d \leq n - r$. Якщо $r \geq \frac{n}{2}$, остання нерівність набуває вигляду $d \leq \frac{n}{2}$.

Наслідок доведено.

ГРАФИ, ЩО НЕ ДОПУСКАЮТЬ (a, d)-ДИСТАНЦІЙНОЇ АНТИМАГІЧНОЇ РОЗМІТКИ

Для (a, d)-дистанційного антимагічного графа множини суміжності будь-яких двох вершин не повинні бути рівними [2]. Це дозволяє встановити типи графів, які не допускають (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки. До них належать деякі мультичасткові графи, а також графи, що містять хоча б два висних ребра, суміжних одній і тій самій вершині. Далі наведено теореми, що розширюють сімейство таких графів.

Теорема 1. Якщо граф G містить цикл $abcd$ з $\deg a = \deg c = 2$, то G не є (a, d)-дистанційним антимагічним графом.

Доведення. У графі G множини суміжності $N(a) = \{b, d\}$ та $N(c) = \{b, d\}$ збігаються. З цього випливає, що для нього не існує (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки.

Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо $a \leq 2$, то корона $P_n \circ P_1$ не допускає $(a, 1)$-дистанційної антимагічної розмітки для $n \geq 2$.

Доведення. Позначимо $V(P_n \circ P_1) = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ множину вершин корони $P_n \circ P_1$, де $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ та $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — множини вершин копії P_n та n копій P_1 відповідно. Припустимо, що існує (a, d)-дистанційна антимагічна розмітка f корони $P_n \circ P_1$.

Запишемо ваги вершин, які можна одержати при наявності у корони $P_n \circ P_1$ розмітки f:

$$w(v_i) = f(u_i),$$

$$w(u_1) = f(v_1) + f(u_2), \quad w(u_2) = f(v_2) + f(u_1) + f(u_3),$$

$$w(u_3) = f(v_3) + f(u_2) + f(u_4),\ \ldots,\ w(u_{n-1}) = f(v_{n-1}) + f(u_{n-2}) + f(u_n),$$
$$w(u_n) = f(v_n) + f(u_{n-1}),$$

де $i = 1, 2, \ldots, n.$

Знайдемо суму ваг всіх вершин

$$\sum_{i=1}^{n} w(u_i) + \sum_{i=1}^{n} w(v_i) = 2an + dn(2n-1)$$

або

$$2\sum_{i=1}^{n} f(u_i) + n(2n+1) - (f(u_1) + f(u_n)) = 2an + dn(2n-1).$$

З леми 1 випливає, що d може набувати значення 1 або 2. Нехай $d = 1$, тоді $2\sum_{i=1}^{n} f(u_i) = 2an - 2n + (f(u_1) + f(u_n)).$

Оскільки $f(u_1) + f(u_n) \le 4n - 1$, одержуємо $2\sum_{i=1}^{n} f(u_i) \le 2an + 2n - 1.$

Однак $2\sum_{i=1}^{n} f(u_i) \ge n(n+1).$ Таким чином, справедлива подвійна нерівність $n(n+1) \le 2\sum_{i=1}^{n} f(u_i) \le 2an + 2n - 1.$ Це означає, що $n(n+1) \le 2an + 2n - 1$ або $n(n - 2a - 1) \le -1.$ Остання нерівність виконується тільки при $n < 2a + 1.$

Випадок, коли $a = 1$, не розглядаємо, оскільки граф є $(1,1)$-дистанційним антимагічним тільки тоді, коли кожна його компонента є ізоморфним образом P_2 [2].

Нехай $a = 2$, тоді n може набувати значень 2, 3, 4. Якщо $n = 2$ та $V(P_2 \circ P_1) = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$, то мітку 2 можна присвоїти тільки одній з вершин: u_1 або u_2. Припустимо, що $f(u_1) = 2$; тоді одержимо рівняння $2f(u_2) + f(v_1) + f(v_2) = 6$, яке не має розв'язків на множині $\{1, 3, 4\}$.

Якщо $n = 3$ та $V(P_3 \circ P_1) = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$, то мітку 2 можна присвоїти тільки одній з вершин: u_1, u_2 або u_3. Без втрати загальності припустимо, що $f(u_1) = 2$; одержимо рівняння $3f(u_2) + 2f(u_3) + f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) = 17$, яке не має розв'язків на множині $\{1, 3, 4, 5, 6\}$.

Аналогічно для $n = 4$ рівняння $3f(u_2) + 3f(u_3) + 2f(u_4) + f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) + f(v_4) = 32$ не має розв'язків на множині $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Таким чином, корона $P_n \circ P_1$ не допускає $(a,1)$-дистанційної антимагічної розмітки, якщо $a \le 2$.

Теорему доведено.

Відповідно до теореми 2 сформулюємо такі задачі.

Задача 1. Чи існує $(a, 2)$-дистанційна антимагічна розмітка корони $P_n \circ P_1$ з $a \le 2$?

Задача 2. Чи існують $(a, 1)$- та $(a, 2)$-дистанційні антимагічні розмітки корони $P_n \circ P_1$ з $a > 2$?

(a, d)-ДИСТАНЦІЙНА АНТИМАГІЧНА РОЗМІТКА ЛАНЦЮГІВ

У роботі [2] доведено, що ланцюг P_n не є (a, d)-дистанційним антимагічним графом, якщо $a, d \ge 2$, і не є $(1, d)$-дистанційним антимагічним графом для $n \ge 3$, і запропоновано таку задачу.

Задача 3 [2]. Чи існує $(a,1)$-дистанційна антимагічна розмітка ланцюга P_n з $a \geq 2$?

У роботі [10] показано, що ланцюги порядку 3, 4 і 5 не допускають $(a,1)$-дистанційної антимагічної розмітки, а при $n = 2, 6, 8, 10, 12, 14$ ланцюг P_n має $(a,1)$-дистанційну антимагічну розмітку, яку знайдено за побудовою. Крім цього, побудовано $((n+1)/2, 1)$-дистанційну антимагічну розмітку P_n, коли $n = 7, 9, 11, 13, 15$. Виходячи з цього, запропоновано такі задачі.

Задача 4 [10]**.** Чи існує $((n+1)/2, 1)$-дистанційна антимагічна розмітка ланцюга P_n непарного порядку для $n > 15$?

Задача 5 [10]. Чи існує $(a,1)$-дистанційна антимагічна розмітка ланцюга P_n парного порядку для $n > 14$, коли $a = \frac{n}{2}$ або $a = \frac{n}{2} + 1$?

Відповідь на питання, при яких значеннях a може існувати $(a,1)$-дистанційна антимагічна розмітка P_n, дає теорема 3, де знайдено необхідну умову існування $(a,1)$-дистанційної антимагічної розмітки ланцюга P_n.

Теорема 3. Якщо ланцюг P_n допускає $(a,1)$-дистанційну антимагічну розмітку, то $a = \frac{n}{2}$ або $a = \frac{n+2}{2}$ при парному n та $a = \frac{n+1}{2}$ при непарному n.

Доведення. Позначимо $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ вершини ланцюга P_n. Нехай P_n має $(a,1)$-дистанційну антимагічну розмітку f, тоді

$$2\sum_{i=1}^{n} f(u_i) - (f(u_1) + f(u_n)) = \frac{n(2a+n-1)}{2}$$

або

$$f(u_1) + f(u_n) = \frac{n(n+3-2a)}{2}. \tag{2}$$

Оскільки при будь-якому значенні n справедлива подвійна нерівність $3 \leq f(u_1) + f(u_n) \leq 2n-1$, то з (2) одержимо

$$\begin{cases} \dfrac{n(n+3-2a)}{2} \geq 3, \\ \dfrac{n(n+3-2a)}{2} \leq 2n-1 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} a \leq \dfrac{n+3}{2} - \dfrac{3}{n}, \\ a \geq \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Розглянемо два випадки: нехай n парне, тоді з останньої системи випливає, що $\left\lceil \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n} \right\rceil \leq a \leq \left\lfloor \frac{n+3}{2} - \frac{3}{n} \right\rfloor$, тобто $\frac{n}{2} \leq a \leq \frac{n+2}{2}$; при непарному n число a набуває одного значення: $a = \frac{n+1}{2}$.

Теорему доведено.

Граф G буде (1,1)-дистанційним антимагічним за умови, що кожна компонента G є ізоморфним образом P_2 [2]. Таким чином, G є 1-регулярним графом, який є диз'юнктивним об'єднанням копій ланцюга P_2, тобто $G = mP_2$. Якщо множину вершин i-ї компоненти $G = mP_2$ позначити $V_i = \{u_1^i, u_2^i\}$, де $i = 1, 2, \ldots, m$, то всі (1,1)-дистанційні антимагічні розмітки $G = mP_2$ можна задати таким чином. Розглянемо функцію f, яка задовольняє умови

$$f(u_1^1) = i_1,\ f(u_2^1) = i_2,\ f(u_1^2) = i_3,\ f(u_2^2) = i_4, \ldots, f(u_1^m) = i_{2m-1},\ f(u_2^m) = i_{2m},$$

де $i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots, i_{2m-1}, i_{2m}$ — попарно різні числа, які утворюють множину $\{1, 2, 3, \ldots, 2m\}$. Функція f бієктивна і є вершинною розміткою цього графа. Ваги вершин набувають значень $1, 2, 3, \ldots, 2m$ незалежно від того, як розподілені поміж вершинами мітки з множини $\{1, 2, 3, \ldots, 2m\}$. Тому для mP_2 існує $(2m)!$ різних розміток вершин, кожна з яких є (1,1)-дистанційною антимагічною.

У роботі [2] встановлено, що цикл C_n є (a, d)-дистанційним антимагічним графом при непарному n і $d = 1$, якщо $a, d \geq 2$, то для циклу C_n не існує (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки.

У [10] доведено, що граф mC_n є (a, d)-дистанційним антимагічним, якщо mn непарне і $d = 1$. Поширимо це твердження на випадок r-регулярних графів з $r \geq 2$.

Найчастіше поміж регулярних графів використовують циркулянтні графи $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_m)$, які застосовують в проектуванні обчислювальних мереж, мережі передачі даних і розподілених обчисленнях. Будемо досліджувати окремий випадок циркулянтного графа.

Теорема 4. Циркулянтний граф $C_{2p+2}(2, 3, \ldots, p-1, p+1)$ є $(2p^2 - p - 5, 1)$-дистанційним антимагічним.

Доведення. Розглянемо циркулянтний граф $C_{2p+2}(2, 3, \ldots, p-1, p+1)$ розмірності $p-1$. Для множини його вершин V введемо позначення $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_{2p+2}\}$. Для $p \geq 4$ граф $C_{2p+2}(2, 3, \ldots, p-1, p+1)$ є зв'язним, оскільки НСД $(2, 3, \ldots, p-1, p+1, 2p+2) = 1$, а для $p = 3$ (рис. 1) цей граф має дві компоненти зв'язності. Задамо вершинну розмітку f: $f(u_i) = i$, $f(u_{i+p+1}) = 2p + 3 - i$, де $i = 1, 2, \ldots, p+1$.

Мітки вершин утворюють множину $\{1, 2, \ldots, 2p+2\}$.

Граф $C_{2p+2}(2, 3, \ldots, p-1, p+1)$ є доповненням циркулянтного графа $C_{2p+2}(1, p)$, який допускає дистанційну магічну розмітку [11]. При вершинній розмітці f граф $C_{2p+2}(1, p)$ буде дистанційним магічним з магічною сталою $k = 4p + 6$. Тоді вершини $C_{2p+2}(2, 3, \ldots, p-1, p+1)$ матимуть такі ваги

$$w(u_i) = (2p+3)(p+1) - k - f(u_i) = 2p^2 + p - 3 - f(u_i).$$

Ваги вершин $w(u_1), w(u_2), \ldots, w(u_{2p+2})$ утворюють зростаючу арифметичну прогресію з різницею $d = 1$ і першим членом $a = 2p^2 - p - 5$.

Таким чином, граф $C_{2p+2}(2, 3, \ldots, p-1, p+1)$ є $(2p^2 - p - 5, 1)$-дистанційним антимагічним.

Теорему доведено.

Приклад циркулянтниго графа $C_8(2,4)$ наведено на рис. 1. Він є 3-регулярним (10,1)-дистанційним антимагічним графом розмірності 2. Задамо вершинну

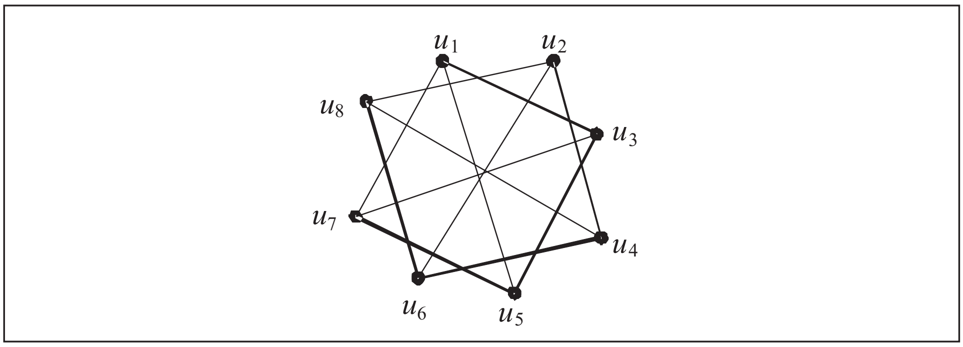

Рис. 1. Циркулянтний граф $C_8(2,4)$

розмітку f, як визначено в теоремі 4: $f(u_1)=1,\ f(u_2)=2,\ f(u_3)=3,\ f(u_4)=4,$ $f(u_5)=8,\ f(u_6)=7,\ f(u_7)=6,\ f(u_8)=5.$ Ваги вершин

$$w(u_1)=f(u_3)+f(u_5)+f(u_7)=17,\ w(u_2)=f(u_4)+f(u_6)+f(u_8)=16,$$

$$w(u_3)=f(u_1)+f(u_5)+f(u_7)=15,\ w(u_4)=f(u_2)+f(u_6)+f(u_8)=14,$$

$$w(u_5)=f(u_1)+f(u_3)+f(u_7)=10,\ w(u_6)=f(u_2)+f(u_4)+f(u_8)=11,$$

$$w(u_7)=f(u_1)+f(u_3)+f(u_5)=12,\ w(u_8)=f(u_2)+f(u_4)+f(u_6)=13$$

утворюють арифметичну прогресію. Тому розмітка f є (10,1)-дистанційною антимагічною для $C_8(2,4)$.

ВИСНОВКИ

В статті одержано нові типи графів, які не допускають (a,d)-дистанційної антимагічної розмітки. Серед них розглянуто корону $P_n \circ P_1$ при $a \le 2,\ d=1$ та запропоновано розв'язати антологічні задачі для випадків, коли $a \le 2,\ d=2$ і $a>2,\ d=1,2.$

Знайдено відповідь на питання, при яких значеннях a може існувати $(a,1)$-дистанційна антимагічна розмітка ланцюга P_n. Це дозволяє обмежити область пошуку таких розміток для парних і непарних значень *n.* Розпочато дослідження циркулянтних графів на наявність (a,d)-дистанційної антимагічної розмітки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gallian J.A. A dynamic survey of graph labeling, Electron // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2015. — **18.** — P. 157–163.
2. Arumugam S., Kamatchi N. On (a,d)-distance antimagic graphs // Australasian Journal of Combinatorics. — 2012. — **54.** — P. 279–287.
3. Vilfred V. Perfectly regular graphs or cyclic regular graphs and Σ-labeling and partitions // Srinivasa Ramanujan Centenary Celebrating-International Conference in Mathematics. — Anna University, Chennai, Tamil Nadu, India. — 1987. — Abstract A23.
4. Miller M., Rodger C., Simanjuntak R. Distance magic labelings of graphs // Australian Journal of Combinatorics. — 2003. — **28.** — P. 305–315.
5. Froncek D. Fair incomplete tournaments with odd number of teams and large number of games // Congressus Numerantium. — 2007. — **187.** — P. 83–89.
6. Gallian J.A. Mathematics and sports. — Mathematical Association of America, 2010. — 338 p.
7. Froncek D. Handicap distance antimagic graphs and incomplete tournaments // AKCE Int. J. Graphs Comb. — 2013. — **10**, N 2. — P. 119–127.

8. Воробьев В.А. Простейшие структуры однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. — 1974. — № 60. — С. 35–45.

9. Boesch F.T., Tindell R. Circulant and their connectivity // J. Graphs Theory. — 1984. — N 8. — P. 487–499.

10. Nalliah M. Antimagic labelings of graphs and digraphs: Ph. D. thesis. — The National Centre for Advanced Research in Discrete Mathematics, University of Kalasalingam, 2014.

11. Cichacz S., Froncek D. Distance magic circulant graphs // Discrete Mathematics. — 2016. — **339**, N 1. — P. 84–94.

Надійшла до редакції 30.03.2016

М.Ф. Семенюта

(a,d)-ДИСТАНЦИОННЯ АНТИМАГИЧЕСКАЯ РАЗМЕТКА ОТДЕЛЬНЫХ ТИПОВ ГРАФОВ

Аннотаация. Изучены необходимые условия существования (a,d)-дистанционной антимагической разметки графа $G=(V,E)$ порядка n. Получены теоремы, расширяющие семейство не (a,d)-дистанционных антимагических графов. В частности, доказано, что корона $P_n \circ P_1$ не допускает $(a,1)$-дистанционной антимагической разметки для $n \geq 2$, если $a \leq 2$. Установлены значения a, при которых цепь P_n может быть $(a,1)$-дистанционным антимагическим графом. Исследован отдельный случай циркулянтного графа.

Ключевые слова: дистанционная магическая разметка, дистанционная антимагическая разметка, (a,d)-дистанционная антимагическая разметка, цепь, регулярный граф, циркулянтный граф.

M.F. Semeniuta

(a,d)-DISTANCE ANTIMAGIC LABELING OF SOME TYPES OF GRAPHS

Abstract. We investigate an (a,d)-distance antimagic labeling of a graph $G=(V,E)$ of order n. Graph which admits such a labeling is called an (a,d)-distance antimagic graph. We analyze the necessary conditions for the existence of this labeling. We obtain the results that expend a family of not (a,d)-distance antimagic graphs. In particular, we prove that the crown $P_n \circ P_1$ does not admit an $(a,1)$-distance antimagic labeling for $n \geq 2$ if $a \leq 2$. We determine the values of a at which path P_n can be an $(a,1)$-distance antimagic graph. Among regular graphs, we investigate the case of a circulant graph.

Keywords: distance magic labeling, distance antimagic labeling, (a,d)-distance antimagic labeling, path, regular graph, circulant graph.

Семенюта Марина Фролівна,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Кіровоградської льотної академії Національного авіаційного університету, e-mail: marina_semenyuta@mail.ru.