УДК 519.24

Д.В. КОРОЛЮК

ЗАДАЧА О ВЫХОДЕ ИЗ ИНТЕРВАЛА ДИСКРЕТНОЙ МАРКОВСКОЙ ДИФФУЗИИ

Аннотация. Исследуются вероятности выхода из интервала дискретной марковской диффузии с использованием ее аппроксимации процессом Орнштейна–Уленбека с асимптотически малой диффузией. Задача выхода из интервала решается на основе функционала действия, определяемого эволюционной компонентой процесса Орнштейна–Уленбека. Экспоненциальный генератор дискретной марковской диффузии порождает функционал действия решением вариационной задачи (преобразованием Фреше–Лежандра).

Ключевые слова: разностное стохастическое уравнение, функционал действия, вариационная задача, экспоненциальный генератор, процесс Орнштейна–Уленбека, потенциал динамической системы.

В настоящей работе строится функционал действия дискретной марковской диффузии, совпадающий с функционалом действия процесса Орнштейна–Уленбека. Функционал действия определяется решением вариационной задачи [1].

Задача выхода дискретной марковской диффузии из интервала решается методом, изложенным в [2] для процессов Орнштейна–Уленбека.

Дискретная марковская диффузия рассматривается в дискретно-непрерывном времени и задается решениями разностного стохастического уравнения в схеме серий, которая обеспечивает аппроксимацию процессом Орнштейна–Уленбека с непрерывным временем с асимптотически малой диффузией.

Разностные стохастические уравнения для дискретной марковской диффузии рассматривались также в схеме диффузионной аппроксимации статистических экспериментов в работах [3, 4].

АСИМПТОТИЧЕСКИ МАЛАЯ ДИФФУЗИЯ

Дискретная марковская диффузия (ДМД) в дискретно-непрерывном времени задается в схеме серий с малым параметром серии $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ решением разностного стохастического уравнения

$$\Delta_\varepsilon \zeta^\varepsilon(t) = -\varepsilon^3 V\zeta^\varepsilon(t) + \sqrt{\varepsilon}\sigma\Delta_\varepsilon W(t),\ t = k\varepsilon^3,\ k \ge 0. \tag{1}$$

Дискретно-непрерывное время означает, что

$$\Delta_\varepsilon \alpha(t) := \alpha(t+\varepsilon^3) - \alpha(t),\ \alpha(t) = \zeta^\varepsilon(t) \text{ или } W(t). \tag{2}$$

Стохастическая компонента $W(t)$, $t \ge 0$, является процессом броуновского движения с характеристиками

$$EW(t) = 0,\ E[\Delta_\varepsilon W(t)]^2 = \varepsilon^3. \tag{3}$$

ДМД (1)–(3) задаются переходными вероятностями [5]

$$P_\varepsilon \varphi(s) = E[\varphi(s + \Delta_\varepsilon \zeta^\varepsilon(t)) \mid \zeta^\varepsilon(t) = s]. \tag{4}$$

Порождающий оператор (генератор) ДМД (1)–(4) имеет вид

$$Q_\varepsilon \varphi(s) = E[\varphi(s + \Delta_\varepsilon \zeta^\varepsilon(t)) - \varphi(s) \mid \zeta^\varepsilon(t) = s]. \tag{5}$$

Замечание 1. Мартингальная характеризация ДМД $\zeta^{\varepsilon}(t),\ t \ge 0,$

$$\mu^{\varepsilon}(t) = \varphi(\zeta^{\varepsilon}(t)) - \varphi(\zeta^{\varepsilon}(0)) - \int\limits_{0}^{\varepsilon^3[t/\varepsilon^3]} L_{\varepsilon}\varphi(\zeta^{\varepsilon}(s))ds, \quad t = k\varepsilon^3,$$

определяется оператором

$$L_{\varepsilon}\varphi(s) = \varepsilon^{-3} Q_{\varepsilon}\varphi(s). \tag{6}$$

Можно убедиться в том, что ДМД (1)–(4) аппроксимируется при $\varepsilon \to 0$ асимптотически малой диффузией.

Лемма 1. Имеет место предельное (при $\varepsilon \to 0$) представление генераторов (6) марковского процесса (1) в виде

$$L_{\varepsilon}\varphi(s) = L_{\varepsilon}^{0}\varphi(s) + \varepsilon R_{\varepsilon}\varphi(s),$$

где

$$L_{\varepsilon}^{0}\varphi(s) = -V(s)\varphi'(s) + \varepsilon \frac{\sigma^2}{2}\varphi''(s) \tag{7}$$

и остаточный член

$$R_{\varepsilon}\varphi(s) \to 0,\ \varepsilon \to 0,\ \varphi(s) \in C^3(\mathbb{R}).$$

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР ДМД

ДМД (1)–(5) порождает экспоненциальную мартингальную характеризацию [1, Ch. 1]

$$\mu_{e}^{\varepsilon}(t) = \exp\{\varphi(\zeta^{\varepsilon}(t)) - \varphi(\zeta^{\varepsilon}(0)) - \int\limits_{0}^{\varepsilon^3[t/\varepsilon^3]} H^{\varepsilon}\varphi(\zeta^{\varepsilon}(s))ds\},\ t = k\varepsilon^3.$$

Экспоненциальный генератор

$$H^{\varepsilon}\varphi(s) = \varepsilon^{-2}\ \ln[1 + e^{-\varphi(s)/\varepsilon} Q_{\varepsilon} e^{\varphi(s)/\varepsilon}] \tag{8}$$

порождается нелинейной экспоненциальной полугруппой

$$H_{t}^{\varepsilon}\varphi(s) = \varepsilon \ln E[e^{\varphi(\zeta^{\varepsilon}(t))/\varepsilon} \mid \zeta^{\varepsilon}(0) = s].$$

В соответствии с методом анализа больших уклонений для марковских процессов, развитых в монографии [1], первый этап задачи о больших уклонениях для марковского процесса $\zeta^{\varepsilon}(t),\ t \ge 0,$ решается предельной теоремой [1, Ch. 1].

Теорема 1. Экспоненциальный генератор ДМД (1)–(3) вычисляется предельным переходом

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H^{\varepsilon}\varphi(s) = H^{0}\varphi(s),\ \varphi(s) \in C^3(\mathbb{R}).$$

Предельный экспоненциальный генератор ДМД (1)–(5) определяется соотношением

$$H^{0}\varphi(s) = -V(s)\varphi'(s) + \frac{1}{2}\sigma^2[\varphi'(s)]^2. \tag{9}$$

Доказательство. Вычислим на основе формулы (5) компонент экспоненциального генератора:

$$e^{-\varphi(s)/\varepsilon}\ Q_{\varepsilon} e^{\varphi(s)/\varepsilon} = E[\exp\Delta_{\varepsilon}\varphi(s) - 1 \mid \zeta^{\varepsilon}(0) = s],$$

где по определению

$$\Delta_\varepsilon \varphi(s) := [\varphi(s + \Delta\zeta^\varepsilon(t)) - \varphi(s)] / \varepsilon.$$

Далее используем разложение Тейлора до третьего члена

$$E[\exp \Delta_\varepsilon \varphi(s) - 1] = \varepsilon^{-1} E[\Delta_\varepsilon \zeta^\varepsilon(t)] \varphi'(s) +$$

$$+ \varepsilon^{-2} \frac{1}{2} E[\Delta_\varepsilon \zeta^\varepsilon(t)]^2 \varphi''(s) + \varepsilon^2 R_\varepsilon \varphi(s)$$

с пренебрежимым членом $R_\varepsilon \varphi(s) \to 0$, $\varepsilon \to 0$. В результате имеем

$$e^{-\varphi(s)/\varepsilon} Q_\varepsilon e^{\varphi(s)/\varepsilon} = \varepsilon^2 [H^0 \varphi(s) + R_\varepsilon \varphi(s)]. \tag{10}$$

Выражение экспоненциального генератора (8) вместе с (10) дает асимптотическое представление

$$H^\varepsilon \varphi(s) = H^0 \varphi(s) + R_\varepsilon \varphi(s)$$

с пренебрежимым членом $R_\varepsilon \varphi \to 0$, $\varepsilon \to 0$, что завершает доказательство теоремы 1.

Замечание 2. Экспоненциальный генератор (9) определяет мартингальную (экспоненциальную) характеризацию процесса Орнштейна–Уленбека

$$d\zeta_\varepsilon^0(t) = -V(\zeta_\varepsilon^0(t))dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma dW(t), \quad t \geq 0, \tag{11}$$

который задается генератором (7).

Лемма 2. Имеет место предельное представление (при $\varepsilon \to 0$)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_\zeta^\varepsilon \varphi(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{-\varphi(s)/\varepsilon} \varepsilon L_\varepsilon^0 e^{\varphi(s)/\varepsilon} = H^0 \varphi(s),$$

где H^0 задается формулой (9).

Замечание 3. Утверждения лемм 1 и 2 означают, что экспоненциальный генератор (9) реализует проблему больших уклонений для ДМД (1)–(5), а также процессов Орнштейна–Уленбека (11).

ФУНКЦИОНАЛ ДЕЙСТВИЯ ДМД

В монографии [2, Ch. 4] задача выхода из области динамической системы с гауссовскими (асимптотически малыми) возмущениями (11) исследуется с применением функционала действия, который a priori определяется равенством

$$S_T(\varphi) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T [\dot{\varphi}_t + V(\varphi_t)]^2 \, dt. \tag{12}$$

Согласно монографии [1] функционал действия процесса Орнштейна–Уленбека (11), который характеризуется экспоненциальным генератором (9), задается решением вариационной задачи (преобразование Фреше–Лежандра)

$$\mathcal{L}(s, q) = \sup_p \{pq - H^0(s, p)\}. \tag{13}$$

Функционал действия марковского процесса $\zeta^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, определяется интегралом на тест-функциях $\varphi_t \in C_T^1(\mathbb{R})$, $\dot{\varphi}_t := d\varphi_t / dt$:

$$S_T(\varphi) = \int_0^T \mathcal{L}(\varphi_t, \dot{\varphi}_t) dt. \tag{14}$$

Функция двух переменных $H^0(s, p)$ задается предельным экспоненциальным генератором (9):

$$H^0(s, \dot{\varphi}) \equiv H^0 \varphi(s).$$

Таким образом,

$$H^0(s, \dot{\varphi}) = -V(s)\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\sigma^2 \dot{\varphi}^2. \tag{15}$$

Лемма 3. Функционал действия процесса Орнштейна–Уленбека (11), а также ДМД (1)–(5) совпадают и определяются интегралом (12).

Доказательство. Решая вариационную задачу (13) с учетом (15), вычисляем преобразование Фреше–Лежандра в (13) для подынтегральной функции в (14):

$$\mathcal{L}(s, q) = [q + V(s)]^2.$$

Подставив тест-функцию $\varphi_t = s$, $\dot{\varphi}_t = q$, получим утверждение леммы 3.

ВЫХОД ДМД ИЗ ИНТЕРВАЛА

Дискретная марковская диффузия, порождаемая решениями разностного стохастического уравнения (1), аппроксимирует реальные статистические эксперименты с настойчивой линейной регрессией [8]:

$$\zeta^\varepsilon(t) = S_N(k) - \rho, \ t = k\varepsilon^3, \ k \geq 0.$$

Статистические эксперименты $S_N(k)$, $k \geq 0$, задаются усредненными суммами случайной выборки, элементы которой принимают два значения: 0 или 1, так что $|S_N(k)| \leq 1$. При этом ρ определяет равновесное состояние статистического эксперимента.

Учитывая нормировку реальных статистических экспериментов $0 \leq S_N(k) \leq 1$, находим интервал пребывания для аппроксимирующих ДМД:

$$(-\rho, 1-\rho), \ 0 \leq \rho \leq 1.$$

Теперь имеется возможность использовать результаты монографии [2], адаптированные к рассматриваемой задаче (вариант теоремы 1.2 [2, Ch. 4]) для важной статистической задачи распознавания двух гипотез: $\rho > 1/2$ или $\rho < 1/2$.

Теорема 2. Вероятности выхода ДМД (2)–(4) из интервала $(-\rho, 1-\rho)$ задаются асимптотическим соотношением

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln P\{\zeta^\varepsilon(t) \in (-\rho, 1-\rho) \mid \zeta^\varepsilon(0) = s\} = -\min_{\varphi \in \overline{H}(s)} S_T(\varphi),$$

в котором

$$\overline{H}(s) := \{\varphi_t : \varphi_0 = s, \varphi_t \in [-\rho, 1-\rho], \ 0 \leq t \leq T\}.$$

Кроме того, имеет место асимптотическое соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln P\{\tau^\varepsilon \leq t\} = -\min_{\varphi \in H(s)} S_T(\varphi)$$

для момента выхода из интервала

$$\tau^\varepsilon := \min_{\varphi \in H(s)} \{t : \zeta^\varepsilon(t) \notin (-\rho, 1-\rho)\}.$$

По определению множество тест-функций имеет вид

$$H(s) := \{\varphi_t : \varphi_0 = s, \varphi_t \notin (-\rho, 1-\rho), \ 0 \leq t \leq T\}.$$

Для линейной динамической системы

$$dS(t)/dt = -VS(t), \ -\infty \le t \le T, \tag{16}$$

потенциал $U(s)$ определяется следующим соотношением [2, Sec. 4.2, P. 149]:

$$U(s) = \frac{1}{2}Vs^2, \ s \in R. \tag{17}$$

Введем решение динамической системы

$$d\hat{S}(t)/dt = V(\hat{S}(t)), \ \hat{S}(-\infty) = 0, \ \hat{S}(T) = s, \ -\infty \le t \le T. \tag{18}$$

Очевидно равенство $\hat{S}_0(t) = se^{V(t-T)}$.

Имеет место вариант теоремы 3.1 [2, Sec. 4.3, P. 162].

Теорема 3. ДМД (1)–(4) характеризуется потенциалом (17) динамической системы (16), а именно, имеет место неравенство

$$S_T(\varphi) \ge \frac{1}{\sigma^2}Vs^2 \quad \forall \{\varphi_t : \varphi_0 = 0, \varphi_T = s\}. \tag{19}$$

Доказательство. Неравенство (19) следует из очевидного тождества

$$S_T(\varphi) = \frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{1}{2}\int_0^T [\dot{\varphi}_t - V\varphi_t]^2 dt + Vs^2\right].$$

Таким образом, для тест-функций $\varphi_t : \varphi_0 = 0, \varphi_T = s$ имеет место неравенство (19).

Замечание 4. Учитывая решение (18) динамической системы (16), можно утверждать справедливость неравенства

$$S_T(\varphi) \ge \hat{S}_T(\hat{\varphi}), \tag{20}$$

где тест-функция $\hat{\varphi}_t$ определяется решением динамической системы

$$\dot{\hat{\varphi}}_t - V\hat{\varphi}_t = 0, \ \hat{\varphi}_{-\infty} = 0, \ \hat{\varphi}_T = s. \tag{21}$$

Таким образом, единственная экстремаль функционала действия (14) задается решением динамической системы (21), а именно

$$\hat{\varphi}(t) = se^{V(t-T)}, \ -\infty \le t \le T.$$

Итак, неравенство (20) установлено.

Асимптотический анализ выхода из интервала $(-\rho, 1-\rho)$ ДМД (1)–(4) можно реализовать, используя аппроксимацию процесса $\zeta^{\varepsilon}(t)$, $t \ge 0$, процессом Орнштейна–Уленбека $\zeta_{\varepsilon}^0(t)$, $t \ge 0$, с генератором (7).

Введем функции распределения процесса Орнштейна–Уленбека [2, Sec. 4.1]:

$$U_t^{\varepsilon}(s) = P\{\zeta_{\varepsilon}^0(t) \in (-\rho, 1-\rho) \,|\, \zeta_{\varepsilon}^0(0) = s\}, \tag{22}$$

$$\overline{U}_t^{\varepsilon}(s) = P\{\tau^{\varepsilon} \le t) \,|\, \zeta_{\varepsilon}^0(0) = s\}.$$

Теорема 3.1 [2, Sec. 4.3, P. 162] позволяет уточнить результаты теоремы 1.2 [2, Sec. 4.1, P. 145].

Функция распределения (22) определяется решением граничной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром ε при старшей производной (см., например, [2, Ch. 4])

$$\partial U_t^\varepsilon(s)/\partial t = L_\varepsilon^0 U_t^\varepsilon(s),\ U_0^\varepsilon(s)=1,\ s\in(-\rho,1-\rho),\ U_0^\varepsilon(s_0)=0,\ s_0\in\{-\rho,1-\rho\}.$$

В частности, вероятности выхода из интервала (ρ_-,ρ_+), $\rho_-:=-\rho$, $\rho_+:=1-\rho$,

$$U_\pm^\varepsilon(s):=P\{\zeta_\varepsilon^0(\tau^\varepsilon)=\rho_\pm \mid \zeta_\varepsilon^0(0)=s\},\ \rho_-<s<\rho_+, \tag{23}$$

определяются решениями граничной эллиптической задачи

$$L_\varepsilon^0 U_\pm^\varepsilon(s)=0,\ U_\pm^\varepsilon(\rho_\pm)=1,\ U_\pm^\varepsilon(\rho_\mp)=0. \tag{24}$$

Решения граничных задач (24) задаются соотношениями

$$U_+^\varepsilon(s)=\int_{\rho_-}^{s}\exp\left[\frac{V}{\varepsilon\sigma^2}r^2\right]dr/\overline{U}_\varepsilon,$$

$$U_-^\varepsilon(s)=\int_{s}^{\rho_+}\exp\left[\frac{V}{\varepsilon\sigma^2}r^2\right]dr/\overline{U}_\varepsilon,$$

где нормирующая константа имеет вид

$$\overline{U}_\varepsilon=\int_{\rho_-}^{\rho_+}\exp\left[\frac{V}{\varepsilon\sigma^2}r^2\right]dr.$$

Следствие. Вероятности выхода из интервала (ρ_-,ρ_+) характеризуются предельным поведением

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P\{\zeta_\varepsilon^0(\tau^\varepsilon)=\rho_+ \mid \zeta_\varepsilon^0(0)=s\}=\begin{cases}1, & \rho>1/2,\\ 0, & \rho<1/2.\end{cases}$$

В частности, можно убедиться, что имеет место предельное поведение вероятностей (23) при $\rho=1/2$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P\{\zeta_\varepsilon^0(\tau^\varepsilon)=\pm 1/2 \mid \zeta_\varepsilon^0(0)=s\}=1/2.$$

В заключение отметим, что решение задачи выхода дискретной марковской диффузии из интервала использует граничную задачу для эллиптического уравнения, определяющую вероятности выхода из интервала процесса Орнштейна–Уленбека.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feng J., Kurtz T.G. Large deviations for stochastic processes. — New York; Boston: AMS, 2006. — 414 p.
2. Freidlin M.I., Ventzell A.D. Random perturbation of dynamical systems. — Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. — 460 p.
3. Королюк Д.В. Диффузионная аппроксимация статистических экспериментов с настойчивой линейной регрессией и эквилибриумом // Доп. НАН України. — 2014. — № 3. — С. 18–24.
4. Королюк Д.В. Дифузійна апроксимація статистичних експериментів з наполегливою нелінійною регресією і еквілібріумом // Доп. НАН України. — 2014. — № 8. — С. 28–34.
5. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. — New York; London: World Scientific, 2005. — 331 p.

6. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. — Dordrecht; Boston: Kluwer, 1999. — 185 p.
7. Ethier S.N., Kurtz T.G. Markov processes: Characterization and convergence. — New York: Willey, 1986. — 534 p.
8. Королюк Д.В. Двокомпонентні бінарні статистичні експерименти з наполегливою лінійною регресією. — Київ: TIIMS, 2014. — **90.** — С. 91–101.

Надійшла до редакції 30.09.2015

Д.В. Королюк

ЗАДАЧА ПРО ВИХІД З ІНТЕРВАЛУ ДИСКРЕТНОЇ МАРКОВСЬКОЇ ДИФУЗІЇ

Анотація. Досліджуються ймовірності виходу з інтервалу дискретної марковської дифузії з використанням її апроксимації процесом Орнштейна–Уленбека з асимптотично малою дифузією. Задача виходу з інтервалу розв'язується на основі функціонала дії, що визначається еволюційною компонентою процесу Орнштейна–Уленбека. Експонентний генератор дискретної марковської дифузії породжує функціонал дії розв'язком варіаційної задачі (перетворенням Фреше–Лежандра).

Ключові слова: різницеве стохастичне рівняння, функціонал дії, варіаційна задача, експоненційний генератор, процес Орнштейна–Уленбека, потенціал динамічної системи.

D.V. Korolіouk

THE PROBLEM OF A DISCRETE MARKOV DIFFUSION ABANDONING AN INTERVAL

Abstract. We analyze the probability that a discrete Markov diffusion abandons an interval and its approximation by the Ornstein–Uhlenbeck process with asymptotically small diffusion is used. The problem of abandoning an interval is solved on the basis of action functional defined by the evolution component of the Ornstein–Uhlenbeck process. The exponential generator of discrete Markov diffusion generates the action functional by solving the variational problem (Frechet–Legendre transformation).

Keywords: stochastic difference equation, action functional, variational problem, exponential generator, Ornstein–Uhlenbeck process, potential of a dynamic system.

Королюк Дмитрий Владимирович,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института телекоммуникаций и глобального информационного пространства НАН Украины, Киев, e-mail: dimitri.koroliouk@ukr.net.