УДК 519.87

И.А. САВЧЕНКО

ОЦЕНИВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА МОРФОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Аннотация. Предложена методика оценивания чувствительности решения, полученного модифицированным методом морфологического анализа, к изменению исходных данных. Приведен новый способ определения вероятностей альтернатив в методе. На его основе разработаны приемы анализа чувствительности пар альтернатив относительно перестановки рангов между ними при изменении как исходных оценок вероятности, так и значений матрицы взаимосвязей.

Ключевые слова: анализ чувствительности, метод морфологического анализа, поддержка принятия решений, технологическое предвидение, экспертное оценивание.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе решения задач предвидения [1] большинство исследуемых объектов, процессов, явлений характеризуются неточностью, неопределенностью, неполнотой, нечеткостью информации, поэтому традиционные математические модели и подходы невозможны или нецелесообразны. Это обусловило появление ряда методов качественного анализа, одним из которых является модифицированный метод морфологического анализа (ММMA) [2, 3]. Объект исследования представляется в виде морфологической таблицы, состоящей из его характеристических параметров, каждому из которых соответствует присущий ему набор альтернатив.

Для работы с объектом в таком виде в ММMA проводится экспертное оценивание вероятностей альтернатив и значений матрицы взаимосвязей, на основании которого рассчитываются окончательные оценки вероятностей альтернатив, учитывающих возможные взаимосвязи между параметрами объекта [3]. Эти оценки можно использовать для принятия решения или в качестве исходных данных для второго этапа ММMA, на котором оцениваются ожидаемые результативности альтернатив морфологической таблицы.

Экспертное оценивание, являющееся основой методов качественного анализа, часто единственный источник информации об объектах предвидения. Однако экспертные оценки субъективны и отражают реальный мир только в некотором приближении. В связи с этим, если на основании результатов методов качественного анализа принимается решение, всегда существует возможность того, что неточность исходных данных приведет к ошибочному ранжированию альтернатив.

Для решения этой проблемы иногда выполняют анализ чувствительности. В частности, существуют исследования в данном направлении для метода анализа иерархий [4, 5]. Такой подход позволяет определить, какие исходные оценки более критичны, т.е. приводят к изменению рангов альтернатив в конечном ранжировании при меньших отклонениях. На эти оценки необходимо обратить особое внимание и, возможно, провести уточняющее оценивание, поскольку полученная информация может оказаться определяющей для принятия решения.

Целью данной статьи является разработка методики анализа чувствительности для ММMA.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе используется процедура ММMA, описанная в [3]. В этом методе существует два разных типа оценок, получаемых от экспертов: начальные оценки альтернатив и значения матрицы взаимосвязей, определяющие отношения между альтернативами разных параметров. Поэтому анализ чувствительности необходимо проводить относительно обоих типов оценок.

Постановку задачи сформулируем следующим образом.

Дано:

• морфологическая таблица, содержащая множество характеристических параметров $F=\{F_i \mid i\in\overline{1,N}\}$; каждый параметр F_i описывается множеством альтернатив $A_i=\{a_j^{(i)} \mid j\in\overline{1,n_i}\}$;

• независимые значения вероятностей всех альтернатив $\{p_j'^{(i)} \mid i\in\overline{1,N};\ j\in\overline{1,n_i}\}$, полученные от экспертов;

• значения взаимосвязей всех пар альтернатив параметров $\{c_{i_1j_1,i_2j_2}\in [0;2] \mid i_1,i_2\in\overline{1,N};\ i_1\neq i_2;\ j_1\in\overline{1,n_{i1}};\ j_2\in\overline{1,n_{i2}}\}$; для простоты дальнейшей записи здесь и далее используются смещенные на единицу оценки матрицы взаимосвязей;

• рассчитанные в ходе процедуры ММMA значения вероятности всех альтернатив $\{p_j^{(i)} \mid i\in\overline{1,N};\ j\in\overline{1,n_i}\}$.

Необходимо:

• определить пороговые величины $\tilde{\delta}_{j_d}^{(i_d)}(a_{j_1}^{(i_1)},a_{j_2}^{(i_1)})$ относительного изменения независимых значений вероятностей $p_{j_d}'^{(i_d)}$, которое приводит к изменению ранжирования в паре $(a_{j_1}^{(i_1)},a_{j_2}^{(i_1)})$;

• определить пороговые величины $\tilde{\delta}_{i_{d1}j_{d1},i_{d2}j_{d2}}^{C}(a_{j_1}^{(i_1)},a_{j_2}^{(i_1)})$ относительного изменения значений матрицы взаимосвязей $c_{i_{d1}j_{d1},i_{d2}j_{d2}}$, которое приводит к изменению ранжирования в паре $(a_{j_1}^{(i_1)},a_{j_2}^{(i_1)})$.

ОЦЕНИВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ

Для определения вероятностей реализации альтернатив в ММMA используется система уравнений для полной вероятности, коэффициентами которой являются значения условной вероятности, аппроксимируемые на основе исходных данных с учетом нескольких условий [3]. Предлагается следующее выражение для значений условной вероятности, удовлетворяющее этим условиям:

$$P(a_{j_1}^{(1)} \mid a_{j_2}^{(2)})=\frac{p_{j_1}'^{(1)}c_{1j_1,2j_2}}{\sum_{j=1}^{n_1}p_j'^{(1)}c_{1j_1,2j_2}}. \tag{1}$$

Введем обозначения матрицы взаимосвязей для первого и второго параметров $C_{1,2}=\{c_{1j_1,2j_2} \mid j_1\in\overline{1,n_1};\ j_2\in\overline{1,n_2}\}$, а также векторов значений независимой вероятности $\vec{p}_i=\{p_j'^{(i)} \mid j\in\overline{1,n_i}\}$, полученных от экспертов. Также введем обозначения для матриц значений условных вероятностей:

$$P_1 = \begin{pmatrix} P(a_1^{(1)} | a_1^{(2)}) & \ldots & P(a_1^{(1)} | a_{n_2}^{(2)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P(a_{n_1}^{(1)} | a_1^{(2)}) & \ldots & P(a_{n_1}^{(1)} | a_{n_2}^{(2)}) \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} P(a_1^{(2)} | a_1^{(1)}) & \ldots & P(a_1^{(2)} | a_{n_1}^{(1)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P(a_{n_2}^{(2)} | a_1^{(1)}) & \ldots & P(a_{n_2}^{(2)} | a_{n_1}^{(1)}) \end{pmatrix}.$$

С помощью введенных обозначений и с учетом (1) матрицы P_1, P_2 можно записать в виде

$$P_1 = \operatorname{diag}(\vec{p}_1) C_{1,2} \operatorname{diag}(C_{1,2}^{\mathrm{T}} \vec{p}_1)^{-1}, \; P_2 = \operatorname{diag}(\vec{p}_2) C_{1,2}^{\mathrm{T}} \operatorname{diag}(C_{1,2} \vec{p}_2)^{-1}. \qquad (2)$$

Отметим, что из-за условия нормирования матрицы P_1, P_2 стохастические слева, т.е. сумма элементов каждого столбца равна единице.

Система уравнений для определения значений вероятностей альтернатив имеет вид

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = P_1 \vec{x}_2, & ||\vec{x}_1|| = 1, \\ \vec{x}_2 = P_2 \vec{x}_1, & ||\vec{x}_2|| = 1, \end{cases} \qquad (3)$$

где $\vec{x}_1 = \{p_j^{(1)} | j \in \overline{1, n_1}\}, \vec{x}_2 = \{p_j^{(2)} | j \in \overline{1, n_2}\}$. Решением этой системы будут нормированные собственные векторы матриц $P_1 P_2$ и $P_2 P_1$, соответствующие собственному числу 1. Подставим выражения (2) в систему (3):

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \operatorname{diag}(\vec{p}_1) C_{1,2} \operatorname{diag}(C_{1,2}^{\mathrm{T}} \vec{p}_1)^{-1} \vec{x}_2, \\ \vec{x}_2 = \operatorname{diag}(\vec{p}_2) C_{1,2}^{\mathrm{T}} \operatorname{diag}(C_{1,2} \vec{p}_2)^{-1} \vec{x}_1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \operatorname{diag}(\vec{p}_1)^{-1} \vec{x}_1 = C_{1,2} \operatorname{diag}(C_{1,2}^{\mathrm{T}} \vec{p}_1)^{-1} \vec{x}_2, \\ \operatorname{diag}(\vec{p}_2)^{-1} \vec{x}_2 = C_{1,2}^{\mathrm{T}} \operatorname{diag}(C_{1,2} \vec{p}_2)^{-1} \vec{x}_1. \end{cases} \qquad (4)$$

Введем замену

$$\vec{y}_1 = \operatorname{diag}(\vec{p}_1)^{-1} \operatorname{diag}(C_{1,2} \vec{p}_2)^{-1} \vec{x}_1, \; \vec{y}_2 = \operatorname{diag}(\vec{p}_2)^{-1} \operatorname{diag}(C_{1,2}^{\mathrm{T}} \vec{p}_1)^{-1} \vec{x}_2. \qquad (5)$$

С учетом замены (5) система (4) примет вид

$$\begin{cases} \operatorname{diag}(C_{1,2} \vec{p}_2) \vec{y}_1 = C_{1,2} \operatorname{diag}(\vec{p}_2) \vec{y}_2, \\ \operatorname{diag}(C_{1,2}^{\mathrm{T}} \vec{p}_1) \vec{y}_2 = C_{1,2}^{\mathrm{T}} \operatorname{diag}(\vec{p}_1) \vec{y}_1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \vec{y}_1 = \operatorname{diag}(C_{1,2} \vec{p}_2)^{-1} C_{1,2} \operatorname{diag}(\vec{p}_2) \vec{y}_2, \\ \vec{y}_2 = \operatorname{diag}(C_{1,2}^{\mathrm{T}} \vec{p}_1)^{-1} C_{1,2}^{\mathrm{T}} \operatorname{diag}(\vec{p}_1) \vec{y}_1. \end{cases} \qquad (6)$$

В системе (6) теперь содержатся выражения (2) для транспонированных матриц P_1, P_2, т.е. систему (6) можно записать в виде

$$\begin{cases} \vec{y}_1 = P_2^{\mathrm{T}} \vec{y}_2, \\ \vec{y}_2 = P_1^{\mathrm{T}} \vec{y}_1. \end{cases}$$

Решением этой системы будут собственные векторы матриц $P_2^{\mathrm{T}} P_1^{\mathrm{T}}$ и $P_1^{\mathrm{T}} P_2^{\mathrm{T}}$, соответствующие собственному числу 1. Поскольку транспонированные матрицы P_1, P_2 являются стохастическими, их произведение также будет стохастической матрицей, а стохастическая матрица всегда имеет собственный вектор $\vec{1} = (1\ 1 \ldots 1)^{\mathrm{T}}$, соответствующий собственному числу 1 [6].

Следовательно, решение системы (3) находим из таких выражений:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \operatorname{diag}(C_{1,2}\,\vec{p}_2)\operatorname{diag}(\vec{p}_1)\,\vec{1} = \operatorname{diag}(C_{1,2}\,\vec{p}_2)\,\vec{p}_1, \\ \vec{x}_2 &= \operatorname{diag}(C_{1,2}^{\mathrm{T}}\,\vec{p}_1)\,\vec{p}_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Полученные таким образом значения вероятности являются ненормированными. Для определения окончательного результата их следует нормировать. В дальнейшем будем обозначать $x_j^{(i)}$ ненормированные величины, полученные из (7), а $p_j^{(i)}$ — соответствующие нормированные величины. Отметим также, что нормирование не меняет отношение между значениями вероятности альтернатив одного параметра.

Решение в виде (7) позволяет оценить все три вида чувствительности. Пронумеруем альтернативы параметров так, чтобы для любых альтернатив $a_{j_1}^{(i)}$, $a_{j_2}^{(i)}$, $j_1 < j_2$, параметра F_i выполнялось неравенство $p_{j_1}^{(i)} > p_{j_2}^{(i)}$. Запишем из (7) отношения рассчитанных значений вероятностей $p_{j_1}^{(1)}$, $p_{j_2}^{(1)}$ альтернатив $a_{j_1}^{(1)}$, $a_{j_2}^{(1)}$, $j_1 < j_2$, параметра F_1:

$$\frac{p_{j_1}^{(1)}}{p_{j_2}^{(1)}} = \frac{x_{j_1}^{(1)}}{x_{j_2}^{(1)}} = \frac{p_{j_1}^{\prime(1)}}{p_{j_2}^{\prime(1)}} \frac{\sum_{k=1}^{n_2} c_{1j_1,2k}\, p_k^{\prime(2)}}{\sum_{k=1}^{n_2} c_{1j_2,2k}\, p_k^{\prime(2)}}. \tag{8}$$

Чувствительность альтернатив $\boldsymbol{a_j^{(i)}}$ относительно изменения значений независимой вероятности альтернатив параметра $\boldsymbol{F_i}$. Из (8) видно, что на отношение значений вероятностей альтернатив $a_{j_1}^{(i)}$, $a_{j_2}^{(i)}$ не влияет изменение значений независимых вероятностей других альтернатив параметра F_i, поэтому целесообразно изменять исходные значения вероятности только этих альтернатив. Пусть значение независимой вероятности альтернативы $a_{j_1}^{(1)}$, полученной от эксперта, изменяется на относительную величину $\delta_{j_1}^{(1)}$, т.е. $p_{j_1}^{\prime\prime(1)} = (1 + \delta_{j_1}^{(1)})\, p_{j_1}^{\prime(1)}$. Тогда на основании (8) строим уравнения для значения $\widetilde{\delta}_{j_1}^{(1)}$, которое приведет к равенству $p_{j_1}^{(1)}$ и $p_{j_2}^{(1)}$:

$$\frac{(1 + \widetilde{\delta}_{j_1}^{(1)})\, p_{j_1}^{\prime(1)}}{p_{j_2}^{\prime(1)}} \frac{\sum_{k=1}^{n_2} c_{1j_1,2k}\, p_k^{\prime(2)}}{\sum_{k=1}^{n_2} c_{1j_2,2k}\, p_k^{\prime(2)}} = 1,$$

откуда получаем

$$\widetilde{\delta}_{j_1}^{(1)} = \frac{p_{j_2}^{\prime(1)}}{p_{j_1}^{\prime(1)}} \frac{\sum_{k=1}^{n_2} c_{1j_2,2k}\, p_k^{\prime(2)}}{\sum_{k=1}^{n_2} c_{1j_1,2k}\, p_k^{\prime(2)}} - 1 = \frac{p_{j_2}^{(1)}}{p_{j_1}^{(1)}} - 1. \tag{9}$$

Отметим, что $\widetilde{\delta}_{j_1}^{(1)} \geq -1$, поэтому всегда существует такое изменение значений независимых вероятностей альтернатив $a_{j_1}^{(i)}$, $a_{j_2}^{(i)}$, которое приведет к изменению их ранжирования.

Чувствительность альтернатив $a_j^{(i)}$ относительно изменения значений независимой вероятности альтернатив параметра F_k $(k \neq i)$. Рассмотрим, в каком случае поменяются местами ранги альтернатив одного параметра, если изменять исходные данные альтернатив другого параметра. Пусть значение независимой вероятности альтернативы $a_d^{(2)}$, $d \in [1; n_2]$, полученное от эксперта, изменяется на относительную величину $\delta_d^{(2)}$, т.е. $p''^{(2)}_d = (1+\delta_d^{(2)}) p'^{(2)}_d$. Тогда на основании (8) строим уравнение для значения $\tilde{\delta}_d^{(2)}$, которое приведет к равенству $p_{j_1}^{(1)}$ и $p_{j_2}^{(1)}$:

$$\frac{p'^{(1)}_{j_1}}{p'^{(1)}_{j_2}} \frac{\tilde{\delta}_d^{(2)} c_{1j_1,2d} p'^{(2)}_d + \sum_{k=1}^{n_2} c_{1j_1,2k} p'^{(2)}_k}{\tilde{\delta}_d^{(2)} c_{1j_2,2d} p'^{(2)}_d + \sum_{k=1}^{n_2} c_{1j_2,2k} p'^{(2)}_k} = 1.$$

Из этого уравнения находим

$$\tilde{\delta}_d^{(2)} = \frac{p'^{(1)}_{j_1} \sum_{k=1}^{n_2} c_{1j_1,2k} p'^{(2)}_k - p'^{(1)}_{j_2} \sum_{k=1}^{n_2} c_{1j_2,2k} p'^{(2)}_k}{(c_{1j_2,2d} p'^{(1)}_{j_2} - c_{1j_1,2d} p'^{(1)}_{j_1}) p'^{(2)}_d} = \frac{x_{j_1}^{(1)} - x_{j_2}^{(1)}}{(c_{1j_2,2d} p'^{(1)}_{j_2} - c_{1j_1,2d} p'^{(1)}_{j_1}) p'^{(2)}_d}. \quad (10)$$

Отметим также, что, поскольку значения независимой вероятности должны быть положительными, на значения $\delta_d^{(2)}$ наложены ограничения: $\delta_d^{(2)} > -1$. Если из выражения (10) получаем $\tilde{\delta}_d^{(2)} \leq -1$, это означает, что пара альтернатив $a_{j_1}^{(i)}$, $a_{j_2}^{(i)}$ устойчива относительно изменения соответствующего значения независимой вероятности $p'^{(2)}_d$.

Чувствительность альтернатив относительно изменения значений матрицы взаимосвязей. На отношение значений вероятности альтернатив $a_{j_1}^{(i)}$, $a_{j_2}^{(i)}$ не влияет изменение значений матрицы взаимосвязей, связанных с другими альтернативами параметра F_i, поэтому целесообразно исследовать только изменения $c_{1j_1,2d}$ либо $c_{1j_2,2d}$. Рассмотрим влияние изменения значения $c_{1j_1,2d}$ на отношение между значениями вероятностей альтернатив. Пусть значение матрицы взаимосвязей $c_{1j_1,2d}$ изменяется на относительную величину $\delta^C_{1j_1,2d}$, т.е. $c'_{1j_1,2d} = (1+\delta^C_{1j_1,2d}) c_{1j_1,2d}$. Тогда на основании (8) строим уравнение для значения $\tilde{\delta}^C_{1j_1,2d}$, которое приведет к равенству $p_{j_1}^{(1)}$ и $p_{j_2}^{(1)}$:

$$\frac{p'^{(1)}_{j_1}}{p'^{(1)}_{j_2}} \frac{\tilde{\delta}^C_{1j_1,2d} c_{1j_1,2d} p'^{(2)}_d + \sum_{k=1}^{n_2} c_{1j_1,2k} p'^{(2)}_k}{\sum_{k=1}^{n_2} c_{1j_2,2k} p'^{(2)}_k} = 1,$$

откуда получаем

$$\tilde{\delta}^C_{1j_1,2k} = \frac{\sum_{k=1}^{n_2} (c_{1j_2,2k} p'^{(1)}_{j_2} - c_{1j_1,2k} p'^{(1)}_{j_1}) p'^{(2)}_k}{c_{1j_1,2d} p'^{(1)}_{j_1} p'^{(2)}_d} = \frac{x_{j_2}^{(1)} - x_{j_1}^{(1)}}{c_{1j_1,2d} p'^{(1)}_{j_1} p'^{(2)}_d}. \quad (11)$$

Как и в предыдущем пункте, на значения $\delta^C_{1j_1,2d}$ наложены ограничения: $\delta^C_{1j_1,2d} > -1$. Если из выражения (11) получаем $\tilde{\delta}^C_{1j_1,2d} \le -1$, это означает, что пара альтернатив $a^{(i)}_{j_1}, a^{(i)}_{j_2}$ устойчива относительно изменения соответствующего значения матрицы взаимосвязей $c_{1j_1,2d}$.

ОЦЕНИВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим задачу для морфологической таблицы с произвольным количеством параметров. В этом случае система уравнений строится на основе значений условных вероятностей конфигураций морфологической таблицы, записанных в виде

$$P(\{a^{(1)}_{j_1}, a^{(2)}_{j_2}, \ldots, a^{(N)}_{j_N}\} \mid a^{(1)}_{j_1}) = \frac{P'(\{a^{(1)}_{j_1}, a^{(2)}_{j_2}, \ldots, a^{(N)}_{j_N}\} \mid a^{(1)}_{j_1})}{\sum\limits_{k_2=1}^{n_2} \sum\limits_{k_3=1}^{n_3} \ldots \sum\limits_{k_N=1}^{n_N} P'(\{a^{(1)}_{j_1}, a^{(2)}_{k_2}, \ldots, a^{(N)}_{k_N}\} \mid a^{(1)}_{j_1})}, \qquad (12)$$

где

$$P'(\{a^{(1)}_{j_1}, a^{(2)}_{j_2}, \ldots, a^{(N)}_{j_N}\} \mid a^{(1)}_{j_1}) = \prod_{m=2}^{N} p'^{(m)}_{j_m} \prod_{m=1}^{N-1} \prod_{l=m+1}^{N} c_{mj_m,\, lj_l}.$$

Система уравнений для значений вероятности, аналогичная (3), в случае трех и более параметров приобретает вид

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = P_1 \vec{x}_2, \ \|\vec{x}_1\| = 1, \\ \vec{x}_2 = P_2 \vec{x}_3, \ \|\vec{x}_2\| = 1, \\ \qquad \ldots \\ \vec{x}_{N-1} = P_{N-1} \vec{x}_N, \ \|\vec{x}_{N-1}\| = 1, \\ \vec{x}_N = P_N \vec{x}_1, \ \|\vec{x}_N\| = 1. \end{cases} \qquad (13)$$

Элементами матриц коэффициентов P_i являются суммы значений условных вероятностей конфигураций (12), соответствующих переменным. Например,

$$P_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j_3=1}^{n_3} \ldots \sum\limits_{j_N=1}^{n_N} P(\{a^{(1)}_1, a^{(2)}_1, a^{(3)}_{j_3}, \ldots, a^{(N)}_{j_N} \mid a^{(2)}_1) & \ldots & \sum\limits_{j_3=1}^{n_3} \ldots \sum\limits_{j_N=1}^{n_N} P(\{a^{(1)}_1, a^{(2)}_{n_2}, a^{(3)}_{j_3}, \ldots, a^{(N)}_{j_N} \mid a^{(2)}_{n_2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{j_3=1}^{n_3} \ldots \sum\limits_{j_N=1}^{n_N} P(\{a^{(1)}_{n_1}, a^{(2)}_1, a^{(3)}_{j_3}, \ldots, a^{(N)}_{j_N} \mid a^{(2)}_1) & \ldots & \sum\limits_{j_3=1}^{n_3} \ldots \sum\limits_{j_N=1}^{n_N} P(\{a^{(1)}_{n_1}, a^{(2)}_{n_2}, a^{(3)}_{j_3}, \ldots, a^{(N)}_{j_N} \mid a^{(2)}_{n_2}) \end{pmatrix}.$$

Для упрощения записи матриц коэффициентов P_i введем обозначения. Пусть C — многомерная матрица размерности N [7], элементами которой являются произведения значений матрицы конфигураций, соответствующие всем возможным парам альтернатив из этой конфигурации:

$$C_{j_1 j_2 \ldots j_N} = \prod_{m=1}^{N-1} \prod_{l=m+1}^{N} c_{mj_m,\, lj_l}.$$

Введем также обозначение $C_{i_1|i_2}$, где $i_1, i_2 \in [1; N]$ — номера параметров, для матрицы C, умноженной по соответствующим измерениям на векторы независимых вероятностей всех остальных параметров p_i, $i \neq i_1$, $i \neq i_2$. Поскольку каждое такое умножение уменьшает размерность матрицы, результирующая матрица $C_{i_1|i_2}$ является обычной двумерной матрицей. Тогда с учетом (12) матрицы P_i записываются в виде

$$\begin{aligned} P_i &= \operatorname{diag}(\vec{p}_i) C_{i\,|\,i+1} \operatorname{diag}(C^{\mathrm{T}}_{i\,|\,i+1} \vec{p}_i)^{-1}, \ i \in [1; N-1], \\ P_N &= \operatorname{diag}(\vec{p}_N) C_{N\,|1} \operatorname{diag}(C^{\mathrm{T}}_{N\,|1} \vec{p}_N)^{-1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Отметим некоторые свойства матриц $C_{i_1|i_2}$: 1) $C^{\mathrm{T}}_{i_1|i_2} = C_{i_2|i_1}$; 2) $C_{i_1|i_2} \vec{p}_{i_2} =$ $= C_{i_1|i} \vec{p}_i$, $i \neq i_1$.

Рассмотрим преобразование одного из уравнений системы (13) с учетом (14):

$$\vec{x}_1 = \operatorname{diag}(\vec{p}_1) C_{1\,|\,2} \operatorname{diag}(C^{\mathrm{T}}_{1\,|\,2} \vec{p}_1)^{-1} \vec{x}_2,$$

или

$$\operatorname{diag}(\vec{p}_1)^{-1} \vec{x}_1 = C_{1\,|\,2} \operatorname{diag}(C_{2\,|\,1} \vec{p}_1)^{-1} \vec{x}_2. \tag{15}$$

Вводим замену, аналогичную (5):

$$\vec{y}_i = \operatorname{diag}(\vec{p}_i)^{-1} \operatorname{diag}(C_{i\,|\,i+1} \vec{p}_{i+1})^{-1} \vec{x}_i, \ i \in [1; N-1]. \tag{16}$$

Учитывая второе свойство матриц $C_{i_1|i_2}$, в выражении (16) можно подставить вместо параметра F_{i+1} любой другой, т.е.

$$\vec{y}_i = \operatorname{diag}(\vec{p}_i)^{-1} \operatorname{diag}(C_{i\,|\,k} \vec{p}_k)^{-1} \vec{x}_i, \ i \in [1; N], \ k \in [1; N], \ k \neq i.$$

После замены уравнение (15) преобразовывается в следующее соотношение:

$$\operatorname{diag}(C_{1\,|\,2} \vec{p}_2) \vec{y}_1 = C_{1\,|\,2} \operatorname{diag}(\vec{p}_2) \vec{y}_2,$$

или

$$\vec{y}_1 = (P_2^-)^{\mathrm{T}} \vec{y}_2,$$

где
$$P_i^- = \operatorname{diag}(\vec{p}_i) C_{i\,|\,i-1} \operatorname{diag}(C^{\mathrm{T}}_{i\,|\,i-1} \vec{p}_i)^{-1}, \ i \in [2; N],$$
$P_1^- = \operatorname{diag}(\vec{p}_1) C_{1|\,N} \operatorname{diag}(C^{\mathrm{T}}_{1|\,N} \vec{p}_1)^{-1}$.

Такие же преобразования выполним для всех остальных уравнений системы (13). В результате получим равенство $\vec{y}_i = (P^-_{i+1})^{\mathrm{T}} (P^-_{i+2})^{\mathrm{T}} \ldots (P^-_N)^{\mathrm{T}} (P^-_1)^{\mathrm{T}} \ldots$ $\ldots (P^-_i)^{\mathrm{T}} \vec{y}_i$, т.е. $\vec{y}_i$ — собственный вектор матрицы $(P^-_{i+1})^{\mathrm{T}} (P^-_{i+2})^{\mathrm{T}} \ldots$ $\ldots (P^-_N)^{\mathrm{T}} (P^-_1)^{\mathrm{T}} \ldots (P^-_i)^{\mathrm{T}}$, соответствующий собственному числу 1.

Матрицы P_i^-, так же как и P_i, стохастические слева, поскольку они построены с помощью выражений для значений условной вероятности (12), следовательно, транспонированные матрицы $(P_i^-)^{\mathrm{T}}$ стохастические справа. Исходя из соображений, аналогичных рассуждениям для задачи с двумя параметрами, имеем $\vec{y}_i = \vec{1}$. Таким образом, решением системы (13) будет

$$\vec{x}_i = \operatorname{diag}(C_{i\,|\,k} \vec{p}_k) \operatorname{diag}(\vec{p}_i) \vec{1} = \operatorname{diag}(C_{i\,|\,k} \vec{p}_k) \vec{p}_i, \ i \in [1; N], \ k \in [1; N], \ k \neq i. \tag{17}$$

С помощью (17) можно оценить изменения исходных параметров задачи, которые приведут к изменению ранжирования между альтернативами. Пронумеруем альтернативы параметров так, чтобы для любых альтернатив $a^{(i)}_{j_1}, a^{(i)}_{j_2}$,

$j_1 < j_2$, параметра F_i выполнялось неравенство $p_{j_1}^{(i)} > p_{j_2}^{(i)}$. Запишем отношение рассчитанных значений вероятностей $p_{j_1}^{(1)}$, $p_{j_2}^{(1)}$ альтернатив $a_{j_1}^{(1)}$, $a_{j_2}^{(1)}$, $j_1 < j_2$, параметра F_1:

$$\frac{p_{j_1}^{(1)}}{p_{j_2}^{(1)}} = \frac{p'^{(1)}_{j_1}}{p'^{(1)}_{j_2}} \frac{\sum_{k_2=1}^{n_2} \sum_{k_3=1}^{n_3} \ldots \sum_{k_N=1}^{n_N} P'(\{a_{j_1}^{(1)}, a_{k_2}^{(2)}, \ldots, a_{k_N}^{(N)}\} \mid a_{j_1}^{(1)})}{\sum_{k_2=1}^{n_2} \sum_{k_3=1}^{n_3} \ldots \sum_{k_N=1}^{n_N} P'(\{a_{j_2}^{(1)}, a_{k_2}^{(2)}, \ldots, a_{k_N}^{(N)}\} \mid a_{j_2}^{(1)})}. \tag{18}$$

Из (18), исходя из соображений, аналогичных рассуждениям для задачи с двумя характеристическими параметрами, получаем выражения, эквивалентные (9)–(11).

Чувствительность альтернатив $a_j^{(i)}$ относительно изменения значений независимой вероятности альтернатив параметра F_i. Следующее соотношение получим аналогично формуле (9):

$$\tilde{\delta}_{j_1}^{(1)} = \frac{p_{j_2}^{(1)}}{p_{j_1}^{(1)}} - 1.$$

Чувствительность альтернатив $a_j^{(i)}$ относительно изменения значений независимой вероятности альтернатив параметра F_k ($k \neq i$). Для простоты записи выберем зависимость от альтернативы $a_d^{(2)}$ параметра F_2:

$$\tilde{\delta}_d^{(2)} =$$

$$= \frac{x_{j_1}^{(1)} - x_{j_2}^{(1)}}{\left(\sum_{k_3=1}^{n_3} \ldots \sum_{k_N=1}^{n_N} (P'(\{a_{j_2}^{(1)}, a_d^{(2)}, \ldots, a_{k_N}^{(N)}\} \mid a_{j_2}^{(1)}) p'^{(1)}_{j_2} - P'(\{a_{j_1}^{(1)}, a_d^{(2)}, \ldots, a_{k_N}^{(N)}\} \mid a_{j_1}^{(1)}) p'^{(1)}_{j_1}) \right) p'^{(2)}_d}.$$

Чувствительность альтернатив относительно изменения значений матрицы взаимосвязей. Следующее соотношение получаем аналогично формуле (11):

$$\tilde{\delta}_{1 j_1 2 k}^{C} = \frac{x_{j_2}^{(1)} - x_{j_1}^{(1)}}{\sum_{k_3=1}^{n_3} \ldots \sum_{k_N=1}^{n_N} P'(\{a_{j_1}^{(1)}, a_d^{(2)}, a_{k_3}^{(3)}, \ldots, a_{k_N}^{(N)}\} \mid a_{j_1}^{(1)}) p'^{(1)}_{j_1} p'^{(2)}_d}.$$

Все свойства значений $\tilde{\delta}$ такие же, как и для задачи с двумя параметрами.

ПРИМЕР ОЦЕНИВАНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачу с двумя параметрами, из которых первый имеет три альтернативы, второй — две. Исходные оценки альтернатив и матрица взаимосвязей для задачи приведены в табл. 1 и 2 соответственно. Результат решения задачи методом ММMA представлен в табл. 3.

Как видим, альтернативы пронумерованы таким образом, что результирующая вероятность убывает с увеличением

Таблица 1. Независимые значения вероятности альтернатив параметров

F_1		F_2	
$p'^{(1)}_1$	0,2	$p'^{(2)}_1$	0,7
$p'^{(1)}_2$	0,5	$p'^{(2)}_2$	0,3
$p'^{(1)}_3$	0,3	—	—

Т а б л и ц а 2 . Матрица взаимосвязей

		F_2	
		$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$
F_1	$a_1^{(1)}$	1,5	1
	$a_2^{(1)}$	0,5	0,5
	$a_3^{(1)}$	1	0,25

Т а б л и ц а 3. Рассчитанные значения вероятности альтернатив параметров

F_1		F_2	
$p_1^{(1)}$	0,359	$p_1^{(2)}$	0,791
$p_2^{(1)}$	0,332	$p_2^{(2)}$	0,209
$p_3^{(1)}$	0,309	—	—

Т а б л и ц а 4. Пороговые значения чувствительности пар альтернатив к разным элементам исходных данных

$a_j^{(1)}$	Пара альтернатив	$\tilde{\delta}_j^{(1)}$	$\tilde{\delta}_1^{(2)}$	$\tilde{\delta}_2^{(2)}$	$\tilde{\delta}_{1j21}^{C}$	$\tilde{\delta}_{1j22}^{C}$
$a_1^{(1)}$	$(a_1^{(1)}, a_2^{(1)})$	– 0,075	– 0,571	1,333	– 0,095	– 0,333
	$(a_1^{(1)}, a_3^{(1)})$	– 0,139	Устойчива	Устойчива	– 0,181	– 0,633
$a_2^{(1)}$	$(a_2^{(1)}, a_1^{(1)})$	0,081	– 0,571	1,333	0,114	– 0,24
	$(a_2^{(1)}, a_3^{(1)})$	– 0,069	0,514	– 0,343	– 0,103	0,267
$a_3^{(1)}$	$(a_3^{(1)}, a_1^{(1)})$	0,162	Устойчива	Устойчива	0,181	1,689
	$(a_3^{(1)}, a_2^{(1)})$	0,074	0,514	– 0,343	0,086	0,8

номера. Пользуясь выражениями (9)–(11), определим чувствительность пар альтернатив параметра F_1 к исходным данным с точки зрения изменения рангов (табл. 4).

Например, если уменьшить исходное значение вероятности альтернативы $a_1^{(1)}$ на 7,5 % или больше, эта альтернатива поменяется местами с $a_2^{(1)}$ в окончательном ранжировании. Если уменьшение достигнет 13,9 %, она поменяется местами с альтернативой $a_3^{(1)}$.

Для пары $(a_1^{(1)}, a_3^{(1)})$ значения $\tilde{\delta}_1^{(2)}$, $\tilde{\delta}_2^{(2)}$ не превышают -1, т.е. ни одно допустимое изменение значений вероятности альтернатив параметра F_2 не приведет к изменению ранжирования в ней. Поэтому очевидно, что эта пара устойчива относительно изменения значений вероятностей альтернатив параметра F_2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе данного исследования разработана новая методика решения задачи с помощью ММMA, позволяющая определять окончательные значения вероятности альтернатив без необходимости решения системы уравнений или определения собственных чисел матриц. На основании этой методики предложены приемы анализа чувствительности альтернатив к изменению входных данных. Таким образом, можно рассчитать, какие изменения независимых значений вероятностей или значений матрицы взаимосвязей приведут к изменению приоритетов альтернатив, определяемых на основе рассчитанных в ходе процедуры ММMA оценок альтернатив.

Разработанная методика анализа чувствительности для метода морфологического анализа позволяет заранее выявить, насколько потенциальные ошибки оценивания входных данных, неизбежные при экспертном оценивании, могут повлиять на результат. Кроме того, данную процедуру можно выполнять и после расчета

МММА для получения заключения о надежности результатов, используемых в задаче принятия решения. При необходимости проводятся дополнительные экспертизы в отношении наиболее чувствительных значений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Згуровский М.З., Панкратова Н.Д. Системный анализ: проблемы, методология, приложения. — Киев: Наук. думка, 2011. — 728 с.
2. Савченко І.О. Методологічне і математичне забезпечення розв'язання задач передбачення на основі модифікованого методу морфологічного аналізу // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 18–28.
3. Панкратова Н.Д., Савченко І.О. Морфологічний аналіз. Теорія, проблеми, застосування: Навчальний посібник. — Київ: Наук. думка, 2015. — 245 с.
4. Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І. Комплексне оцінювання чутливості рішення на основі методу аналізу ієрархій // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2006. — № 3. — С. 7–25.
5. Недашківська Н.І. Оцінювання чутливості розв'язку задачі прийняття рішень із застосуванням методу аналізу ієрархій // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2006. — № 2. — С. 27–36.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
7. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. — Киев: Наук. думка, 1972. — 175 с.

Надійшла до редакції 01.09.2015

І.О. Савченко

ОЦІНЮВАННЯ ЧУТЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ПРИ ЗАСТОСУВАННІ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ МОРФОЛОГІЧНОГО АНАЛІЗУ

Анотація. Запропоновано методику оцінювання чутливості розв'язку, отриманого модифікованим методом морфологічного аналізу, до зміни вхідних даних. Наведено новий спосіб визначення ймовірностей альтернатив у методі. На його основі розроблено прийоми аналізу чутливості пар альтернатив щодо зміни ранжування між ними при зміні як початкових оцінок ймовірності, так і значень матриці взаємозв'язків.

Ключові слова: аналіз чутливості, метод морфологічного аналізу, підтримка прийняття рішень, технологічне передбачення, експертне оцінювання.

I.O. Savchenko

ESTIMATING SOLUTION SENSITIVITY IN APPLICATION OF MODIFIED MORPHOLOGICAL ANALYSIS METHOD

Abstract. This paper creates a technique to estimate the sensitivity of a solution obtained by the modified morphological analysis method against variations in input data. A new way is proposed to find alternatives probabilities in the method. The sensitivity analysis techniques are developed on its basis for pairs of alternatives regarding the reversal of their rankings after changing either initial probability estimates or cross-consistency matrix values.

Keywords: sensitivity analysis, morphological analysis method, decision-making support, technology foresight, expert estimation.

Савченко Илья Александрович,
кандидат техн. наук, младший научный сотрудник Учебно-научного комплекса «Институт прикладного системного анализа» Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт» МОН Украины и НАН Украины, e-mail: savil@inbox.ru.