СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

И.Т. СЕЛЕЗОВ, Ю.Г. КРИВОНОС, В.М. МОСКОВКИН

УДК 532.59

БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛА В БЕРЕГОВЫХ ЭКОГЕОСИСТЕМАХ

Аннотация. На основе качественной теории дифференциальных уравнений (теории катастроф) исследуется оптимальное сохранение экологического состояния объекта. В качестве объекта рассматривается берег моря, подверженный непрерывному разрушительному воздействию волн, который подпитывают для поддержания его исходного состояния. Моделируется поддержание равновесного состояния экологической системы в некотором оптимальном режиме. В отличие от известных подходов такая модель учитывает существенно нелинейные эффекты и управление посредством подпитки пляжа, которую можно интерпретировать как обратную связь. Анализ проведен методами теории устойчивости. Получены характеристики предельного цикла и проанализирована его устойчивость.

Ключевые слова: бифуркация рождения цикла, экогеосистема, устойчивость, теория катастроф.

ВВЕДЕНИЕ

Поиск оптимальных решений сохранения экологического равновесия структур — сложная многопараметрическая задача. В реальных условиях экологическое равновесие нестабильно, более того, оно ухудшается.

Предполагается, что каждый пляж, естественный или искусственный, поддерживает равновесие, если его рассматривать за период в несколько лет. В геологическом времени прибрежная зона не может оставаться в неизменном виде. Некоторые из них никогда не находятся в равновесном состоянии. Равновесными считаются берега, которые не изменяются заметно в течение одного или двух десятилетий.

Сооружаемые волнорезы предназначены не только для смягчения ударов штормовых волн о берег, но и для «удержания» пляжной гальки на определенном участке. Пляжи требуют правильной эксплуатации и ежегодного пополнения, так как 5–12 % гальки в год истирается и отмывается волной, несмотря на то, что на береговую полосу насыпают прочные породы камня вулканического происхождения. Если его регулярно не подсыпать, то вода приблизится к береговым подпорным стенам и волны, разбиваясь о них, значительно углубят дно. Восстановить такой пляж будет невозможно.

Проблема переформирования прибрежной зоны моря при абразии и сидементации наносов остается актуальной на протяжении длительного времени [1–10].

Определяющая особенность для генерации прибрежных течений и транспорта наносов, а значит, эрозии берега, — начало разрушения волн и последовательное затухание волновых высот, распространяющихся через прибойную зону. Например, в [11, 12] показано, что волновой бурун и поле скоростей турбулентности имеют доминирующее влияние на такие процессы в прибрежной зоне, как затухание волн, потоки массы и импульса, течения и транспорт наносов. На мелкой воде буруны взаимодействуют с донными растениями и наносами.

Прогноз эволюции берегов исследовался также в работе [13]. При фронтальном накате волн на берег (клиф) равновесный профиль существенно изменяется [14].

В настоящей статье на основе качественной теории дифференциальных уравнений представлен анализ поддержания экологического равновесия берегов при постоянном воздействии на них морских волн, приводящих к медленному или быстрому их разрушению. Применяется интегральная модель в виде сильно нелинейной связанной системы двух дифференциальных уравнений, учитывающая объем обломочного материала, высоту берегового уступа (клифа), поступление и унос материала, транспорт наносов. Исследуются особые точки, бифуркационное множество, критерии устойчивости по Ляпунову, характеристики предельного цикла. (Соответствующий доклад был представлен на ляпуновских чтениях в г. Харькове [15].)

Отметим, что развиваемый в данной работе подход применим для анализа сценариев «назад–вперед». Если известно предыдущее экологическое состояние, например 50–100 лет назад, и сегодняшнее, то можно оценить его эволюцию, исходя из оценки периода колебаний для конкретных параметров.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейное уравнение баланса обломочного материала в береговой зоне абразионного берега [16], в котором дополнительно учтена биогенная продукция этого материала, а коэффициент его истираемости за счет волнового воздействия находится в линейной зависимости от биомассы донного биоценоза:

$$\frac{dW}{dt} = aH\gamma\,(W_m - W) - [C_0\,(1 - B / B_{\max} + C_{\min})]\,W + U + \delta B, \tag{1}$$

$$\frac{dB}{dt} = k_1 B\,(1 - B / B_{\max}) - k_2 W, \tag{2}$$

где $k_1, k_2 = \mathrm{const} > 0$.

В формулах (1), (2) приняты следующие обозначения: t — время, год; W — объем обломочного материала на единицу длины береговой линии, м^3/м ($0 \le W \le W_m$); W_m — предельный (минимальный) объем обломочного материала на пляже, при котором абразия прекращается; a — доля обломочного пляжеобразующего материала (не взвесеобразующие фракции) в породах, слагающих берег ($0 \le a \le 1$); H — высота берегового уступа (клифа), м; $\gamma\,(W_m - W)$ — скорость отступания берегового уступа, м/год; $\gamma = \mathrm{const} > 0.1$, м$^{-1}$год$^{-1}$; B — биомасса донного биоценоза на единицу ширины абразионной отмели, тонна/м ($0 \le B \le B_{\max}$); U — интенсивность поступления ($U > 0$) или уноса ($U < 0$) материала за счет естественных (транспорт наносов течениями) или искусственных (подсыпка, изъятие) факторов, м^2/год; δ — коэффициент биогенного продуцирования обломочного материала, м^3/(тонна в год) (количество материала, получаемого из одной тонны биомассы зообентоса в год), $C_0, C_{\min} = \mathrm{const} > 0$, год$^{-1}$; $k = C_0\,(1 - B / B_{\max}) + C_{\min}$ — коэффициент истираемости материала, год$^{-1}$ (линейная аппроксимация между двумя его характерными значениями: $k\,(B = 0) = k_{\max} = C_0 + C_{\min}$, $k\,(B = B_{\max}) = k_{\min} = C_{\min}$.

В основу уравнения (2) положены экологические и литодинамические особенности рассматриваемого процесса: известный в экологии саморегулируемый рост биомассы, описываемый уравнением Ферхюльста (при $k_2 = 0$), и уменьшение прироста биомассы при увеличении объема обломочного материала в береговой зоне, способствующего деградации биоценоза.

Модель, описываемую уравнениями (1), (2), можно рассматривать как асимптотическое приближение, следующее из уравнений гидродинамики [17].

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Переходя к безразмерным переменным $t' = k_1 t, B' = B / B_{\max}, W' = W / W_m$, получаем нелинейную динамическую систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dW'}{dt'} &= -\sigma_1 W' + \sigma_2 BW' - \sigma_5 B' + \sigma_3, \\ \frac{dB'}{dt'} &= B'(1 - B') - \sigma_4 W', \end{aligned} \qquad (3)$$

где

$$\sigma_1 = (1 / k_1)(aH\gamma + C_0 + C_{\min}) > 0, \ \sigma_2 = C_0 / k_1 > 0,$$

$$\sigma_3 = (aH\gamma / k_1) + (4 / k_1 W_m) > 0, \ \sigma_4 = k_2 W_m / (k_1 B_{\max}) > 0,$$

$$\sigma_5 = \delta B_{\max} / (W_m k_1 > 0).$$

Координаты особых точек системы (3) определяются из соотношений

$$\begin{aligned} W'_* &= B'_* (1 - B'_*) / \sigma_4, \\ B'_* &= (\sigma_1 W'_* - \sigma_3) / (\sigma_5 + \sigma_2 W'_*), \end{aligned} \qquad (4)$$

где

$$0 \le B'_* \le (\sigma_1 - 4\sigma_3\sigma_4) / \sigma_2, \ 0 \le W'_* \le 1 / (4\sigma_4) \le 1,$$

$$0 \le \sigma_3 / \sigma_1 \le W'_* \le \sigma_3 / (\sigma_1 - \sigma_2) \le 1, \ \sigma_1 > \sigma_2.$$

Применяя параметры системы (3), находим значения W'_* из решения кубического уравнения

$$(W'_*)^3 + (W'_*)^2 \frac{[2\sigma_2\sigma_4\sigma_5 + \sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2)]}{\sigma_2^2\sigma_4} + W'_* \frac{[\sigma_4\sigma_5 - \sigma_1\sigma_5 + \sigma_3(\sigma_2 - 2\sigma_1)]}{\sigma_2^2\sigma_4} + \frac{\sigma_3^2 + \sigma_3\sigma_5}{\sigma_2^2\sigma_4} = 0. \qquad (5)$$

Матрица линеаризованной системы (3) имеет вид

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} -\sigma_1 + \sigma_2 B'_* & \sigma_2 W'_* + \sigma_5 \\ -\sigma_4 & 1 - 2B'_* \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Из условия $\det \widetilde{A} = 0$ определяется бифуркационное множество для точек седлового типа (граница седел) [18, 19]. Для поиска бифуркации рождения цикла приравняем след матрицы (6) к нулю:

$$\operatorname{tr} \widetilde{A} = 1 - \sigma_1 - 2B'_* + \sigma_2 B'_* = 0,$$

откуда

$$0 \le B'_* = (\sigma_1 - 1) / (\sigma_2 - 2), \ 0 \le \sigma_2 \le \sigma_1 \le 1, \qquad (7)$$

$$\det \widetilde{A} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)\sigma_1(\sigma_2 + 4) + \sigma_2(1 - 2\sigma_2) + \lambda_0\sigma_5(\sigma_2 - 2)^2}{(\sigma_2 - 2)^2}, \qquad (8)$$

$$\lambda_0 = \gamma_{4bif} = \frac{(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - \sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 2\sigma_1)}{(\sigma_2 - 2)[\sigma_3(\sigma_2 - 2) + \sigma_5(\sigma_1 - 1)]}. \tag{9}$$

Соотношение (9) (граница устойчивости узлов и фокусов [19]) получено из (4), (7).

С учетом неравенств (7) и $\lambda_0 > 0$ имеем

$$\sigma_3(\sigma_2 - 2) + \sigma_5(\sigma_1 - 1) < 0 \Leftrightarrow \sigma_3 > \frac{(1 - \sigma_1)\sigma_5}{(\sigma_2 - 2)} < 0,$$

откуда следует неравенство $\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_5 > 0$, полезное при дальнейшем анализе.

Для существования бифуркации рождения цикла необходимо, чтобы $\det \widetilde{A} > 0$ и $0 \le \sigma_2 < \sigma_1 \le 1$, что равносильно неравенству

$$\frac{-(4\sigma_1 - \sigma_1^2 + 1 - 4\lambda_0\sigma_5) + D^{1/2}}{2(\sigma_1 - 2 + \lambda_0\sigma_5)} < \sigma_2 < \sigma_1 \tag{10}$$

при $\sigma_2 - 2 + \lambda_0\sigma_5 < 0$ и $0 \le \sigma_2 < \sigma_1 \le 1$ при $\sigma_2 - 2 + \lambda_0\sigma_5 > 0$ (здесь также $\lambda_0\sigma_5 \ge 1$), где $D = (4\sigma_1 - \sigma_1^2 + 1 - 4\lambda_0\sigma_5)^2 + 16(\sigma_1 - \lambda_0\sigma_5)(\sigma_1 - 2 + \lambda_0\sigma_5)$.

При увеличении параметра σ_5, начиная от нуля (отсутствие поступления материала биогенного происхождения) криволинейная область ($\det \widetilde{A} > 0$) в треугольнике $0 \le \sigma_2 < \sigma_1 \le 1$ постепенно увеличивается и при $\sigma_2 - 2 + \lambda_0\sigma_5$ покрывает его полностью. Сама бифуркация происходит на граничной бифуркационной кривой (9), проходящей через указанную область параметров σ_1 и σ_2.

Для дальнейшего математического анализа введем следующие обозначения: $B' = x$, $W' = y$, $t' = t$, $B'_* = x_*$, $W'_* = y_*$, $x' = x - x_*$, $y' = y - y_*$, $\mu = \lambda - \lambda_0 = \sigma_1 - \sigma_{4bif}$. Тогда система (3) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= x'(1 - 2x_*) - (\mu + \lambda_0)y' - (x')^2, \\ \frac{dy'}{dt} &= (\sigma_2 y_* + \sigma_5)x' + (\sigma_2 x_* - \sigma_1)y' + \sigma_2 x'y'. \end{aligned} \tag{11}$$

В обозначениях работы [20] запишем

$$X_\mu(x', y') = (x'(1 - 2x_*) - (\mu + \lambda_0)y' - (x')^2, (\sigma_2 y_* + \sigma_5)x' + (\sigma_2 x_* - \sigma_1)y' + \sigma_2 x'y'),$$

$$dX_\mu(0,0) = \begin{bmatrix} 1 - 2x_* & -(\mu + \lambda_0) \\ \sigma_2 y_* + \sigma_5 & \sigma_2 x_* - \sigma_1 \end{bmatrix}, \; dX_0(0,0) = \begin{bmatrix} A & -\lambda \\ k & -A \end{bmatrix},$$

где

$$1 - 2x_* = \frac{\sigma_2 - 2\sigma_1}{\sigma_2 - 2} = A > 0, \; \sigma_2 x_* - \sigma_1 = -A < 0,$$

$$\sigma_2 y_* + \sigma_5 = \frac{\sigma_2(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - \sigma_1 - 1)}{(\sigma_2 - 2)^2 \lambda_0} + \sigma_5 = k \text{ при } \mu = 0 \; (\operatorname{tr} \widetilde{A} = 0).$$

Детерминант матрицы $dX_0(0,0)$ совпадает с формулой (8). Нормированная матрица Якоби примет вид

$$dX_0(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_0 / A \\ k / A & -1 \end{bmatrix}.$$

Собственные числа матрицы Якоби имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} - (4 \det \widetilde{A})^{1/2} = \pm i (\det \widetilde{A})^{1/2} = \pm i\gamma = \pm i\omega_0,$$

где $\det \widetilde{A}$ находим по формулам (8), (9).

Собственный вектор матрицы $dX_0(0,0)$ для собственного значения $\lambda_1 = i\gamma = i\omega_0$ определяется из матричного уравнения

$$(dX_0(0,0) - \lambda_1 I) \times U_1 = 0, \tag{12}$$

где I — единичная матрица, U_1 — собственный вектор,

$$U_1 = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix}.$$

Из уравнения (12) получим собственный вектор, нормированный таким образом, чтобы его первая ненулевая компонента равнялась единице:

$$U_1 = \hat{e}_1 + i\hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -A/\gamma \\ -k/\gamma \end{bmatrix}, \tag{13}$$

откуда

$$X_0(x'\hat{e}_1 + y'\hat{e}_2) = X_0(x' - (A/\gamma)y'), \quad y' = y'(-k/\gamma)$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered} X_0(x', y') = ((x' - (A/\gamma)y')A + (\lambda_0 k/\gamma)y' - (x' - (A/\gamma)y'))^2, \\ k((x' - (A/\gamma)y') + (k/\gamma)Ay' - \sigma_2(x' - (A/\gamma)y')(k/\gamma)y') = \\ = ((x' - (A/\gamma)y')A + (\lambda_0 k/\gamma)y' - (x' - (A/\gamma)y'))^2, \\ kx' + (\sigma_2 kA/\gamma^2)(y')^2 = (\sigma_2 k/\gamma)x'y'. \end{gathered} \tag{14}$$

Разложение $X_0(x', y')$ по новому базису имеет вид

$$\widetilde{A}(x', y') \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \widetilde{B}(x', y') \begin{bmatrix} -A/\gamma \\ -k/\gamma \end{bmatrix} = X_0(x', y'),$$

откуда

$$\begin{gathered} \widetilde{A}(x', y') - \widetilde{B}(x', y')(A/\gamma) = (x' - (A/\gamma)y'A + (\lambda_0 k/\gamma)y' - (x' - (A/\gamma)y'))^2, \\ -\widetilde{B}(x', y')(k/\gamma) = kx' + (\gamma_2 kA/\gamma^2)(y')^2 - (\sigma_2 k/\gamma)x'y'. \end{gathered} \tag{15}$$

Из системы (15) получим

$$\widetilde{A}(x', y') = (\lambda_0 kA^2/\gamma)y' + (A/\gamma)(2 + \sigma_2)x'y' - (x')^2 - (A/\gamma)^2(1 + \sigma_2)(y')^2. \tag{16}$$

В новой системе координат выражение $X_0(x', y')$ примет вид

$$X_0(x', y') = (\widetilde{A}(x', y'), \widetilde{B}(x', y')),$$

где $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ определяются по (15) и (16).

Покажем, что $\lambda_0 k - A^2 = \gamma^2 = \det \widetilde{A}$. Это следует из выражений для k и формулы (8) при $\sigma_3 = \sigma_5$:

$$(\sigma_2 - \sigma_1)\sigma_1(\sigma_2 + 4) + \sigma_2(1 - 2\sigma_2) = \sigma_2(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - \sigma_1 - 1) - (\sigma_2 - 2\sigma_1)^2.$$

Таким образом, исходные выражения для вычисления критерия устойчивости имеют вид

$$X' = \widetilde{A}(x', y') = \gamma y' + (A/\gamma)(2+\sigma_2)x'y' - (x')^2 - (A/\gamma)^2(1+\sigma_2)(y')^2,$$
$$X_1^2 = \widetilde{B}(x', y') = -\gamma x' + \sigma_2 x'y' - (\sigma_2 A/\gamma)(y')^2. \qquad (17)$$

Матрица Якоби в новом базисе примет диагональный вид

$$dX_0(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix}. \qquad (18)$$

Критерий устойчивости согласно работе [20] имеет вид

$$V'''(0) = \frac{3\pi}{4\gamma^2}\left[-\frac{\partial^2 X'}{\partial x'^2}\frac{\partial^2 X'}{\partial x'\partial y'} + \frac{\partial X^2}{\partial y'^2}\frac{\partial^2 X^2}{\partial x'\partial y'} - \frac{\partial^2 X'}{\partial y'^2}\frac{\partial^2 X'}{\partial x'\partial y'} - \frac{\partial^2 X'}{\partial y'^2}\frac{\partial^2 X^2}{\partial y'^2}\right], \qquad (19)$$

где V — функция смещения, связанная с отображением Пуанкаре.

При подстановке выражений (17) в формулу (19) получим

$$V'''(0) = \frac{3\pi A}{4\gamma^3}(1+(a/\gamma)^2)(2+\sigma_2-\sigma_2^2). \qquad (20)$$

Ввиду того что параметры A, γ и $(2+\sigma_2 - a\sigma_2^2)$ положительные, получим $V'''(0) > 0$ и, следовательно, предельный цикл неустойчив [19].

Приближенные аналитические характеристики предельного цикла находим согласно методологии, развитой в [21]. В обозначениях этой работы получена матрица

$$P = \begin{bmatrix} 1 & A/\gamma \\ 0 & k/\gamma \end{bmatrix},$$

где $P = (\mathrm{Re}\,U_1 - \mathrm{Im}\,U_1)$, а U_1 определяется по формуле (13), с помощью которой вводится линейное преобразование

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & A/\gamma \\ 0 & k/\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow x' = \widetilde{x} + \frac{A}{\gamma}y', \ \ y' = \frac{k}{\gamma}\widetilde{y},$$

с точностью до знака (см. (13), (14)), совпадающее с заменой переменных, полученной при использовании предыдущего подхода [20]. В новых переменных динамическая система (11) при $\mu = 0$ примет вид

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = -\gamma\widetilde{y} - (A/\gamma)(2+\sigma_2)\widetilde{x}\widetilde{y} - \widetilde{x}^2 - (A/\gamma)^2(1+\sigma_2)\widetilde{y}^2,$$
$$\frac{d\widetilde{y}}{dt} = \gamma\widetilde{x} + \sigma_2\widetilde{x}\widetilde{y} + (\sigma_2 A/\gamma)\widetilde{y}^2. \qquad (21)$$

Собственная матрица линеаризованной системы (21) (матрица Якоби) имеет вид (ср. с матрицей (18))

$$\widetilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}.$$

Из системы (20) выпишем исходные функции, соответствующие формулам (17) подхода [20], необходимые для вычисления аналитических характеристик предельного цикла:

$$F_1(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = -\gamma\widetilde{y} - (A/\gamma)(2+\sigma_2)\widetilde{x}\widetilde{y} - \widetilde{x}^2 - (A/\gamma)^2(1+\sigma_2)\widetilde{y}^2,$$
$$F_2(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \gamma\widetilde{x} + \sigma_2\widetilde{x}\widetilde{y} + (\sigma_2 A/\gamma)\widetilde{y}^2. \qquad (22)$$

Запишем согласно работе [21] выражения для функций:

$$g_{11}=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{y}^2}+i\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{y}^2}\right)\right],$$

$$g_{02}=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{x}^2}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{y}^2}-2\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}}+i\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{x}^2}-\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{y}^2}+2\frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}}\right)\right],$$

$$g_{20}=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{x}^2}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{y}^2}+2\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}}+i\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{x}^2}-\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{y}^2}-2\frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}}\right)\right],\ g_{21}=0.$$

Тогда с учетом (22) получим

$$g_{11}=-\frac{1}{2}-\frac{A^2(\sigma_2+1)}{2\gamma^2}+\frac{i\sigma_2 A}{2\gamma},$$

$$g_{02}=\frac{(\sigma_2+1)}{2}\left(\frac{A^2}{\gamma^2}-1\right)-i\frac{A}{\gamma}(\sigma_2+1), \tag{23}$$

$$g_{20}=\frac{1}{2}(\sigma_2-1)+\frac{A}{2\gamma^2}(\sigma_2+1)+i\frac{A}{\gamma},\ g_{21}=0.$$

Далее, согласно работе [21], на основе (23) вычисляются выражения

$$C_1(0)=\frac{i}{2\gamma}\left(g_{20}g_{11}-2|g_{11}|^2-\frac{1}{3}|g_{02}|^2\right)+\frac{g_{21}}{2},$$

$$\operatorname{Re}C_1(0)=\frac{A}{8\gamma^2}\left(1+\frac{A^2}{\gamma^2}\right)(2+\sigma_2-\sigma_2^2)>0,$$

$$\operatorname{Im}C_1(0)=-\frac{(\sigma_2+1)}{8\gamma^3}(4A^2+\gamma^2+3A^2\sigma_2)-\frac{1}{24}(\sigma_2+1)^2\left(1+\frac{2A^2}{\gamma^2}+\frac{10A^4}{\gamma^4}\right)<0.$$

Основные аналитические характеристики предельного цикла находятся из формул

$$\mu_2=-\operatorname{Re}C_1(0)/\alpha'(0),\ \beta_2=2\operatorname{Re}C_1(0)>0,$$

$$\tau_2=-\frac{1}{\gamma}\left[\operatorname{Im}C_1(0)-\frac{\operatorname{Re}C_1(0)}{\alpha'(0)}\omega'(0)\right],$$

$$\alpha'(0)=\left.\frac{d\alpha}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}=\frac{1}{2}(\sigma_2-2)\frac{(\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_5)}{k^2}\left.\frac{dy}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0},$$

$$\left.\frac{dy_*}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}=$$

$$=\frac{(k-\sigma_5)^2\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)+\sigma_2(k-\sigma_5)[\sigma_3(\sigma_2-2\sigma_1)-\sigma_1\sigma_5]+\sigma_2^2\sigma_3(\sigma_3+\sigma_5)}{\sigma_2\lambda_0\{3(k-\sigma_5)^2\sigma_2\lambda_0+2(k-\sigma_5)[2\sigma_2\sigma_5\lambda_0+\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)]+\sigma_2[\lambda_0\sigma_5^2-\sigma_1\sigma_5+\sigma_3(\sigma_2-2\sigma_1)]\}},$$

$$\omega'(0)=\left.\frac{d\omega}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}=\frac{1}{2}\frac{[A(\sigma_2+2)(\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_5)k+\lambda_0\sigma_2]\left.\frac{dy_*}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}+k}{\det\tilde{A}(\det\tilde{A})^{1/2}},$$

$$T=\frac{2\pi}{\gamma}(1+\tau_2\varepsilon^2+O(\varepsilon^4)),\ \varepsilon^2=\frac{\lambda-\lambda_0}{\mu_2}+O(\lambda-\lambda_0)^2,\ \alpha(\lambda)=\operatorname{Re}\lambda_1=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\widetilde{A},$$

$$\omega(\lambda)=\operatorname{Im}\lambda_1=(1/2)[4\det\widetilde{A}-(\operatorname{tr}\widetilde{A})^2]^{1/2}>0,\ \lambda_1=\lambda_2=\alpha(\lambda)+i\omega(\lambda),$$

где матрица $\widetilde{A}$ имеет вид (6).

Поскольку показатель Флоке больше нуля, $\beta_2>0$, предельный цикл неустойчив, что согласуется с использованием критерия устойчивости Марсдена и Мак-Кракена (19), (20). Период предельного цикла T при увеличении σ_5 от 0 до ∞ (при $\varepsilon^2\approx 0$) уменьшается от $T_0=2\pi/\gamma_0$ до величины

$$T(\sigma_5=\infty)=2\pi/\gamma_0^2\left[\frac{(\sigma_2-\sigma_1-1)(\sigma_2-2\sigma_1)}{(\sigma_2-2)^2}\right]^{-1/2},$$

где γ_0^2 определяется по формуле (8) при $\sigma_5=0$ (получено из соотношений (8), (9) при $\sigma_5\to\infty$). При $\sigma_5=0$ показано, что $\mu_2<0$ и, следовательно, периодическое решение существует при $\lambda<\lambda_0$(«докритическая» бифуркация). Само периодическое решение с точностью до выбора начальной фазы можно записать по предложенной в работе [21] процедуре.

Определим некоторые оценки для периода колебаний. При $\sigma_5=0$ (отсутствие поступления материала биогенного происхождения), $k_1=0.5-0.6$ год$^{-1}$ (при отсутствии обломочного материала ($W=0$) и малых объемах биомассы B ее прирост составляет 50–60 % в год), когда k_1 и k_2 принадлежат небольшому сегменту (10), расположенному в треугольнике $0\le k_2<k_1\le 1$, получим $\omega=\gamma_0\approx 0.1\div 0.2$, откуда размерный период составит $T=2\pi/(\gamma_0 k_1)\cong$ 50–100 лет. При $\sigma_5>0$ вблизи значения $\sigma_3=\sigma_5(1-\sigma_1)/(\sigma_2-2)<0$ (σ_3 варьируется в широких пределах за счет параметра U) можно сделать λ_0 достаточно большой величиной (порядка единицы). В условиях реальных значений σ_5 порядка единицы и малости выражения $(\sigma_2-\sigma_1)\sigma_1(\sigma_2+4)+\sigma_2(1-2\sigma_2)$ в треугольной области $0\le\sigma_2<\sigma_1\le 1$ получим $\gamma_0=(\det\widetilde{A})^{1/2}$ того же порядка ($\gamma_0=1\div 2$), откуда $T=2\pi/(\gamma_0 k_1)\cong$ 5–10 лет, что на порядок меньше, чем при $\sigma_5=0$.

Предложенная модель — попытка описать сложные процессы взаимодействия в береговых экогеосистемах. Существуют большие возможности для ее совершенствования: от учета нелинейности в уравнении (1) (скорость абразии клифа и интенсивность истирания материала как функции объема материала и др.) до включения в модель новых механизмов и соответствующих им уравнений, например для скорости донной абразии на шельфе. Применение математического аппарата вычислений бифуркаций рождения цикла для такой задачи может стимулировать использование аналитико-вычислительной техники, изложенной в работах [20–22] при поиске и анализе бифуркаций рождения цикла в математических моделях различных экогеосистем.

Тестирование модели может быть проведено посредством уменьшающихся времен, что даст информацию об экологической ситуации прошлых лет на протяжении длительного периода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе с применением теории динамических систем представлен анализ экологического состояния размываемого берега моря при воздействии поверхностных гравитационных волн. Проведен качественный анализ абразии берега как экологической системы на основе упрощенной модели, описываемой системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Применяемая полуэмпирическая модель основана на рассмотрении осредненных величин и может рассматриваться как некоторая аппроксимация исходной модели гидродинамики. В отличие от известных подходов данная модель учитывает существенно нелинейные эффекты и управление (подпитка пляжа). Анализ проводится методами теории устойчивости. В настоящее время в связи с ухудшением экологического состояния возможно нарушение экологии равновесия и переход в новое состояние — устойчивое или неустойчивое. Получены характеристики предельного цикла, анализируется его устойчивость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артюхин Ю.В. Антропогенный фактор в развитии береговой зоны моря. — Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1989. — 144 с.
2. Selezov I.T., Volynski R.I. Simulation of nonlinear and KdV waves action to salinity transport and bottom performance // Proc. 26th Congress IAHR. — Madrid, 1991. — P. B202–B210.
3. Hales L. Accomplishments of the corps of engineers dredging research program // J. Coastal Engineering. — 1995. — **11**, N 1. — P. 68–88.
4. Orlić B., Rösingh J.W. Three-dimensional geomodelling for offshore aggregate resources assessment // Quart. J. of Engineering Geology and Hydrogeology. — 1995. — **28.** — P. 385–391.
5. Wang N., Gerritsen F. Nearshore circulation and dredged material transport at Waikiki Beach // Coastal Engineering. — 1995. — **24.** — P. 315–341.
6. Selezov I.T. Interaction of water waves with engineering construction and topography in coastal area // Fifth Int. Conf. on Coastal & Port Eng. in Developing Countries (South Africa, Cape Town, 19–23 April 1999). — P. 1–15.
7. Duncan J.H. Spilling breakers // Annual. Rev. Fluid Mech. — 2001. — **33.** — P. 519–547.
8. Kerr O.S. An exact solution in sedimentation under an inclined wall // Phys. Fluids. — 2006. — **18**, Iss. 12. — P. 128–141.
9. Simpson G. Coupled model of surface water flow, sediment transport and morphological evolution // J. Computer & Geosciences. — 2006. — **32**, N 10. — P. 1600–1614.
10. Cheng Y., Wang Y., Jiang C. A coupling model of nonlinear wave and sandy seabed dynamic interaction // China Ocean Eng. — 2007. — **21**, N 1. — P. 77–89.
11. Lin P., Lin P.L.-F. Turbulent transport, vorticity dynamics, and solute mixing under plunging breaking waves in surf zone // J. Geophys. Res. — 1998. — **103.** — P. 677–694.
12. Mocke G.P. Structure and modeling of surf zone turbulence due to wave breaking // J. Geophys. Res. — 2001. — **106**, N C8. — P. 39–57.
13. Reeve D.E., Spivack M. Prediction of long-term coastal evolution using moment equations // Proc. Coast. Dynamics, 2001, ASCE (Lund, Sweden, June 2001). — P. 9–15.
14. Ayyar H.R., Earattupuzha J.J. Equilibrium characteristics of sand beaches and their changes due to shore protection works // Water and Energy Int. — 1971. — **28**, Iss. 4. — P. 383–390.
15. Selezov I.T., Moskovkin V.M. Bifurcation of cycle birth in the wave shore dynamics // Тез. докл. Междунар. мат. конф. «Ляпуновские чтения», посвященной 100-летию создания А.М. Ляпуновым теории устойчивости движения (Харьков, 7–10 сентября 1992). — Харьков, 1992. — С. 12.
16. Московкин В.М., Есин В.В. Оптимальное управление абразионным процессом // Докл. АН СССР. — 1985. — **284**, № 3. — С. 731–734.
17. Selezov I.T. Wave hydraulic models as mathematical approximations // Proc. 22nd Congress IAHR, Techn. Session B. — Lausanne, 1987. — P. 301–306.

18. Reissig R., Sansone G., Conti R. Qualitative theorie nichtlinearer differential gleichungen. — Roma: Edizioni Cremonese, 1963. — 302 p.

19. Бутенин И.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 384 с.

20. Marsden J.E., McCraken M. The Hopf bifurcation and its applications. — New York: Springer, 1976. — 339 p.

21. Hassard B.D., Kazarinoff N.D., Wan Y.-H. Theory and applications of Hopf bifurcation // London Mathematical Society. Lecture Note Series. — Cambridge; New York: Cambridge Univ. Press, 1981. — **41.** — 311 p.

22. Poston T., Stewart I.N. Catastrophe theory and its applications. — London: Pitman, 1978. — 592 p.

Надійшла до редакції 01.02.2016

І.Т. Селезов, Ю.Г. Кривонос, В.М. Московкін

БІФУРКАЦІЯ НАРОДЖЕННЯ ЦИКЛУ В БЕРЕГОВИХ ЕКОГЕОСИСТЕМАХ

Анотація. На основі якісної теорії диференціальних рівнянь (теорії катастроф) досліджується оптимальне збереження екологічного стану об'єкта. Як об'єкт розглядається берег моря, що постійно зазнає руйнівного впливу хвиль. Його підживлюють для підтримання початкового стану. Моделюється підтримання рівноважного стану екологічної системи у деякому оптимальному режимі. На відміну від відомих підходів така модель враховує суттєво нелінійні ефекти та керування шляхом підживлення пляжу, що можна інтерпретувати як зворотний зв'язок. Аналіз виконано методом теорії стійкості. Отримано характеристики граничного циклу та проаналізовано його стійкість.

Ключові слова: біфуркація народження циклу, екогеосистема, стійкість, теорія катастроф.

I.T. Selezov, Iu. G. Kryvonos, V.M. Moskovkin

CYCLE BIRTH BIFURCATION IN SHORE ECOGEOSYSTEMS

Abstract. The qualitative analysis of abrasion of a coast as an ecological system on the basis of the simplified model described by system of ordinary nonlinear differential equations is presented. The applied semi-empirical model is based on reviewing of average magnitudes and can be considered as some approximation of the initial model of hydrodynamics. Unlike the well-known approaches, this model considers essentially nonlinear effects and control (beach feedback). The analysis is carried out by methods of stability theory. Performances of the limiting cycle are obtained and its stability is analyzed.

Keywords: bifurcation of cycle birth, ecogeosystem, stability, catastrophe theory.

Селезов Игорь Тимофеевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом Института гидромеханики НАН Украины, Киев, e-mail: selezov@ya.ru.

Кривонос Юрий Георгиевич,
академик НАН Украины, профессор, заместитель директора Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: aik@public.icyb.kiev.ua.

Московкин Владимир Михайлович,
доктор геогр. наук, профессор Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина, e-mail: moskovkin@bsu.edu.ru.