

В. Ю. Мірошніков, канд.
техн. наук

Харківський національний
університет будівництва та
архітектури,
м. Харків, Україна
e-mail: mivi30166@gmail.com

УДК 539.3

ПЕРША ОСНОВНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ У ПІВПРОСТОРИ З ДЕКІЛЬКОМА ПАРАЛЕЛЬНИМИ КРУГОВИМИ ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОРОЖНИНАМИ

Розраховано тривимірну задачу теорії пружності, коли в пружному півпросторі на межах паралельних циліндричних порожнин і на межі півпростору задано напруження. Розв'язок отримано узагальненим методом Фур'є стосовно системи рівнянь Ламе в циліндричних координатах, пов'язаних із циліндрами, та декартових координатах, пов'язаних з півпростором. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких зведено проблему, розв'язано методом зрізання. В результаті було знайдено переміщення та напруження в пружному тілі. Числові результати наведено для випадку півпростору та двох циліндрів.

Ключові слова: циліндричні порожнини в півпросторі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур'є.

Вступ

Під час проектування різного роду конструкцій в механіці гірських порід і геотехнічній механіці виникає потреба мати уявлення про напружено-деформований стан півпростору з порожнинами, якщо на межах порожнин та півпростору задані навантаження. Таку інформацію можна отримати, розв'язавши відповідну задачу теорії пружності. Готових розрахунків подібних задач в просторовому варіанті немає, тож проблема розрахунку таких задач є актуальною.

Аналіз публікацій

Просторові (тривимірні) задачі теорії пружності для тіл, які обмежені канонічними поверхнями (поверхні другого порядку: циліндр, конус, куля, еліпсоїд, параболоїд та ін.) вивчалися в роботах [1–4]. Точні розв'язки в цих роботах отримані виключно методом розділення змінних і методом Фур'є. Задачі для пружних тіл з декількома граничними поверхнями не можуть бути розв'язані в рамках класичного підходу. Для таких задач необхідно було створювати узагальнений метод Фур'є [5–8]. На основі цього методу і був розроблений підхід до розв'язання задачі, вказаної у заголовку.

Стаття є продовженням роботи автора: першу основну задачу на основі узагальненого методу Фур'є для простору з круговими циліндричними порожнинами розглянуто в роботі [9]. Змішану задачу для простору з циліндричними порожнинами, коли на межах одних паралельних циліндричних порожнин задані переміщення, на других – напруження, на третіх – дотичні зусилля і нормальні переміщення розглянуто в [10]. В цій роботі, на відміну від попередніх робіт автора, розглядається півпростір. В роботах [11–15] також застосовано узагальнений метод Фур'є для трансверсально-ізотропних тіл, обмежених координатними поверхнями в циліндричних і параболоїдних координатах, з прикладеною на межу півпростору силою. У статті [16] розглянуто першу основну задачу теорії пружності для півпростору з однією циліндричною порожниною і умовами на межі півпростору $\sigma_y = f(x) \cdot \cos(\lambda z)$, $\tau_{yx} = \tau_{yz} = 0$.

Мета статті

Провести аналіз напружено-деформованого стану півпростору з декількома циліндричними порожнинами, паралельними між собою і межею півпростору, провести аналіз їх взаємного впливу. Для досягнення цієї мети використано узагальнений метод Фур'є. Задача розглядається вперше.

Постановка задачі

Пружний однорідний півпростір має N кругових циліндричних паралельних порожнин, непересічних між собою і межею півпростору. Порожнини будемо розглядати у циліндричній системі координат (ρ_p, φ_p, z) , де p – номер циліндра, півпростір у декартовій системі координат (x, y, z) , яка однаково орієнтована та поєднана з системою координат циліндра з номером $p=1$. Межа півпростору розташована на відстані $y=h$. Рівняння межі півпростору $S_d: y=h$, поверхні циліндрів: $S_p: \rho_p = R_p$. На

межах півпростору та на межах порожнин задані напруження, які, будемо вважати, швидко спадають до нуля на великих відстанях від початку координат. Потрібно знайти розв'язок рівняння Ламе $\Delta \bar{u} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \operatorname{div} \bar{u} = 0$ за умов, що на межах циліндричних порожнин задані напруження $\bar{f}_p(\varphi_p, z)$, $p = 1, 2, \dots, N$; (ρ_p, φ_p, z) – система локальних циліндричних координат, а на межі півпростору задано напруження $\bar{f}_p(\varphi_p, z)$. Вектори $\bar{f}_p(\varphi_p, z)$ і $\bar{f}_d(x, z)$ будемо вважати швидко спадають до нуля по координаті z на великих відстанях від початку координат.

Метод розв'язання

У зазначених системах координат беремо базисні розв'язки рівняння Ламе:

$$\bar{u}_k^\pm(M_d; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} u^\pm(M_d; \lambda, \mu), \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

$$\bar{R}_{k,m}(M_p; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\varphi)}, \quad \bar{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = N_k^{(p)} [s_m(\rho_p; \lambda) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)}], \quad k = 1, 2, 3, \quad (2)$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla, \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \bar{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot), \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\bar{e}_3^{(1)}), \quad u^\pm(M_d; \lambda, \mu) = e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y},$$

$$N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla, \quad N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\nabla - \bar{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right], \quad N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\bar{e}_3^{(2)}),$$

$$s_m(\rho_p; \lambda) = (\operatorname{sign} \lambda)^m K_m(|\lambda \rho_p|), \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де $M_d = (x, y, z)$ – точка простору в декартовій системі координат, пов'язаної півпростором; $M_p = (\rho_p, \varphi_p, z)$ – точка простору в циліндричній системі координат, пов'язаній з p – м циліндром; $\bar{e}_j^{(k)}$, ($j = 1, 2, 3$) – орти декартової ($k=1$) і циліндричної ($k=2$) систем координат; σ – коефіцієнт Пуассона; $I_m(\lambda \rho)$, $K_m(|\lambda \rho|)$ – модифіковані функції Бесселя; $\bar{R}_{k,m}$, $\bar{S}_{k,m}$, ($k = 1, 2, 3$) – відповідно внутрішній та зовнішній розв'язки рівняння Ламе для циліндра; $\bar{u}_k^{(-)}$, $\bar{u}_k^{(+)}$ – розв'язки рівняння Ламе для півпростору.

Розв'язок задачі подамо у вигляді:

$$\bar{U} = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(+)}(M_d; \lambda, \mu) d\mu d\lambda + \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{k,m}(M_p; \lambda) d\lambda, \quad (3)$$

де $\bar{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$ і $\bar{u}_k^{(+)}(M_d; \lambda, \mu)$ – базисні розв'язки, які задані формулами (1) і (2), а невідомі функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ необхідно знайти із крайових умов.

Для переходу між системами координат (рис. 1) скористаємось формулами:

– для переходу від координат циліндра з номером p до координат півпростору

$$\bar{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = \frac{(-i \cdot \operatorname{sign}(\lambda))^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^m \cdot \bar{u}_k^{(-)} \cdot e^{-i\mu \bar{x}_p + \gamma \bar{y}_p} \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k = 1, 3, \quad (4)$$

$$\bar{S}_{2,m}(M_p; \lambda) = \frac{(-i \cdot \operatorname{sign}(\lambda))^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^m \cdot \left(\left(m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} + \lambda^2 y_p \right) \bar{u}_1^{(-)} - \lambda^2 \bar{u}_2^{(-)} + 4\mu(1 - \sigma) \bar{u}_3^{(-)} \right) \frac{e^{-i\mu \bar{x}_p + \gamma \bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2},$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega(\lambda, \mu) = \frac{\mu - \gamma}{\lambda}$, $y > 0$, $m = -\infty \dots \infty$;

– для переходу від координат півпростору до координат циліндра p

$$\begin{aligned} \bar{u}_k^{(+)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega)^m \bar{R}_{k,m} \cdot e^{i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p}, \quad (k=1, 3), \\ \bar{u}_2^{(+)} &= e^{i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega)^m \cdot \lambda^{-2} (m \cdot \mu \cdot \bar{R}_{1,m} + \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma)\bar{R}_{3,m}) + \bar{y}_p \cdot (i \cdot \omega)^m \bar{R}_{1,m} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де $\bar{R}_{k,m} = \bar{b}_{k,m}(\rho_p, \lambda) \cdot e^{i(n\varphi_p + \lambda z)}$; \bar{x}_p, \bar{y}_p – координати циліндра p відносно першого циліндра.

$$\bar{b}_{1,n}(\rho_p, \lambda) = \bar{e}_\rho \cdot I'_n(\lambda\rho_p) + i \cdot I_n(\lambda\rho_p) \cdot \left(\bar{e}_\varphi \frac{n}{\lambda\rho_p} + \bar{e}_z \right),$$

$$\bar{b}_{2,n}(\rho_p, \lambda) = \bar{e}_\rho \cdot \left[(4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho_p) + \lambda\rho_p I''_n(\lambda\rho_p) \right] + \bar{e}_\varphi i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho_p) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda\rho_p} I_n(\lambda\rho_p) \right) + \bar{e}_z i \lambda \rho_p I'_n(\lambda\rho_p),$$

$$\bar{b}_{3,n}(\rho_p, \lambda) = - \left[\bar{e}_\rho \cdot I_n(\lambda\rho_p) \frac{n}{\lambda\rho_p} + \bar{e}_\varphi \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho_p) \right];$$

– для переходу від координат циліндра з номером p до координат циліндра q

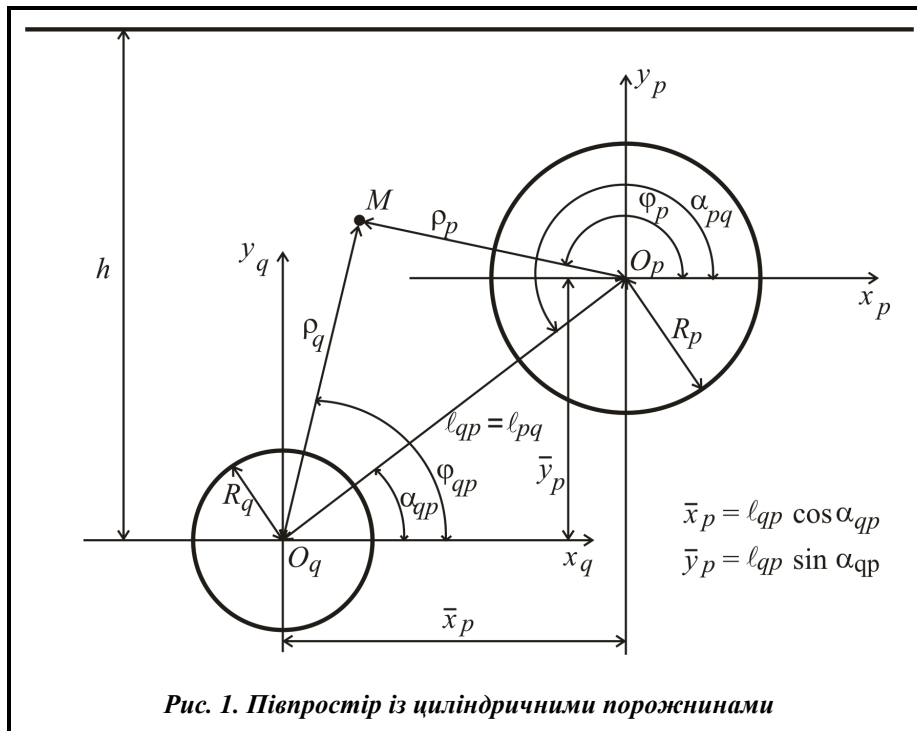
$$\bar{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\varphi_q + \lambda z)}, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\bar{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \bar{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda),$$

$$\bar{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \bar{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda), \quad (6)$$

$$\bar{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq}) \cdot \bar{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot \left[\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda\ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda\ell_{pq}) \right] \cdot \bar{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}.$$

де α_{pq} кут між осями координат та відрізком ℓ_{qp} , $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$.



Задовольняючи крайові умови на межі S_q циліндра з номером q у розв'язку (3) перепишемо $\vec{u}_k^{(+)}(M_d)$ в системі координат циліндра $p=q$ за формулами (5), а для кожного циліндра $p \neq q$ перепишемо $\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$ за формулами (6) і, враховуючи базисні розв'язки (2) для циліндра $p=q$, застосуємо до цього рівняння оператор напруження

$$F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2 \cdot \sigma} \vec{n} \cdot \text{div} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{U}) \right], \quad (7)$$

де \vec{n} – орт нормалі до поверхні S_q ; G – модуль зсуву; σ – коефіцієнт Пуассона. В результаті чого отримаємо рівняння відносно $H_s(\lambda, \mu)$ і $B_{s,m}^{(p)}(\lambda)$ на циліндрі q , яке позначимо

$$F\vec{U}|_{p=R_q} = \vec{f}_q(\varphi_q, z). \quad (8)$$

Задовольняючи крайові умови на межі півпростору S_d у розв'язку (3) перепишемо $\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$ для кожного циліндра в системі координат півпростору за допомогою формул (4) і, враховуючи базисний розв'язок для півпростору (1), застосуємо до цього рівняння оператор напруження (7), в результаті чого отримаємо рівняння відносно $H_s(\lambda, \mu)$ і $B_{s,m}^{(p)}(\lambda)$ на півпросторі, яке позначимо

$$F\vec{U}|_{y=h} = \vec{f}_d(x, z). \quad (9)$$

Звільнимо (9) від інтегралів та рядів і виразимо з нього $H_s(\lambda, \mu)$. Звільнивши (8) від інтегралів та рядів, підставимо в нього отриманий вираз для $H_s(\lambda, \mu)$. В результаті отримаємо векторне рівняння. Якщо тепер спроектуємо це векторне рівняння на осі координат то отримаємо сукупність $3N$ нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $B_{s,m}^{(p)}(\lambda)$. Для отриманих систем можна довести їх однозначну розв'язність. Більш того, ці системи можна розв'язувати методом зрізання, крім того має місце збіжність наближених розв'язків до точного [16]. Знайдені з системи рівнянь $B_{s,m}^{(p)}(\lambda)$ підставимо у (9) та отримаємо невідомі $H_s(\lambda, \mu)$.

Числові результати для двох циліндрів

Маємо дві паралельні циліндричні порожнини у півпросторі (рис. 1). Простір – ізотропний матеріал, коефіцієнт Пуассона $\sigma=0,35$, модуль пружності $E=2$ кН/см². Межа півпростору розташована на відстані $\ell_{qp} = R_p + h$ від циліндра q . На межах циліндрів задано напруження у вигляді $\sigma_\rho^{(p)} = \sigma_\rho^{(q)} = 0$; $\tau_{\rho\phi}^{(p)} = \tau_{\rho\phi}^{(q)} = 0$; $\tau_{\rho z}^{(p)} = \tau_{\rho z}^{(q)} = 0$, на межі півпростору $\sigma_y^{(d)} = -\left(10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2\right) \cdot \left(10^{-4} \cdot (x^2 + 10^2)^2\right)$; $\tau_{yx}^{(d)} = \tau_{yz}^{(d)} = 0$.

Отримана нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої по параметру m – порядок системи (параметр m досліджено у [14]), межі інтеграції для заданої функції були узяті від $-1 \dots 1$. Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона та Сімпсона. Точність виконання граничних умов за рахунок цих параметрів була доведена до 10^{-4} .

Для аналізу взаємного впливу півпростору та циліндричних порожнин було розраховано декілька варіантів геометричних параметрів

Варіант 1. Радіуси порожнин $R_p=50$ см, $R_q=10$ см, кут повороту $\alpha_{qp}=3\pi/2$, межа півпростору розташована на відстані $h=40$ см. На рис. 2 представлені нормальні напруження на перешийках між циліндром q і межею півпростору (рис. 2, а) та між циліндрами (рис. 2, б).

Віддаляючись від півпростору до циліндра (рис. 2, а), напруження σ_ρ і σ_ϕ поступово зменшуються, а наприкінці σ_ϕ та σ_z стають розтягувальними. Від циліндра q до циліндра p (рис. 2, б) напруження σ_ϕ і σ_z спочатку зменшуються, а потім, за рахунок послаблення простору порожниною p , зростають і стають на межі циліндра p навіть більшими, ніж на межі циліндра q , напруження σ_ρ на цьому проміжку, за рахунок перерозподілу напружень, має ефект невеликого зростання.

Варіант 2. Радіуси порожнин $R_p=30$ см, $R_q=10$ см, кут повороту $\alpha_{qp}=0$, межа півпростору розташована на відстані $h=40$ см. Нормальні напруження на перешийках представлені на рис. 3. В цьому випадку циліндрична порожнина p розташована на горизонтальній осі з циліндром q та, в порівнянні з першим варіантом, не впливає на напруження на перешийку між циліндром q і межею півпростору (рис. 3, а). Між циліндрами (рис. 3, б) напруження згасають з наближенням до циліндра p .

Варіант 3. Радіуси порожнин $R_p=10$ см, $R_q=10$ см, кут повороту $\alpha_{qp}=3\pi/2$, межа півпростору розташована на відстані $h=40$ см. Нормальні напруження на перешийках представлені на рис. 4.

В порівнянні з варіантом 1 зменшено радіус циліндра p , що вплинуло на напруження на перешийку між циліндрами (рис.3, праворуч) – σ_ϕ і σ_z на циліндрі q збільшилися, а на циліндрі p зменшилися, σ_p зростає та отримав більш виражений характер.

Варіант 4. Радіуси порожнин $R_p=10$ см, $R_q=10$ см, кут повороту $\alpha_{qp}=3\pi/2$, межа півпростору розташована на відстані $h=20$ см. Нормальні напруження на перешийках представлені на рис. 5.

В порівнянні з варіантом 3 зменшено відстань між циліндром q та півпростором та відстань між циліндрами, що суттєво вплинуло на напруження між циліндром q і межею півпростору (рис. 5, а) – на циліндрі q зросли напруження σ_ϕ і σ_z , а на півпросторі – напруження σ_ϕ . На перешийку між циліндрами (рис. 5, б) σ_p зменшився, σ_z зменшився на циліндрі q та збільшився на циліндрі p , σ_ϕ незначно зросло.

Варіант 5. Радіуси порожнин $R_p=200$ см, $R_q=10$ см, кут повороту $\alpha_{qp}=3\pi/2$, межа півпростору розташована на відстані $h=40$ см. Нормальні напруження на перешийках представлені на рис. 6.

В порівнянні з варіантами 1 і 3 радіус циліндра p збільшений, імітуючи півпростір. Ці зміни впливу на перешийку між циліндром q і межею півпростору (рис. 6, а) майже не мають. На перешийку між циліндрами (рис. 6, б), зі збільшенням радіуса R_p , зменшуються напруження σ_p , на циліндрі q зменшуються σ_ϕ і σ_z , між тим на циліндрі p вони зростають.

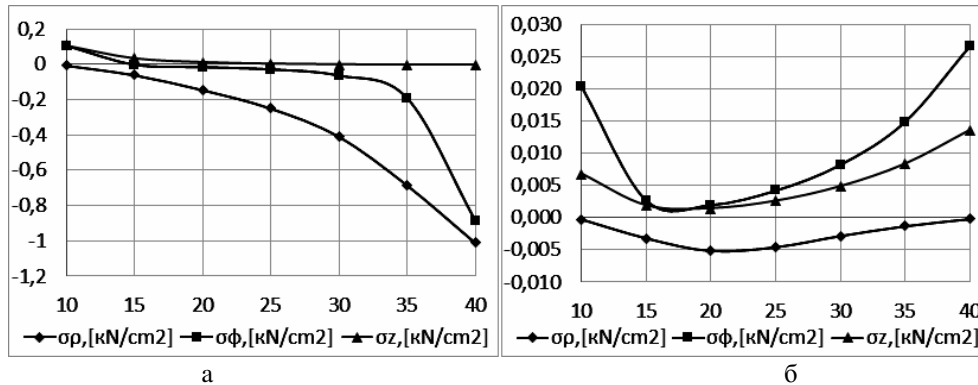


Рис. 2. Нормальні напруження відносно циліндра q на перешийках в площині $z=0$ для варіанта 1: а – між циліндром q і межею півпростору; б – між циліндрами

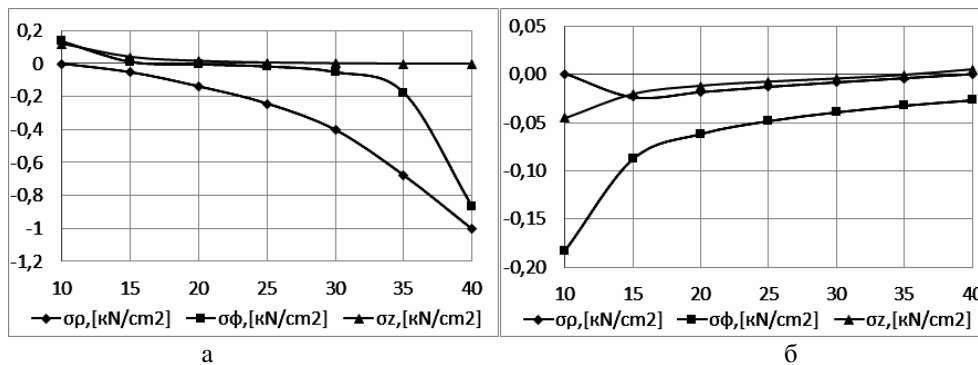


Рис. 3. Нормальні напруження відносно циліндра q на перешийках в площині $z=0$ для варіанта 2: а – між циліндром q і межею півпростору; б – між циліндрами

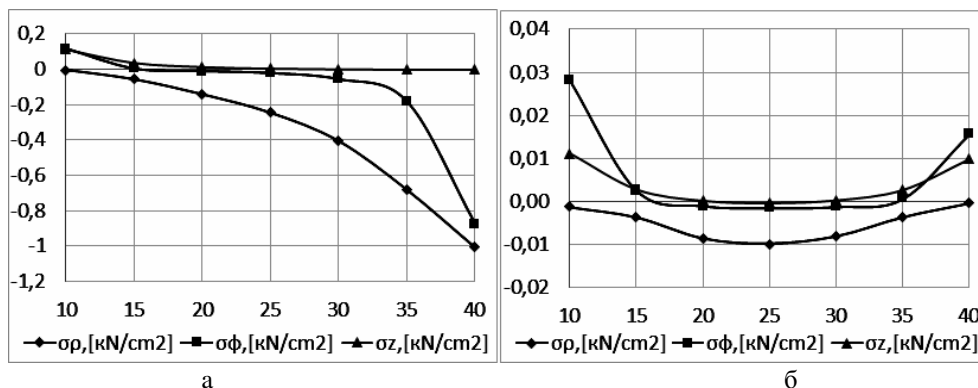


Рис. 4. Нормальні напруження відносно циліндра q на перехийках в площині $z=0$ для варіанта 3: а – між циліндром q і межею півпростору; б – між циліндрами

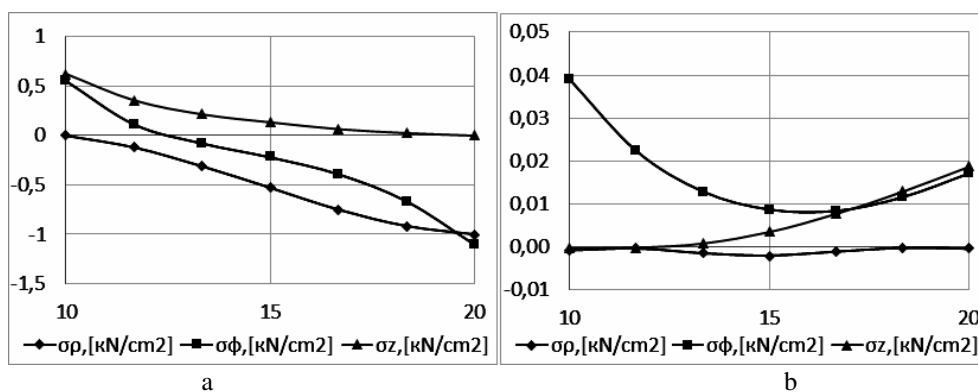


Рис. 5. Нормальні напруження відносно циліндра q на перехийках в площині $z=0$ для варіанта 4: а – між циліндром q і межею півпростору; б – між циліндрами

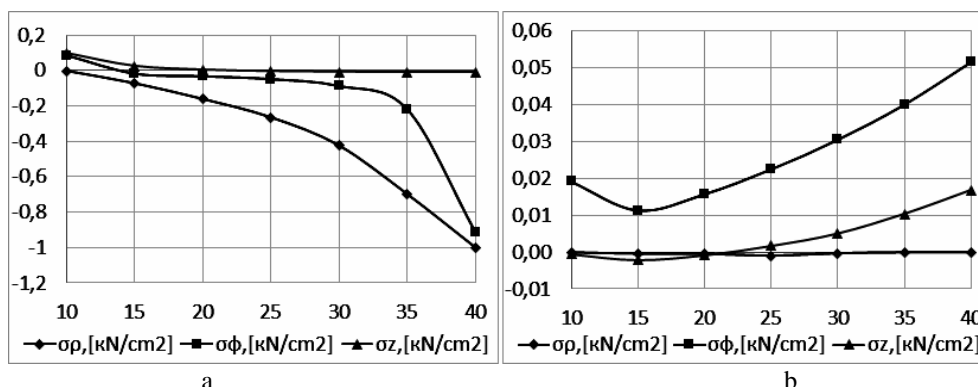


Рис. 6. Нормальні напруження відносно циліндра q на перехийках в площині $z=0$ для варіанта 5: а – між циліндром q і межею півпростору; б – між циліндрами

Висновки

За допомогою узагальненого методу Фур'є розв'язана просторова задача теорії пружності, коли на межі півпростору та на межах декількох паралельних циліндрових кругових порожнин задані напруження. Задача зведена до сукупності нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Числові дослідження алгебраїчної системи для двох циліндрів і півпростору дають можливість стверджувати, що її розв'язок може бути з будь-яким ступенем точності знайдено методом редукції. Це підтверджується високою точністю виконання граничних умов.

Наведені графіки дають картину розподілу напружень в тілі в найбільш цікавих зонах, уявлення про взаємний вплив циліндрових порожнин в півпросторі та взаємний вплив півпростору і циліндрових порожнин.

За темою дослідження можливий подальший розгляд задач зі змішаними крайовими умовами, коли на одних межах задані напруження, на інших – переміщення.

Література

1. Подильчук Ю. Н. Пространственные задачи теории упругости. К.: Наук. думка, 1979. 240 с.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы. К.: Наук. думка, 1985. 280 с.
3. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. К.: Наук. думка, 1979. 265 с.
4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
5. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. К.: Наук. думка, 1970. 323 с.
6. Гузь А. Н., Головчан В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. К.: Наук. думка, 1972. 254 с.
7. Николаев О. Г. Узагальнений метод Фур'є в просторових задачах теорії пружності для канонічних багатозв'язкових тіл. Дніпропетровськ: автореф. дис. д-ра фіз.-мат. наук, 1997. 36 с.
8. Николаев А. Г., Проценко В. С.. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.
9. Мірошніков В. Ю. Перша основна задача теорії пружності в просторі з N паралельними круговими циліндричними порожнинами. *Проблеми машиностроєння*. 2017. Т. 20. № 4. С. 45–52.
10. Miroschnikov V. Yu. On computation of the stress-strain state of a space weakened by a system of parallel circular cylindrical cavities with different edge conditions. 4th International Conference «Science and practice: a new level of integration in the modern world». Scope academic house. - Sheffield, UK. – 2017. - P. 77-83.
11. Щербакова Ю. А., Шехватова Е. М. Сравнительный анализ НДС многосвязных трансверсально-изотропных тел с различными упругими характеристиками. *Вісн. Запоріж. нац. ун-ту*. 2015. Вип. 2. – С. 253–261.
12. Николаев А. Г., Щербакова Ю. А. Аппарат и приложения обобщенного метода Фурье для трансверсально-изотропных тел, ограниченных плоскостью и параболоидом вращения. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2009. Т. 52. №3. – С. 160–169.
13. Николаев А. Г., Щербакова Ю. А. Обоснование метода Фурье в осесимметричных задачах теории упругости для трансверсально-изотропных тел, ограниченных поверхностью параболоида. *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии*: Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ». 2010. Вып. 48. С. 180–190.
14. Николаев А. Г., Щербакова А. Ю., Южно А. И. Действие сосредоточенной силы на трансверсально-изотропное полупространство с параболоидальным включением. *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов*. Харьков: НАКУ, 2006. Вып. 2(45). С. 47–51.
15. Николаев А. Г., Орлов Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. – Днепр: Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, 2012. Вип.20. – С. 253 – 259.
16. Проценко В. С., Українець Н. А. Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью. *Вісн. Запоріж. нац. ун-ту*. 2015. Вип. 2. С. 193–202.

Надійшла до редакції 17.01.18