УДК 519.2

Л.С. СТОЙКОВА, С.Н. КРАСНИКОВ

ТОЧНЫЕ НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА СИСТЕМЫ В ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ДО ОТКАЗА СИСТЕМЫ

Аннотация. Решаются задачи нахождения точных нижних границ вероятности $F(v)-F(u)$, $0<u<v<\infty$, в множестве функций распределения $F(x)$ неотрицательных случайных величин с унимодальной плотностью с модой m, $u<m<v$, и двумя первыми фиксированными моментами.

Ключевые слова: экстремум линейного функционала, унимодальная функция распределения с модой m и двумя фиксированными моментами, разбиение области параметров.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работ [1–3]. В [1] были найдены точные верхние границы функционала и собрана библиография, относящаяся к данной задаче; вспомогательные преобразования сводят поставленную задачу к более простой. В работе [2] найдены точные нижние границы функционала при ограничении $m<u$. Было введено понятие граничной функции распределения, что облегчает нахождение разбиений области параметров. Впервые были рассмотрены функция распределения G_5 в качестве экстремальной и условия ее существования.

В работе [3] решается эта же задача для случая $v<m$, который впервые выявил возможность перехода из одной подобласти параметров в более чем одну соседнюю подобласть параметров. (Нахождение «соседних» функций распределения и «соседних» областей параметров изложено в [4].) В [3] также показано, что для определения инфимума (супремума) одного и того же функционала можем получить несколько разбиений всей заданной области параметров. Этот главный новый результат требует дальнейших исследований, в частности доказательства, что все возможные численные значения параметров охвачены различными разбиениями.

Объяснить появление нескольких разбиений в области параметров можно следующим образом. Как показано в [4], функция распределения (ф. р.) G_3 может переходить в такие соседние ф. р.: G_2 (если знак выражения $L(B(v),\ v-0)<0$ изменяется на противоположный: $L(B(v), v-0)>0$); G_4 (если в неравенстве $M(0, B(v), v)>0$ изменяется знак: $M(0, B(v), v)<0$); G_6 (если знак неравенства $M(x_{36}, B(v), v)>0$ изменяется на противоположный). Поэтому в зависимости от численного значения вектора параметров и от того, какая из функций: $L(B(v), v-0)$, $M(0, B(v), v)$ или $M(x_{36}, B(v), v)$, раньше изменит свой знак при изменении параметра u, совершается переход к функции G_2, G_4 или G_6 соответственно.

В настоящей статье (случай $u<m<v$) получены результаты для двух вариантов взаимного расположения пяти параметров задачи (2), (3). Поскольку данная задача усложняется возможными различными разбиениями, которые зависят от взаимного расположения параметров, чисто аналитическое ее решение было бы достаточно затруднительным ввиду необходимости отслеживать много вариантов. Однако благодаря численным расчетам соавтора С. Красникова это удалось сделать.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исходная задача формулируется так: найти точные нижние границы функционала

$$I(F)=\int_u^v dF(x),\ 0<u<v<\infty\,, \tag{1}$$

в классе A функций распределения неотрицательных случайных величин, имеющих унимодальную плотность с модой m ($u<m<v$) и два первых фиксированных момента: μ_1, μ_2. Эту исходную задачу назовем задачей (1). Задача (1) сводится к следующей, более простой задаче: найти точные нижние границы интеграла

$$I(F)=R(G)=\int_0^\infty g(x)dG(x),\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{m-u}{m-x},\ 0\le x<u,\\ 1, \qquad u\le x<v\ \ (u<m<v),\\ \dfrac{v-m}{x-m},\ x\ge v,\end{cases} \tag{2}$$

а также найти семейства ф. р., на которых они достигаются, в классе K:

$$K=\left\{G\colon G(0-)=0, G(x)=G(x+0),\ \int_0^\infty x^i\,dG(x)=s_i,\, i=1,2;\ \ 0<s_1^2<s_2<\infty\right\}. \tag{3}$$

О связи μ_1, μ_2 с s_1, s_2 см. в [1]. Интеграл (1) является такой характеристикой надежности системы, как вероятность отказа системы в интервале времени (u, v), если ф.р. времени до отказа системы является $F(x)\in A$. Примеры других характеристик надежности, которые выражаются через линейные функционалы от неизвестной ф. р., можно найти в работах [5–10]. Теория получения обобщенных неравенств Чебышева развивалась во многих публикациях, в том числе в [10–17]. Однако работа, где решалась бы общая задача нахождения точных границ линейных функционалов в классе A, авторам неизвестна.

Решение задачи (2), (3) зависит от пяти параметров: u, v, m, s_1, s_2. Рассмотрим случай $u<m<v$. При этом разбиение области параметров, полученное в задаче (2), (3), сохраняется и для задачи (1) и справедливо равенство $\inf\limits_{G\in K} R(G)=\inf\limits_{F\in A} I(F)$ (см. [1]).

Далее будут использоваться обозначения, введенные в предыдущих статьях автора:

$$B(x)=\frac{s_2-s_1x}{s_1-x}\,,\ x<s_1\ \text{ или }\ x>B(0)\,; \tag{4}$$

$$L(x,\ y)=g'(x)+g'(y)-\frac{2(g(y)-g(x))}{y-x}\,,\ 0<x<y\,; \tag{5}$$

$$M(x,\ y,\ z)=\frac{g'(y)}{y-x}-\frac{g(y)-g(x)}{(y-x)^2}+\frac{g'(y)}{z-y}-\frac{g(z)-g(y)}{(z-y)^2}\,; \tag{6}$$

$$N_1(x,\ y,\ z)=-\frac{g'(x)}{y-x}+\frac{g(y)-g(x)}{(y-x)^2}+\frac{g'(x)}{z-x}-\frac{g(z)-g(x)}{(z-x)^2}\,. \tag{7}$$

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основных теорем 2 и 3, проанализируем возможные экстремальные ф. р. и построим два разбиения области параметров, соответствующих двум вариантам их взаимного расположения.

СЕМЕЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ (2), (3)

Все ф. р. (за исключением граничных), которые будут рассматриваться далее, являются семействами, так как зависят от параметров. (Далее для сокращения текста слово «семейство» будем опускать.)

Особенным для задачи (2), (3) (случай $u< m< v$) является бо́льшее разнообразие экстремальных ф. р., чем в работах [1]–[3]. Это объясняется структурой функции $g(x)$ (см. (2)), которая состоит из трех кривых, соединенных двумя угловыми точками: $x=u,\ x=v$. Так, например, число функций распределения, имеющих две точки роста $x, B(x): L(x, B(x))=0$, равно трем в зависимости от их расположения по отношению к угловым точкам. Обозначим $G_{21}(x)$ ф. р. с точками роста $x_{21} \in (0, u)$ как $B(x_{21}) \in (u, v)$; $G_{22}(x)$ — ф. р. с точками роста $x_{22} \in (u, v)$ как $B(x_{22}) \in (v, \infty)$; $G_{23}(x)$ — ф. р. с точками роста $x_{23} \in (0, u)$ как $B(x_{23}) \in (v,\ \infty)$.

Функция распределения G_5 имеет точки роста 0, y_5, z_5, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} L(y, z)=0, u< y< v< z, \\ M(0,\ y, z)=0, u< y< v< z. \end{cases} \tag{8}$$

Имеем для функции распределения с двумя точками роста $x_1=0,\ y_1=B(0)$: $G_1(x)$ при $B(0) \in (u, v)$ и $G_1{}^*(x)$ при $B(0) \in (v. \infty)$.

Наконец, семейство ф. р. $G_7(x)$ имеет точки роста $x_7 \in (0, u)$, $y_7 \in (u, v)$, $z_7 \in (v, \infty)$, которые удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} L(x,\ y)=0, \\ L(y, z)=0, \\ M(x,\ y, z)=0. \end{cases} \tag{9}$$

Многочлен, соответствующий ф. р. G_7, имеет различные формы старших коэффициентов:

$$a_7=-\frac{g'(x_7)}{y_7-x_7}+\frac{g(y_7)-g(x_7)}{(y_7-x_7)^2}=-\frac{g'(x_7)}{z_7-x_7}+\frac{g(z_7)-g(x_7)}{(z_7-x_7)^2}=$$

$$=\frac{g'(y_7)}{y_7-x_7}-\frac{g(y_7)-g(x_7)}{(y_7-x_7)^2}=-\frac{g'(y_7)}{z_7-y_7}+\frac{g(z_7)-g(y_7)}{(z_7-y_7)^2}=$$

$$=\frac{g'(z_7)}{z_7-x_7}-\frac{g(z_7)-g(x_7)}{(z_7-x_7)^2}=\frac{g'(z_7)}{z_7-y_7}-\frac{g(z_7)-g(y_7)}{(z_7-y_7)^2}. \tag{10}$$

Из (10) следует, что точки x_7, y_7, z_7 удовлетворяют уравнениям (9) и уравнению $N_1(x,\ y, z)=0$ (см. (7)).

Замечание 1. Пусть ф. р. $G(x)$ имеет точки роста $x_1, x_2\ x_3$. Исходя из моментных условий им соответствуют следующие вероятности (скачки):

$$p_1=\frac{(x_2-B(x_3)(x_3-s_1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)};\ \ p_2=\frac{(x_3-B(x_1))(s_1-x_1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)};$$

$$p_3=\frac{(B(x_3)-x_1)(x_3-s_1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)}. \tag{11}$$

Если вероятность в какой-либо точке равна нулю, то две другие точки взаимосвязаны соотношениями

$$p_1=0 \to x_2=B(x_3);\ \ p_2=0 \to x_3=B(x_1);\ \ p_3=0 \to x_2=B(x_1). \tag{12}$$

Если все $p_i>0$, то $\forall i\ p_i>0 \leftrightarrow 0 \le x_1< B(x_3)< x_2< B(x_1)< x_3$.

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВОГО РАЗБИЕНИЯ ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРОВ (ВАРИАНТ 1)

Подобласть разбиения обозначим так же, как и ф. р., экстремальную в этой подобласти. Построим разбиение области параметров для случая $B(0)< m$, $0< u< m$, которое будет соответствовать такой последовательности областей: $G_{22}-G_5-G_1-G_{21}-G_7-G_{23}$.

Граничную ф. р. при переходе $G_{22}-G_5$ обозначим (для сокращения нижних индексов) как G_{25}. Ее точки роста соответствуют $x_{25}=0$; $y_{25}=x_{22}=y_5$; $z_{25}=B(x_{22})=z_5$, причем скачок в точке x_{25} равен нулю. Это означает, что $y_{25}=B(z_{25})$ и граничная ф. р. G_{25} имеет точки роста 0, $B(z_{25})$, z_{25} , а граничная точка $u=u_1$ между областями $G_{22}-G_5$ находится из уравнения $M(0, B(z_{25}), z_{25})=0$, которое следует их равенства старших коэффициентов граничного многочлена U_{25}. Поскольку $[M(0, B(z_{25}), z_{25})]'_u=-\dfrac{1}{mx_{25}^2}<0$ и $[M(0, B(z_{25}), z_{25})]_{u=u_1}=0$, то в области G_{22} $(0< u< u_1)$ имеем $M(0, x_{22}, B(x_{22}))>0$, а в области G_5 $(u_1< u< u_2)$ имеем $M(0, x_{22}, B(x_{22}))< 0.$

Рассмотрим переход G_5-G_1 . Граничная ф. р. G_{51} имеет точки роста $x_{51}=x_5=x_1=0,$ $y_{51}=y_5=y_1=B(0),$ $z_{51}=z_0$, причем скачок в точке z_0 равен нулю. Это означает, что $y_1=B(x_1)$ (см. (12)). Граничное значение параметра $u=u_2$ между подобластями G_5-G_1 и значение z_0 находятся из уравнений $L(B(0), z)=0$, $M(0, B(0), z)=0$. Это следует из свойств граничного многочлена U_{51}.

Если расписать эту систему с учетом (4)–(6), а также что все параметры, кроме параметра u, фиксированы, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными z и u; $z=z_0$, $u=u_2$. Функция $M(0, B(0), z_0)=-\dfrac{u}{mB(0)^2}+$ $+\dfrac{z_0-v}{(z_0-m)(z_0-B(0))^2}$ убывает с ростом параметра *u*. Кроме того, $M(0, B(0), z_0)=$ $=-\dfrac{\varphi_1(z_0)}{(z_0-B(0))^2}$; $[M(0, B(0), z_0]_{u=u_2}=0.$ Поэтому в подобласти G_5 имеем $M(0, B(0), z_0)>0$, а в подобласти G_1 имеем $M(0, B(0), z_0)< 0.$

Далее рассмотрим переход G_1-G_{21}. Граничное значение параметра $u=u_3$ при этом переходе находится из уравнения $L(0, B(0))=0,$ а граничная ф. р. G_{12} имеет точки роста $x_{12}=x_{21}=0$; $y_{12}=y_{21}=B(0)$. Соответствующий функции распределения G_{12} граничный многочлен U_{12} касается функции $g(x)$ в точках 0 и $B(0)$. Так как $[L(0, B(0))]'_u<0,$ то в области G_1 имеем $L(0, B(0))>0$, а в области G_{21} и при всех $u>u_3$ будет выполняться неравенство $L(0, B(0))< 0.$

С ростом параметра *u* от u_3 до u_4 возрастают и точки роста ф. р. G_{21} , и при $u=u_4$ возникает граничная ф. р. G_{27} с точками роста $x_{27}=x_{21}=x_7$; $y_{27}=y_7=B(x_{27})$; $z_{27}=z_7$, причем скачок в точке z_{27} при $u=u_4$ равен нулю (поэтому $y_{27}=B(x_{27})$). При $u>u_4$ имеем $p(z_7)>0$. Значения параметра $u=u_4$, точек x_{27} и z_{27} находятся из уравнений $L(x, B(x))=0,$ $L(B(x), z)=0,$ $M(x, B(x), z)=0.$ Функция $M(x_{27}, B(x_{27}), z_{27})$ представляет собой разность старших коэффициентов граничного многочлена U_{27}, которые равны между собой при $u=u_4$, поэтому $[M(x_{27}, B(x_{27}), z_{27})]_{u=u_4}=0.$ Кроме того, в области G_{21} имеем $M(x_{21}, B(x_{21}), z_{27})=-\dfrac{\varphi_{21}(z_{27})}{(x_{21}-z_{27})^2}$ и $[M(x_{21}, B(x_{21}), z_{27})]'_u>0.$ Поэтому в области G_{21} имеем $M(x_{21}, B(x_{21}), z_{27})<0 \leftrightarrow \varphi_{21}(z_{27})>0$ и в области G_7 имеем $M(x_7, B(x_7), z_{27})>0.$

Таблица 1

Область параметров	Разбиение области параметров для варианта 1	
	Экстремальные функции распределения	Точки роста экстремальных ф. р.
$M(0, x_{22}, B(x_{22}))>0$, $0<u<u_1$	G_{22}	$x_{22} \in (u, v)$, $B(x_{22})>v$
$M(0, B(z_5), z_5)<0$, $M(0, B(0), z_0)>0$, $u_1<u<u_2$	G_5	0, $y_5 \in (u, v)$, $z_5>v$
$M(0, B(0), z_0)<0$, $L(0, B(0))>0$, $u_2<u<u_3$	G_1	0, $B(0) \in (u, v)$
$L(0, B(0))<0$, $M(x_{21}, B(x_{21}), z_{27})<0$, $u_3<u<u_4$	G_{21}	$x_{21} \in (0, u)$; $B(x_{21}) \in (u, v)$
$M(x_7, B(x_7), z_{27})>0$, $N_1(x_7, y_0, B(x_7))<0$, $u_4<u<u_5$	G_7	$x_7 \in (0, u)$; $y_7 \in (u, v)$, $z_7>v$
$N_1(x_{23}, y_0, B(x_{23}))>0$, $u_5<u<m$	G_{23}	$x_{23} \in (0, u)$; $B(x_{23})>v$

Рассмотрим последний переход: $G_7 - G_{23}$. Граничную ф. р. между G_7 и G_{23} обозначим (для сокращения индексов) G_{72}. Она возникает при $u=u_5$ и имеет точки роста $x_{72}=x_7=x_{23}$; $y_{72}=y_7=y_0$; $z_{72}=z_7=B(x_{72})$. Для такого перехода целесообразно использовать функцию $N_1(x, y, z)$ (см. (7)). Граничные значения $u=u_5$; x_{72}; y_0 удовлетворяют системе уравнений $L(x_{72}, y_0)\equiv 0$, $L(y_0, B(x_{72}))\equiv 0$, $N_1(x_{72}, y_0, B(x_{72}))\equiv 0$. Функция N_1 имеет вид

$$N_1(x, y_0, B(x)) = -\frac{m-u}{(m-x)^2(y_0-x)} + \frac{u-x}{(m-x)(y_0-x)^2} + \frac{m-u}{(m-x)^2(B(x)-x)} - \left(\frac{v-m}{B(x)-m} - \frac{m-u}{m-x}\right)\frac{1}{(B(x)-x)^2}.$$

Для нее справедливо следующее:

$$[N_1]'_u = \frac{1}{(m-x)^2(y_0-x)} + \frac{1}{(m-x)(y_0-x)^2} - \frac{1}{(m-x)^2(B(x)-x)} - \frac{1}{(m-x)(B(x)-x)^2} > 0;$$

$N_1(x_7, y_0, B(x_7))=0$ при $u=u_5$. Отсюда следуют неравенства $N_1(x_7, y_0, B(x_7))<0$ в области G_7 и $N_1(x_{23}, y_0, B(x_{23}))>0$ в области G_{23} при $u_5<u<m$. Для наглядности отобразим это разбиение в табл. 1.

Доказательство экстремальности функций распределения в разбиении $G_{22}-G_5-G_1-G_{21}-G_7-G_{23}$ (вариант 1). Известно, что для линейного функционала $R(G)=\int_0^\infty g(x)dG(x)$, $G \in K$ ($g(x)$ — ограниченная функция, дважды дифференцируемая в некоторых точках) справедливо равенство $\inf_{G\in K} R(G) = \inf_{G\in[E]} R(G)$, где $[E]$ — замыкание множества E крайних распределений выпуклого множества K. Оно содержит одно-, двух- или трехступенчатые ф. р. Каждой такой ф. р. $G_i(x)$ соответствует многочлен $U_i(x)$ степени не выше второй, который совпадает с функцией $g(x)$ в точках роста ф. р. $G_i(x)$ и касается $g(x)$ в некоторых из них. Обозначим $\varphi_i(x)=g(x)-U_i(x)$.

В работе [11] доказана следующая теорема.

Теорема 1 [11]. Для того чтобы инфимум линейного функционала $R(G), G\in E$, достигался на некоторой ф. р. $G_i\in E$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x\ge 0{:}\ \varphi_i(x)\ge 0$.

Теорема 1 будет использована при доказательстве теорем 2, 3.

Теорема 2 (вариант 1: $B(0)<m$, $0<u<m$).

— В области, определяемой неравенством $M(0, x_{22}, B(x_{22}))>0$, точная нижняя грань функционала $R(G), G\in K$, достигается на ф. р. $G_{22}(x)$ с точками роста $x_{22}, B(x_{22})$, $L(x_{22}, B(x_{22}))=0$.

— В области параметров, определяемой неравенствами $M(0, x_{22}, B(x_{22}))<0$, $M(0, B(0), z_0)>0$, инфимум функционала $R(G), G\in K$, достигается на ф. р. $G_5(x)$ с точками роста $x_5=0, y_5, z_5$, удовлетворяющих системе (8).

— В области, определяемой неравенствами $M(0, B(0), z_0)<0, L(0, B(0))>0$, точная нижняя грань функционала $R(G), G\in K$, достигается на ф. р. $G_1(x)$ с точками роста $0, B(0)$, $B(0)\in(u, v)$.

— В области параметров, определяемой неравенствами $L(0, B(0))<0$, $M(x_{21}, B(x_{21}), z_{27})<0$, точная нижняя грань функционала $R(G), G\in K$, достигается на ф. р. $G_{21}(x)$ с точками роста $x_{21}\in(0, u)$; $B(x_{21})\in(u, v)$.

— В области параметров, определяемой неравенствами $M(x_7, B(x_7), z_{27})>0$, $N_1(x_7, y_0, B(x_7))<0$, точная нижняя грань функционала $R(G)$, $G\in K$, достигается на ф. р. $G_7(x)$ с точками роста $x_7\in(0, u)$; $y_7\in(u, v)$; $z_7\in(v.\infty)$, удовлетворяющими системе (9).

— В области параметров, определяемой неравенством $N_1(x_{23}, y_0, B(x_{23}))>0$, точная нижняя грань функционала $R(G), G\in K$, достигается на ф. р. $G_{23}(x)$ с точками роста $x_{23}\in(0, u)$; $B(x_{23})>v$.

Замечание 2. Если точная нижняя грань функционала $R(G)$ достигается на двухточечной ф. р., то $\inf\limits_{G\in K} R(G)=\inf\limits_{F\in A} I(F)=\sum\limits_{i=1}^{2} g(x_i)p_i$, где x_1 и x_2 — точки роста соответствующей экстремальной ф. р.; $p_1=\dfrac{x_2-s_1}{x_2-x_1}$; $p_2=\dfrac{s_1-x_1}{x_2-x_1}$.

Если экстремальной является трехточечная ф. р. с точками роста x_1, x_2, x_3, то $\inf\limits_{G\in K} R(G)=\inf\limits_{F\in A} I(F)=\sum\limits_{i=1}^{3} g(x_i)p_i$, где p_i, $i=1-3$, определяются по формулам (11).

Доказательство экстремальности ф. р. G_{22}, G_5, G_1. Рассмотрим ф. р. $G_{22}(x)$. Точка роста x_{22} находится из уравнения $L(x_{22}, B(x_{22}))=0 \leftrightarrow \dfrac{v-m}{B(x_{22})-m}=$ $=\dfrac{2(B(x_{22}-v))}{B(x_{22})-x_{22}}$. Решение этого уравнения существует, поскольку выполняются неравенства $L(B(v), v+0)<0$, $L(B(n), n)>0$ $(n\to\infty)$. Из уравнения следует, что x_{22} и $B(x_{22})$ не зависят от параметра u и остаются постоянными (при фиксированных значениях остальных параметров) на всем интервале $u\in(0, u_1)$. Не зависят от u также многочлен $U_{22}(x)$ и его старший коэффициент a_{22}. Обозначим

$\varphi_{22}(x) = g(x) - U_{22}(x)$. Тогда $\varphi'_{22}(0) = g'(0) + 2a_{22}x_{22} = \dfrac{m-u}{m^2} + 2a_{22}x_{22}$, откуда следует, что $\varphi'_{22}(0)$ убывает с ростом параметра u. Обозначим u_1 граничную точку изменения параметра u при переходе $G_{22} \to G_5$. Она находится из уравнения $M(0, x_{22}, B(x_{22})) = 0$. Значению $u = u_1$ соответствует граничная ф. р. G_{25} с точками роста $x_{25} = 0$ (с вероятностью ноль); $y_{25} = x_{22} = y_5$; $z_{25} = B(x_{22}) = z_5$. При $u = u_1$ совпадают многочлены $U_{22}(x) = U_5(x)$ и $\varphi_{22}(x) = \varphi_5(x)$, в частности $\varphi_{22}(0) = \varphi_5(0)$, $\varphi'_{22}(0) = \varphi'_5(0)$. В интервале $u_1 \le u \le u_2$ функция $\varphi'_5(0) = \dfrac{my_5 - u(y_5 + 2m)}{m^2 y_5}$ убывает с ростом u до $\varphi'_1(0)$, и при $u = u_2$ имеем $\varphi'_5(0) = \varphi'_1(0) = \dfrac{mB(0) - u(B(0) + 2m)}{m^2 B(0)}$; $\varphi'_1(0)$ с ростом в интервале (u_2, u_3) убывает до нуля при $u = u_3$, а при $\forall u > u_3$: $L(0, B(0)) < 0$, так как $(L(0, B(0)))'_u < 0$. Таким образом, $\varphi'_1(0) \ge 0$ при $u \ge u_2$, а значит, и $\varphi'_5(0) > 0$ при $u_1 \le u \le u_2$; следовательно, $\varphi'_{22}(0) > 0$ в интервале $0 \le u \le u_1$.

Итак, для $x \in [0, u]$, $u \in [0, u_1]$ имеем $\varphi''_{22}(x) > 0$, $\varphi_{22}(0) = 0$, $\varphi'_{22}(0) > 0$. Из этого следует, что $\varphi_{22}(x) \ge 0$ для указанных значений x и u.

Аналогично для ф. р. $G_5(x)$ имеем $\varphi_5(0) = 0$, $\varphi'_5(0) > 0$, $\varphi''_5(x) > 0$, при этом $x \in (0, u)$, $u \in [u_1, u_2]$. Отсюда $\varphi_5(x) \ge 0$ $\forall x \in (0, u)$.

Аналогично для ф. р. $G_1(x)$ при $x \in (0, u)$, $u \in [u_2, u_3]$ справедливо $\{\varphi_1(0) = 0$, $\varphi'_1(0) > 0$, $\varphi''_1(x) > 0\} \to \varphi_1(x) \ge 0$ $\forall x \in (0, u)$.

Доказательства неравенств $\varphi_{22}(x) \ge 0$ $\forall x \in (u, v) \cup (v. \infty)$; $\varphi_5(x) \ge 0$ $\forall x \in (u, v) \cup (v, \infty)$ и $\varphi_1(x) \ge 0$ $\forall x \in (u, v)$ — тривиальны.

Для полного доказательства экстремальности ф. р. $G_1(x)$ остается доказать, что $\varphi_1(x) \ge 0$ при $\forall x > v$, $u \in [u_2, u_3]$. Согласно условию теоремы в этой области выполняется неравенство $M(0, B(0), z_0) < 0$. Справедливо равенство $M(0, B(0), z_0) = -\dfrac{\varphi_1(z_0)}{(z_0 - B(0))^2}$. Поэтому $\varphi_1(z_0) > 0$ при $u \in (u_2, u_3)$. При $u = u_2$ граничная ф. р. имеет точки роста $x_{51} = 0$, $y_{51} = B(0)$, $z_{51} = z_0$, $p(z_0) = 0$; кроме того, $\varphi_{51}(x) = \varphi_1(x) = \varphi_5(x)$ и $\varphi_{51}(z_0) = 0 = \varphi'_{51}(z_0)$. Исходя из выражений $\varphi''_1(x) > 0$ $\forall x > v$, $\varphi_1(z_0) > 0$ при $u \in (u_2, u_3)$ и $\varphi_1(z_0) = 0 = \varphi'_1(z_0)$ при $u = u_2$, следует, что функция $\varphi_1(x)$ имеет минимум в точке $z = z_0$. Таким образом, $\varphi_1(x) \ge 0$ при $\forall x > v$, $u \in (u_2, u_3)$.

Доказательство экстремальности ф. р. G_{21}. Функция распределения G_{21} существует при $u \in [u_3, u_4]$, так как в этом интервале выполняются неравенства $L(0, B(0)) < 0$ и $L(u-0, B(u)) > 0$, если $B(u) \in (u, v)$, или неравенство $L(B(n), n) > 0$, если $s_1 < u$. Достаточно доказать, что $\varphi_{21}(x) \ge 0$ $\forall x > v$. Для $x > v$ справедливы неравенства $\varphi_{21}(v + 0) > 0$, $\varphi'_{21}(\infty) > 0$, $\varphi''_{21}(x) > 0$. А при $u = u_4$ имеем $\varphi_{21}(z_{27}) = 0 = \varphi'_{21}(z_{27})$, т.е. функция $\varphi_{21}(x)$ выпукла вниз, имеет в точке z_{27} минимум, равный нулю при $u = u_4$. Следовательно, $\varphi_{21}(x) \ge 0$ $\forall x > v$, $u \in [u_3, u_4]$.

Доказательство экстремальности ф. р. G_7. В подобласти G_7 выполняются следующие условия. При $u = u_4$: $M(x_{27}, B(x_{27}), z_0) = 0$; при $u_4 < u < u_5$: $M(x_7, B(x_7), z_0) > 0$, $N_1(x_7, y_0, B(x_7)) < 0$; при $u = u_5$: $N_1(x_{72}, y_0, B(x_{72})) = 0$ (определение $N_1(x, y, z)$ см. (7)). Доказательство экстремальности семейства ф. р. G_7 тривиально.

Доказательство экстремальности семейства ф. р. G_{23}. При $u > u_5$ (см. табл. 1) справедливо неравенство $N_1(x_{23}\, y_0, B(x_{23})) > 0$. Функция N_1 имеет

Таблица 2

Значение параметра u	Нахождение инфимума (вариант 1)		
	Точки роста экстремума ф. р.	Инфимум	Супремум
$u \in (0{,}1;\ 0{,}87)$	$x_{22} = 4{,}76;\ 4{,}78;\ B(x_{22}) = 12{,}38$	0,979	1
$u \in (0{,}88;\ 1{,}74)$ $u = 1{,}74$	$x_5 = 0;\ y_5 = 4{,}78;\ z_5 = 12{,}39$ $x_5 = 0;\ y_5 = 5{,}78;\ z_5 = 12{,}07$	0,979 0,97	1 1
$u_2 = 1{,}75,\ z_0 = 12$ $u \in (1{,}75;\ 1{,}95)$	$x_1 = 0;\ y_1 = B(0) \approx 5{,}78;\ 5{,}79$	0,967	1
$u_3 = 1{,}96$ $u \in (1{,}96;\ 5{,}21)$ $u = 5{,}21$	$x_{21} = 0{,}016;\ y_{21} = 5{,}78;\ 5{,}8$ $x_{21} = 4{,}26;\ y_{21} \approx 8{,}44;\ 8{,}45$	0,967 0,966	1 1
$u_4 = 5{,}22;\ z_{27} = 11{,}02$ $u = 5{,}4$ $u = 5{,}46$	$x_7 = 4{,}27;\ y_7 = 8{,}47;\ z_{27} = 11{,}02$ $x_7 = 4{,}56;\ y_7 = 8{,}625;\ z_7 = 10{,}94$ $x_7 = 4{,}65;\ y_7 = 8{,}67;\ z_7 = 10{,}91$	0,572 0,478 0,439	0,964 0,945 0,938
$u_5 = 5{,}47;\ y_0 = 8{,}68$ $u = 5{,}5$ $u = 5{,}67$ $u = 5{,}8$ $u = 5{,}9$	$x_{23} = 4{,}67;\ 4{,}68;\ y_{23} = 10{,}92$ $x_{23} = 4{,}67;\ 4{,}68;\ y_{23} = 11{,}055$ $x_{23} = 4{,}75;;\ 4{,}68;\ y_{23} = 12$ $x_{23} = 4{,}81;\ 4{,}84;\ y_{23} = 13{,}75$ $x_{23} = 4{,}92;\ 4{,}93;\ y_{23} = 16{,}44$	0,433 0,412 0,289 0,186 0,1	0,937 0,934 0.915 0,898 0,86

связь с $\varphi_{23}(x) = g(x) - U_{23}(x)$: $N_1(x_{23}\, y_0,\, B(x_{23})) = \dfrac{\varphi_{23}(y_0)}{(y_0 - x_{23})^2}$. Из неравенства для N_1 следует $\varphi_{23}(y_0) > 0$ в области G_{23} . Для доказательства экстремальности ф. р. G_{23} достаточно доказать, что $\varphi_{23}(x) \geq 0,\ x \in (u, v)$. Для этого интервала имеет место $\varphi''_{23}(x) = -2a_{23} > 0$. При $u = u_5$: $\varphi_{23}(y_0) = 0,\ \varphi'_{23}(y_0) = 0$, т.е. в интервалах (u, v), (u_5, m) функция $\varphi_{23}(x)$ имеет минимум в точке y_0, равный нулю. Поэтому $\varphi_{23}(x) \geq 0,\ x \in (u, v)$, что и требовалось доказать.

Для наглядности и проверочных вычислений приводим численный пример (табл. 2). Инфимум в задачах (1) и (2), (3) найден для случая $u < m < v$ (вариант 1 $(B(0) < m)$) . Исходные данные: $s_1 = 5{,}2$; $s_2 = 30{,}1$; $B(0) = 5{,}788$; $m = 6$; $v = 10$; $B(v) = 4{,}56$.

ПОСТРОЕНИЕ ВТОРОГО РАЗБИЕНИЯ ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРОВ (ВАРИАНТ 2)

Второе разбиение относится к следующему взаиморасположению параметров: $u < m < s_1 < B(0) < v$ (вариант 2). Этому варианту соответствует такая последовательность областей параметров: $G_{22} - G_5 - G_7 - G_{23}$. Переход $G_{22} - G_5$ изложен в варианте 1. Рассмотрим переход $G_5 - G_7$. В области G_5 необходимым условием ее экстремальности есть неравенство $L(0,\ y_5) > 0 \leftrightarrow \varphi'_5(0) > 0$. Как известно [4], функция $L(0,\ y_5)$ является переходной от ф. р. G_5 к ф. р. G_7. Действительно, $L(0,\ y_5) = g'(0) + g'(y_5) - \dfrac{2(g(y_5) - g(0))}{y_5^2} = \dfrac{m-u}{m^2} - \dfrac{2u}{my^2}$, $L'_u < 0.$

Граничная ф.р. G_{57} (между G_5 и G_7) имеет точки роста: $x_{57} = x_5 = 0 = x_7$; $y_{57} = B(z_{57})$; $z_{57} = z_5 = z_7$, а соответствующий граничный многочлен U_{57} касается функции $g(x)$ во всех трех точках. Граничное значение параметра $u = u_2$ и значение $B(z_{57})$ находятся из уравнений $M(0, B(z_{57}), z_{57}) = 0$, $L(0, B(z_{57})) = 0$. В области G_5 справедливо неравенство $L(0,\ y_5) > 0$, а в области G_7 — неравенство $L(0,\ y_7) < 0$. Наконец, рассмотрим переход $G_7 - G_{23}$. Граничная ф. р. G_{72} (между G_7 и G_{23}) имеет точки роста: $x_{72} = x_{23} = x_7$;

Таблица 3

Область параметров	Разбиение области параметров для варианта 2	
	Экстремальные функции распределения	Точки роста экстремальных ф. р.
$M(0, x_{22}, B(x_{22}))>0,\ 0<u<u_1$	G_{22}	$x_{22}\in(u,v),\ B(x_{22})>v$
$M(0, B(z_5), z_5)<0$, $L(0, y_5)>0$, $u_1<u<u_2$	G_5	$0,\ y_5\in(u,v),\ z_5>v$
$M(x_7, y_0, B(x_7))>0$, $L(0, y_7)<0$, $u_2<u<u_3$	G_7	$x_7\in(0,u)$; $y_7\in(u,v),\ z_7>v$
$M(x_{23}, y_0, B(x_{23}))<0$, $u_3<u<m$	G_{23}	$x_{23}\in(0,u)$; $B(x_{23})>v$

$y_{72}=y_7=y_0$; $z_{72}=B(x_{23})=z_7$, а соответствующий граничный многочлен U_{72} касается функции $g(x)$ во всех трех точках. Граничное значение параметра $u=u_3$ и значения y_0, x_{72} находятся из уравнений $M(x_{72}, y_0, B(x_{72}))=0$, $L(x_{72}, y_0)=0$, $L(y_0, B(x_{72}))=0$. В области G_7 справедливо неравенство $M(x_7, y_0, B(x_7))>0$, а в области G_{23} — неравенство $M(x_{23}, y_0, B(x_{23}))<0$. Справедливость следует из неравенства $M(x_{72}, y_0, B(x_{72}))'_u<0$. Для наглядности отобразим это разбиение в табл. 3.

Теорема 3 (вариант 2: $0<u<m<s_1<B(0)<v$).

— В области, определяемой неравенством $M(0, x_{22}, B(x_{22}))>0$, точная нижняя грань функционала $R(G), G\in K$, достигается на ф. р. $G_{22}(x)$ с точками роста $x_{22}, B(x_{22})$, $L(x_{22}, B(x_{22}))=0$.

— В области параметров, определяемой неравенствами $M(0, y_5, B(y_5))<0$; $L(0, y_5)>0$, инфимум функционала $R(G), G\in K$, достигается на ф. р. $G_5 x)$ с точками роста $x_5=0$, y_5, z_5, удовлетворяющих системе (8).

— В области параметров, определяемой неравенствами $L(0, y_7)<0$, $M(x_7, y_0, B(x_7))>0$, точная нижняя грань функционала $R(G), G\in K$, достигается на ф. р. G_7 с точками роста $x_7\in(0,u)$; $y_7\in(u,v)$; $z_7>v$, удовлетворяющих системе (9).

— В области параметров, определяемой неравенством $M(x_7, y_0, B(x_7))<0$, точная нижняя грань функционала $R(G), G\in K$, достигается на ф. р. $G_{23}(x)$ с точками роста $x_{23}\in(0,u)$; $B(x_{23})>v$.

Доказательство экстремальности ф. р. G_{22}, G_5 аналогично доказательству экстремальности этих ф. р. в варианте 1.

Рассмотрим переход G_5-G_7. В подобласти G_7 выполняются неравенства, изложенные в табл. 3. Они обеспечивают существование ф. р. G_7. При $u=u_2$: $L(0, y_{57})=0$; при $u=u_3$: $M(x_{72}, y_{72}, B(x_{72}))=0$. Доказательство экстремальности семейства ф. р. G_7 тривиально. Доказательство экстремальности семейства ф. р. G_{23} достаточно выполнить для интервала $x\in(u,v)$; $u\in[u_3, m)$. Докажем, что $\varphi_{23}(x)\ge 0\ \forall x\in(u,v)$. Вычислим $\varphi_{23}(y_{72})=g(y_{72})-U_{23}(y_{72})=$

$$=\left(\frac{g(y_{72})-g(x_{23})}{(y_{72}-x_{23})^2}-\frac{g'(x_{23})}{y_{72}-x_{23}}-a_{23}\right)(y_{72}-x_{23})^2.$$

Из непосредственных преобразований следует $[\varphi_{23}(y_{72})]'_u>0$, т.е. $\varphi_{23}(y_{72})$ растет с ростом u от нуля при $u=u_3$. Следовательно, $\varphi_{23}(y_{72})$ положительна в области G_{23}. Из выражений

$$\begin{cases}\varphi''_{23}(x)>0,\ x\in(u,v);\\ \varphi_{23}(y_{72})=0,\ \varphi'_{23}(y_{72})=0,\ \text{если } u=u_3,\end{cases}$$

следует $\varphi_{23}(x)\ge 0\ \forall x\in(u,v)$, что и требовалось доказать.

Таблица 4

Значение параметра u	Нахождение инфимума (вариант 2)		
	Точки роста экстремума ф. р.	Инфимум	Супремум
$u \in (0{,}1;\ 1{,}13)$	$x_{22} = 7{,}28;\ 7{,}31;\ y_{22} = 18{,}72$	0,945	1
$u_1 = 1{,}131$	$x_{25} = 0;\ y_{25} = 7{,}3;\ z_{25} = 18{,}72$	0,945	1
$u = 2$	$x_5 = 0;\ y_5 = 8{,}59;\ z_5 = 18{,}3$	0,940	1
$u_2 = 2{,}98$ $u = 6$ $u = 7$	$x_{57} = 0;\ y_{57} = 9{,}5;\ z_{57} = 17{,}98$ $x_7 = 4{,}04;\ y_7 = 11{,}8;\ z_7 = 17{,}03$ $x_7 = 5{,}55;\ y_7 = 12{,}625;\ z_7 = 16{,}62$	0,928 0,798 0,649	1 1 0,995
$u_3 = 7{,}62$ $u = 7{,}66$ $u = 7{,}8$	$x_{72} = 6{,}7;\ y_{72} = 13{,}23;\ z_{72} = 16{,}3$ $x_{23} = 6{,}74;\ y_{23} \approx 16{,}42;\ 16{,}43$ $x_{23} = 6{,}98;\ y_{23} \approx 17{,}24;\ 17{,}25$	0,43 0,406 0,312	0,992 0,991 0,990

Для наглядности и проверочных вычислений приводим численный пример (табл. 4). Инфимум в задачах (1) и (2), (3) находится для случая $u < m < v$ $(u < m < s_1 < B(0) < v)$. Исходные данные: $s_1 = 9{,}1;\ s_2 = 100{,}1;\ B(0) = 11{,}1;$ $m = 8;\ v = 15;\ B(v) = 6{,}16.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая статья продолжает цикл работ [1–3], посвященных нахождению точных верхних и нижних границ вероятности отказа системы в заданном интервале (u, v) времени, когда ф. р. времени до отказа системы неизвестна, а известны только два первых ее момента и мода.

В этой работе получены новые результаты для случая, когда мода находится внутри заданного интервала. Они интересны тем, что при большом интервале (u, v) точные нижние оценки могут достигать высоких значений, например 0,979–0,967, которые уменьшаются с уменьшением интервала и удалением от него моментов (см. табл. 2, вариант 1 и табл. 4, вариант 2). Однако следует отметить, что остаются нерассмотренными вопросы получения полного разбиения всей числовой области параметров и вопросы существования ф. р. $G_5 - G_7$ при изменении параметров задачи. Эти темы могут стать основой для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стойкова Л.С. Точные верхние границы вероятности отказа системы в интервале времени при неполной информации о функции распределения // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 5. — С.72–83.
2. Стойкова Л.С. Точные нижние границы вероятности отказа системы в интервале времени при неполной информации о функции распределения // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — № 2. — С. 108–116.
3. Стойкова Л.С., Красников Н.И. Точные нижние границы вероятности отказа системы в интервале времени при неполной информации о функции распределения // East European Scientific Journal (Warszawa, Polska). — 2015. — **1**, № 4(4). — С. 94–105.
4. Стойкова Л.С. Обобщенные неравенства Чебышева и их применение в математической теории надежности // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 3. — С. 139–143.
5. Барзилович Е.Ю., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. О минимаксных критериях в задачах надежности // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1971. — № 3. — С. 87–98.
6. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. — М.: Сов. радио, 1969. — 488 с.

7. Gertsbakh I. Reliability theory with applications to preventive maintenance. — Berlin: Springer, 2000. — 219 p.
8. Коваленко И.Н. Исследования по надежности сложных систем. — К.: Наук. думка, 1975. — 210 с.
9. Голодников А.Н., Ермольев Ю.М., Кнопов П.С. Оценивание параметров надежности в условиях недостаточной информации // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 3. — С. 109–125.
10. Стойкова Л.С. Дослідження узагальнених нерівностей Чебишова з застосуванням до математичної теорії надійності: Дис. ... д-р фіз.-мат. наук. — Київ: НАН України, Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова, 1995. — 154 с.
11. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М: Наука, 1973. — 551 с.
12. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. — М.: Наука, 1976. — 568 с.
13. Shohat J.A., Tamarkin J.D. The problem of moments. Math. Surveys. — New York: Amer. Math. Soc., 1943. — 140 p.
14. Godwin H. J. On generalization of Tchebychef's inequality // J. Amer. Stat. Assoc. — 1955. — **50.** — P. 923–945.
15. Савидж И.Р. Вероятностные неравенства чебышевского типа // Сб. переводов. Математика. — 1962. — **6**, № 4. — С.71–95.
16. Стойкова Л.С., Сакович Г.Н. Точні верхні оцінки для функції розподілу в класі одновершинних розподілів з фіксованими моментами // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1988. — № 1. — С. 28–31.
17. Johnson N.L., Rogers C.A. The moment problem for unimodal distribution // Ann. Math. Stat. — 1951. — **22.** — P. 433–439.

Надійшла до редакції 28.04.2016

Л.С. Стойкова, С.М. Красніков

ТОЧНІ НИЖНІ ГРАНИЦІ ІМОВІРНОСТІ ВІДМОВИ СИСТЕМИ В ІНТЕРВАЛІ ЧАСУ ПРИ НЕПОВНІЙ ІНФОРМАЦІЇ ЩОДО ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ЧАСУ ДО ВІДМОВИ СИСТЕМИ

Анотація. Розв'язано задачі знаходження точних нижніх границь імовірності $F(v)-F(u), 0<u<v<\infty$, в множині функцій розподілу $F(x)$ невід'ємних випадкових величин з унімодальною щільністю з модою m, $u<m<v$, і двома першими фіксованими моментами.

Ключові слова: екстремум лінійного функціонала, унімодальна функція розподілу з модою m і двома фіксованими моментами, розбиття області параметрів.

L.S. Stoikova, S.N. Krasnikov

EXACT LOWER BOUNDS OF SYSTEM FAILURE PROBABILITY ON A TIME INTERVAL UNDER INCOMPLETE INFORMATION ABOUT THE DISTRIBUTION FUNCTION OF TIME TO FAILURE

Abstract. The authors solve problems of finding exact lower bounds for the probability $F(v)-F(u)$, $0<u<v<\infty$, in the set of distribution functions $F(x)$ of nonnegative random variables with unimodal density with mode m, $u<m<v$, and two first fixed moments.

Keywords: extremum of a linear functional, unimodal distribution function with mode m and two first moments, partition of the domain of parameters.

Стойкова Лидия Степановна,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Киев, e-mail: stojk@ukr.net.

Красников Сергей Николаевич,
аспирант Института специальной связи и защиты информации Национального технического университета Украины «КПИ», Киев, e-mail: wokinsark@gmail.com.