

УДК 621.318.3

**А. Е. Божко**, член-кор. НАН Украины**К. Б. Мягкохлеб**, канд. техн. наукИнститут проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины  
(г. Харьков, e-mail: bozhko@ipmach.kharkov.ua)**ОТКЛИК КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ НА ИЗМЕНЕНИЕ ЧАСТОТЫ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ**

*Определяются колебания масс колебательной системы с двумя степенями свободы в зависимости от изменения частоты входного воздействия. Показано, что при плавном изменении частот надо учитывать только амплитуды колебаний, ориентируясь на амплитудно-частотную характеристику колебательной системы.*

*Визначаються коливання мас коливальної системи з двома ступенями свободи в залежності від зміни частоти вхідного впливу. Доведено, що при плавній зміні частот треба враховувати тільки амплітуди коливань, орієнтуючись на амплітудно-частотну характеристику коливальної системи.*

**Введение**

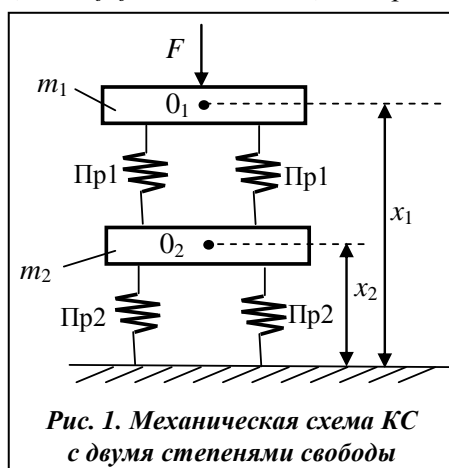
Колебательная система (КС) с двумя степенями свободы часто встречается в технических устройствах, например в электромагнитных вибровозбудителях (ЭМВ) с реактивной массой [1]. Такие вибровозбудители применяются в вибрационных испытательных стендах. В методе качающей частоты вибрации, который используется при испытании машин и приборов, осуществляется изменение частоты управляющего сигнала ЭМВ. Также при воспроизведении ЭМВ стохастических вибраций амплитуды и частоты управляющих воздействий изменяются случайным образом. В работе [2] был рассмотрен случай изменения частоты управления однократным ЭМВ без реактивной массы (РМ). В этом случае подвижная часть ЭМВ представляет собой КС с одной степенью свободы.

**Основная часть**

В ЭМВ с РМ подвижная часть является КС с двумя степенями свободы.

Механическая схема такой КС изображена на рис. 1, где  $m_1$ ,  $m_2$  – массы; Пр1, Пр2 – пружины;  $F$  – сила;  $x_1$ ,  $x_2$  – перемещения  $m_1$  и  $m_2$  соответственно.

Примем, что сила  $F = F_a \sin(\omega t + \varphi)$ , где  $F_a$  – амплитуда;  $\omega$  – круговая частота ( $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – частота [Гц]);  $t$  – время;  $\varphi$  – угол сдвига  $F(t)$  от  $F_a \sin \omega t$  при  $t = 0$ .



**Рис. 1. Механическая схема КС с двумя степенями свободы**

Для того чтобы проанализировать процесс изменения частоты в КС, необходимо вначале проанализировать входное воздействие  $F$ , изображенное на рис. 2.

На этом графике на интервале  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$ ,  $\Delta t_3$  показаны силы с разными частотами  $\omega_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . На каждом  $\Delta t_k$  скорость  $v_k = \frac{dF}{dt} = F_m \omega_k \cos \omega_k t$ ,  $k = 1, 2, 3$  также разная, причем из выражения  $v_k$  и рис. 2 видно, что чем выше частота  $\omega_k$ , тем больше  $v_k$ . Математически этот факт доказан в работе [2].

В общем случае процесс изменения частоты в КС будем рассматривать при ненулевых начальных

условиях  $x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0)$ , где под моментом начальных условий подразумевается момент изменения частоты  $\omega$ . Заметим, что при колебаниях масс  $m_1$  и  $m_2$  пружины Пр1 и Пр2 сжимаются и разжимаются. При этом возникает трение частей КС о воздух, что теоретически объясняется тем, что эта КС является диссипативной. Поэтому уравнения данной КС будут следующими [3]:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1 = F + b_1 \frac{dx_2}{dt} + c_1 x_2; \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + (b_1 + b_2) \frac{dx_2}{dt} + (c_1 + c_2) x_2 = b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1. \end{cases} \quad (1)$$

Перед определением координат  $x_1(t), x_2(t)$  осуществим преобразования на основе операционного метода [4]. Уравнения (1) в операционной форме имеют вид

$$\begin{cases} x_1(p) (m_1 p^2 + b_1 p + c_1) = F(p) + \Delta F_1(p) + (b_1 p + c_1) x_2(p); \\ x_2(p) [m_2 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2] = (b_1 p + c_1) x_1(p) + \Delta F_2(p), \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_1(p), x_2(p), F(p), \Delta F_1(p), \Delta F_2(p)$  – изображение Карсона, соответствующие оригиналам  $x_1(t), x_2(t), F(t), \Delta F_1(t), \Delta F_2(t)$  – изображения Карсона, соответствующие начальным условиям  $x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)$ , имеют вид

$$\begin{cases} \Delta F_1(p) = m_1 [p^2 x_1(0) + p \dot{x}_1(0)] + b_1 p x_1(0); \\ \Delta F_2(p) = m_2 [p^2 x_2(0) + p \dot{x}_2(0)] + (b_1 + b_2) p x_2(0), \end{cases} \quad (3)$$

где  $x_k(0) = \frac{dx_k(0)}{dt}, k = 1, 2$ .

При  $x_k(0) = \dot{x}_k(0) = 0, \Delta F_k(p) = 0$ , и решение уравнений (2) упрощается. Однако в нашем исследовании вариант  $\Delta F_k(t) \xrightarrow{\leftarrow} \Delta F_k(p) = 0$  может быть только тогда, когда начало изменения частоты  $\omega$  в силе  $F(t)$  специально регулируется системой управления. Если этого нет, то  $\Delta F_k(p) \neq 0, k = 1, 2$ , что значительно усложняет решение (2). В нашем случае будем осуществлять решение (2) при  $\Delta F_k(p) \neq 0, k = 1, 2$ .

Введем следующие значения:

$$w_1 = w_1(p) = \frac{1}{m_1 p^2 + b_1 p + c_1}; \quad w_2 = w_2(p) = b_1 p + c_1; \quad w_3 = w_3(p) = \frac{1}{m_2 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2}.$$

Величины  $w_1, w_2, w_3$  являются частными передаточными функциями в КС с двумя степенями свободы. Из (2) с учетом принятых обозначений получим

$$\begin{cases} x_1 = \frac{(F + \Delta F_1 + \Delta F_2 w_2 w_3) w_1}{1 - w_1 w_2^2 w_3}, \\ x_2 = \frac{[(F + \Delta F_1) w_1 w_2 + \Delta F_2] w_3}{1 - w_1 w_2^2 w_3}. \end{cases} \quad (4)$$

Вставим в (4) значения  $w_1, w_2, w_3$ . Тогда имеем

$$x_1(p) = \frac{[F(p) + \Delta F_1(p)] [m_2 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2] + \Delta F_2(p) (b_1 p + c_1)}{(m_1 p^2 + b_1 p + c_1) [m_2 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2] - (b_1 p + c_1)^2}, \quad (5)$$

$$x_2(p) = \frac{[F(p) + \Delta F_1(p)] (b_1 p + c_1) + \Delta F_2(p) (m_1 p^2 + b_1 p + c_1)}{(m_1 p^2 + b_1 p + c_1) [m_2 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2] - (b_1 p + c_1)^2}. \quad (6)$$

Выражения (5), (6) можно упростить, если учесть следующий физический факт. Жесткость пружин Пр2 значительно больше жесткости пружин Пр1, то есть  $c_2 \gg c_1$ . Кроме того, диссипация в КС возникает в результате трения частей КС о воздух, а это значит, что

диссипация  $b_1$  мала ( $b_1$  значительно меньше единицы), но  $b_2$  может быть значительно больше  $b_1$ , если параллельно пружинам Пр2 стоит демпфер. Исходя из этого в знаменателях (5), (6) вычитаемым  $(b_1p + c_1)^2$  можно пренебречь. Тогда

$$x_1(p) = \frac{F(p) + \Delta F_1(p)}{m_1 p^2 + b_1 p + c_1} + \frac{\Delta F_2(p)(b_1 p + c_1)}{(m_1 p^2 + b_1 p + c_1)[m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2]}, \quad (7)$$

$$x_2(p) = \frac{[F(p) + \Delta F_1(p)](b_1 p + c_1)}{(m_1 p^2 + b_1 p + c_1)[m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2]} + \frac{\Delta F_2(p)}{m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2}. \quad (8)$$

Из (3) видно, что  $\Delta F_1(p)$  и  $\Delta F_2(p)$  включают в себя по три составляющих. А это значит, что в (7) и (8) с учетом (3) будем по семь составляющих дробей и находить надо четырнадцать оригиналов от изображений (7), (8). При этом необходимо учитывать то обстоятельство, что сила  $F(t) = F_a \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$  изменяется на силу  $F(t) = F_a \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ , то есть происходит изменение частоты  $\omega$  и угла  $\varphi$ . В этом случае необходимо учитывать такие характеристики КС как амплитудно-частотные (АЧХ) как для  $x_1(t)$ , так и для  $x_2(t)$ . Координаты  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  из  $x_{11}(t) = x_{1a1} \sin(\omega_k t + \Psi_{11})$ ,  $x_{21}(t) = x_{2a1} \sin(\omega_k t + \Psi_{21})$  изменяются на  $x_{12}(t) = x_{1a2} \sin(\omega t + \Psi_{12})$ ,  $x_{22}(t) = x_{2a2} \sin(\omega t + \Psi_{22})$ . Здесь амплитуды  $x_{1a}$  и  $x_{2a}$  изменяются в соответствии с АЧХ КС1 и КС2, где КС1 – колебательная система массы  $m_1$ ; КС2 – колебательная система массы  $m_2$ . Для этих КС1 и КС2 амплитуды  $x_{1a}$  и  $x_{2a}$  изменяются в соответствии с формулами (принимая, что начальные условия  $x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2 = 0$ )

$$x_{1a} = \frac{F_a}{\sqrt{(c_1 - m_1 \omega^2)^2 + (\omega b_1)^2}}, \quad (9)$$

$$x_{2a} = \frac{F_a}{a^2 + \omega^2 d^2} \sqrt{(ac_1 - b_1 \omega^2 d)^2 + \omega^2 (ab_1 + dc_1)^2}, \quad (10)$$

где  $a = \alpha\beta - \omega^2 b_1(b_1 + b_2)$ ,  $\alpha = c_1 - m_1 \omega^2$ ,  $d = \omega[\alpha(b_1 + b_2) + b_1\beta]$ ,  $\beta = c_1 + c_2 - m_2 \omega^2$ .

Из (9), (10) видим, что при постоянной амплитуде силы  $F_a = \text{const}$  и  $b_1 = b_2 = 0$

$$\begin{cases} x_{1a \max} = \frac{F_a}{c_1 - m_1 \omega_{p1}^2}, \\ x_{2a \max} = \left( \frac{F_a c_1}{c_1 - m_1 \omega_{p1}^2} \right) \left( \frac{F_a c_1}{c_1 + c_2 - m_2 \omega_{p2}^2} \right), \end{cases} \quad (11)$$

где  $\omega_{1p}$ ,  $\omega_{2p}$  – резонансные частоты в данной КС. Эти частоты определим из (11). Они имеют аналитический вид

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1} - \frac{F_a}{m_1 x_{1a \max}}}, \quad (12)$$

$$\omega_{p2} = \left\langle \frac{c_1 m_2 (c_1 + c_2) m_1}{2 m_1 m_2} \pm \frac{1}{2 m_1 m_2} \left\{ [c_1 m_2 (c_1 + c_2) m_1]^2 - 4 m_1 m_2 \left[ c_1 (c_1 + c_2) - \frac{F_a c_1}{x_{2a \max}} \right] \right\}^{1/2} \right\rangle^{1/2}. \quad (13)$$

Если принять  $x_{1a \max} = x_{2a \max} = \infty$ , то из (12), (13) получаем

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}, \quad (14)$$

$$\omega_{p2} = \left\langle \frac{1}{2} \left( \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2} + \frac{c_2}{m_2} \right) \pm \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1(c_1 + c_2)}{m_1 m_2} \right\}^{1/2} \right\rangle^{1/2}. \quad (15)$$

Из (14) видно, что  $\omega_{p1} = \omega_{10}$ , где  $\omega_{10}$  – собственная частота колебаний КС с одной степенью свободы с массой  $m_1$  и коэффициентом жесткости  $c_1$ .

На основании (15) в рассматриваемой КС имеется две резонансных частоты  $\omega_{p2}$ , то есть такие частоты, при которых  $x_{2amax} = \infty$ . Физически этот факт связан с КС с  $m_1$  и  $c_1$ . При  $x_{1amax} = \infty$  надо полагать, что при  $b_1 = b_2 = 0$   $x_{2amax} = \infty$ . Поэтому при частоте  $\omega_{p1}$  в КС с  $m_2$  и  $c_2$  имеется частота  $\omega_{p21}$ . Кроме того, в этой КС с  $m_2$  и  $c_2$  имеется  $\omega_{p22} < \omega_{p21}$ .

Так как до момента изменения частоты с  $\omega_k$  на  $\omega_l$  в КС происходили колебания

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{1ak} \sin(\omega_k t + \varphi_k - \varphi_{1k}), \\ x_2(t) = x_{2ak} \sin(\omega_k t + \varphi_k - \varphi_{2k}), \\ \frac{dx_1(t)}{dt} = x_{1ak} \omega_k \cos(\omega_k t + \varphi_k - \varphi_{1k}), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_{2ak} \omega_k \cos(\omega_k t + \varphi_k - \varphi_{2k}), \end{cases}$$

где  $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$  – величины фазочастотных характеристик КС с  $m_1$  и  $c_1$  и КС с  $m_2$  и  $c_2$  при частоте  $\omega_k$ , то в момент ( $t = 0$ ) изменения частоты с  $\omega_k$  на  $\omega_l$

$$\begin{cases} x_{1k}(0) = x_{1ak} \sin(\varphi - \varphi_{1k}), \\ x_{2k}(0) = x_{2ak} \sin(\varphi - \varphi_{1k} - \varphi_{2k}), \\ \dot{x}_{1k}(0) = x_{1ak} \omega_k \cos(\varphi - \varphi_{1k}), \\ \dot{x}_{2k}(0) = x_{2ak} \omega_k \cos(\varphi - \varphi_{1k} - \varphi_{2k}), \end{cases}, \quad (16)$$

то есть  $x_{1k}(0), x_{2k}(0), \dot{x}_{1k}(0), \dot{x}_{2k}(0)$  являются постоянными составляющими и они входят в  $\Delta F_1(p), \Delta F_2(p)$ . В дальнейшем будем учитывать следующие обозначения:  $\varphi - \varphi_{1k} = \Psi_1, \varphi - \varphi_{1k} - \varphi_{2k} = \Psi_2$ .

Эти постоянные составляющие относятся к частоте  $\omega_k$ . Поэтому их значения должны быть равными значениям в амплитудно-частотных характеристиках (АЧХ) (9), (10) на частоте  $\omega_k$ . При переключении частот с  $\omega_k$  на  $\omega_l$  значения амплитуд колебаний  $m_1$  и  $m_2$  становятся равными значениям в АЧХ (9), (10), но уже на частоте  $\omega_l$ . В данном случае во всей КС происходят переходные процессы.

Для расчета этих переходных процессов необходимо найти оригиналы  $x_1(t), x_2(t)$ , соответствующие изображениям Карсона (7), (8). Предстоящие решения в нахождении  $x_1(t) \xrightarrow{\leftarrow} x_1(p), x_2(t) \xrightarrow{\leftarrow} x_2(p)$ , а также  $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$  имеют громоздкую математическую интерпретацию. Для сокращения данного текста без ущерба для читателя эту громоздкость осуществим в черновиках, а здесь приведем конечные результаты. Оригиналы  $x_1(t), x_2(t)$  находим с помощью метода разложения (7), (8) на сумму дробей и по таблицам [4].

При переключении КС с  $\omega_k$  на  $\omega_l$  считаем, что величина входного воздействия изменяется с величины  $F_{ak} \sin(\omega_k t + \varphi_k)$  на величину  $F_{al} \sin(\omega_l t + \varphi_l)$ , а это означает, что

$$F_{p \leftarrow} \xrightarrow{F_{al}} \sin(\omega_l t + \varphi_l) - F_{ak} \sin(\omega_k t + \varphi_k). \quad (17)$$

Оригинал  $x_{11}(t) \xrightarrow{\leftarrow} \frac{F(p)}{m_1 p^2 + b_1 p + c_1}$  будет следующим:

$$x_{11}(t) = \frac{F_{al}}{m_1} \left[ \frac{A_{1l}}{\omega_l} \sin \omega_l t + \frac{B_{1l}}{\omega_l^2} (1 - \cos \omega_l t) \right] - \frac{F_{ak}}{m_1} \left[ \frac{A_{1k}}{\omega_k} \sin \omega_k t + \frac{B_{1k}}{\omega_k^2} (1 - \cos \omega_k t) \right] +$$

$$+ \frac{1}{m_1 \omega_{10}} (F_{al} c_{al} - F_{ak} c_{1k}) e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \sin \omega_{10} t +$$

$$+ \frac{1}{c_1} (F_{al} D_{al} - F_{ak} D_{1k}) \left[ 1 - e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \left( \cos \omega_{10} t + \frac{b_1}{2m_1 \omega_{10}} \sin \omega_{10} t \right) \right], \quad (18)$$

где  $A_{1s} = -c_{1s}$ ,  $D_{1s} = -\frac{B_{1s} c_1}{m_1 \omega_s^2}$ ,  $c_{1s} = \frac{m_1}{b_1} \left[ B_{1s} \left( 1 - \frac{c_1}{m_1 \omega_s^2} \right) - \sin \varphi_s \right]$ ,

$$B_{1s} = \frac{\omega_s \cos \varphi_s + \frac{m_1}{b_1} \left( \omega_s^2 - \frac{c_1}{m_1} \right) \sin \varphi_s}{\frac{b_1}{m_1} + \frac{m_1}{b_1} \left( 1 - \frac{c_1}{m_1 \omega_s^2} \right) \left( \omega_s^2 - \frac{c_1}{m_1} \right)}, \quad s = l, k, \quad \omega_{10} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1} - \frac{b_1^2}{4m_1^2}}.$$

Далее определим оригинал  $x_{12}(t) \xrightarrow{\leftarrow} \frac{\Delta F_1(p)}{m_1 p^2 + b_1 p + c_1}$ , для чего в это выражение вставим верхнее соотношение из (3) и значения  $x_{1k}(0)$ ,  $\dot{x}_{1k}(0)$ , представленные в (16). Тогда получим

$$x_{12}(t) = x_{1ak} e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \left\{ \sin \Psi_{1k} \left( \cos \omega_{10} t - \frac{b_1}{2m_1 \omega_{10}} \sin \omega_{10} t \right) + \frac{1}{\omega_{10}} \sin \omega_{10} t \left[ \omega_k \cos \Psi_{1k} + \frac{b_1}{m_1} \sin \Psi_{1k} \right] \right\}. \quad (19)$$

Оригинал  $x_{13}(t) = \frac{\Delta F_2(p) (b_1 p + c_1)}{m_1 \left( p^2 + \frac{b_1}{m_1} p + \frac{c_1}{m_1} \right) m_2 \left( p^2 + \frac{b_1 + b_2}{m_2} p + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right)}$ .  $\Delta F_2(p)$  раскроем с

помощью нижнего соотношения из (3) и значений  $x_{2k}(0)$ ,  $\dot{x}_{2k}(0)$ , представленных в (16). В результате получим, что

$$x_{13}(t) = \frac{A_{2k}}{m_1} \frac{1}{\omega_{10}} e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \sin \omega_{10} t + \frac{B_{2k}}{c_1} \left[ 1 - e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \left( \cos \omega_{10} t + \frac{b_1}{2m_1 \omega_{10}} \sin \omega_{10} t \right) \right] +$$

$$+ \frac{C_{2k}}{m_2} \frac{1}{\omega_{20}} e^{-\frac{(b_1+b_2)t}{2m_2}} \sin \omega_{20} t + \frac{D_{2k}}{c_1 + c_2} \left[ 1 - e^{-\frac{(b_1+b_2)t}{2m_2}} \left( \cos \omega_{20} t + \frac{b_1 + b_2}{2m_2 \omega_{20}} \sin \omega_{20} t \right) \right], \quad (20)$$

где

$$A_{3k} = b_1 x_{2ak} \sin \Psi_{2k} - \frac{m_1}{m_2} C_{2k}, \quad D_{2k} = -B_{2k} \left( 1 + \frac{c_2}{c_1} \right),$$

$$B_{2k} = \frac{c_1 (c_1 + c_2)}{(b_1 c_2 - b_2 c_1) m_2} (b_1 m_2 x_{2ak} \sin \Psi_{2k} - c_{2k} m_1) + c_{2k} c_1,$$

$$C_{2k} = x_{2ak} b_1 \left\{ \left[ b_1 + b_2 + \frac{c_1 (c_1 + c_2)}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \right] \sin \Psi_{2k} - (m_2 \omega_k + b_1 + b_2) \cos \Psi_{2k} \right\}_1 \times$$

$$\times \left[ \frac{(b_1 + b_2) m_1}{m_2} - b_1 + \frac{(c_1 + c_2) c_1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} m_1 - c_1 - \frac{m_1^2 (c_1 + c_2)}{(b_1 c_2 - b_2 c_1)} \frac{1}{m_2} (c_1 + c_2) \right]^{-1}.$$

Таким образом,

$$x_1(t) = \sum_{s=1}^3 x_{1s} \cdot \quad (21)$$

Далее определим  $x_2(t) \overset{\rightarrow}{\leftarrow} x_2(p) = (8)$ . Здесь  $F(p) \overset{\rightarrow}{\leftarrow} F(t) = (17)$ ,  $\Delta F_1(p)$  и  $\Delta F_2(p)$  определяются из (3).

На основании (8) видим, что

$$x_2(t) = \sum_{s=1}^3 x_{2s}(t), \quad (22)$$

и будем находить отдельные  $x_{2s}(t)$ ,  $s = 1, 2, 3$ . В результате вычислений получим

$$\begin{aligned} x_{21}(t) \overset{\rightarrow}{\leftarrow} & \left[ \frac{[F_l(p) - F_k(p)](b_1 p + c_1)}{(m_1 p^2 + b_1 p + c_1)[m_1 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2]} \right] \overset{\rightarrow}{\leftarrow} \\ & \overset{\rightarrow}{\leftarrow} \frac{F_{2l}}{m_1 m_2} \left\{ \frac{A_{2l}}{\omega_l} \sin \omega_l t + \frac{B_{2l}}{\omega_l^2} (1 - \cos \omega_l t) + \frac{C_{2l}}{\omega_l} e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \sin \omega_{20} t + \right. \\ & + D_{2l} \frac{m_1}{c_1} \left[ 1 - e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \left( \cos \omega_{20} t + \frac{b_1}{2m_1 \omega_{20}} \sin \omega_{20} t \right) + E_{2l} \frac{1}{\omega_l} e^{-\frac{(b_1+b_2)t}{2m_2}} \sin \omega_{20} t \right] + \\ & \left. + G_{2l} \frac{m_2}{c_1 + c_2} \left[ 1 - e^{-\frac{(b_1+b_2)t}{2m_2}} \left( \cos \omega_{20} t + \frac{b_1 + b_2}{2m_2 \omega_{20}} \sin \omega_{20} t \right) \right] \right\} - \quad (23) \\ & - \frac{F_{ak}}{m_1 m_2} \left\{ \frac{A_{2k}}{\omega_k} \sin \omega_k t + \frac{B_{2k}}{\omega_k^2} (1 - \cos \omega_k t) + \frac{C_{2k}}{\omega_{20}} e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \sin \omega_{20} t + \right. \\ & + D_{2k} \frac{m_1}{c_1} \left[ 1 - e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \left( \cos \omega_{20} t + \frac{b_1}{2m_1 \omega_{20}} \sin \omega_{20} t \right) + E_{2k} \frac{1}{\omega_l} e^{-\frac{(b_1+b_2)t}{2m_2}} \sin \omega_{20} t \right] + \\ & \left. + G_{2k} \frac{m_2}{c_1 + c_2} \left[ 1 - e^{-\frac{(b_1+b_2)t}{2m_2}} \left( \cos \omega_{20} t + \frac{b_1 + b_2}{2m_2 \omega_{20}} \sin \omega_{20} t \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $A_{2s}$ ,  $B_{2s}$ ,  $C_{2s}$ ,  $D_{2s}$ ,  $E_{2s}$ ,  $G_{2s}$ ,  $s = l, k$  определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} & A_{2s} + C_{2s} + E_{2s} = 0; \\ & A_{2s} \left( \frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1} \right) + B_{2s} + C_{2s} \frac{b_1 + b_2}{m_2} + D_{2s} + E_{2s} \frac{b_1}{m_1} + G_{2s} = 0; \\ & A_{2s} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{b_1(b_1 + b_2)}{m_1 m_2} + \frac{c_1}{m_1} \right) + B_{2s} \left( \frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1} \right) + C_{2s} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_2} + \omega_s^2 \right) + \\ & \quad + D_{2s} \frac{b_1 + b_2}{m_2} + E_{2s} \left( \frac{c_1}{m_1} + \omega_s^2 \right) + G_{2s} \frac{b_1}{m_1} = b_1 \sin \varphi_s; \\ & A_{2s} \left[ \frac{b_1(c_1 + c_2)}{m_1 m_2} + \frac{c_1(b_1 + b_2)}{m_1 m_2} \right] + B_{2s} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{b_1(b_1 + b_2)}{m_1 m_2} + \frac{c_1}{m_1} \right) + C_{2s} \omega_s^2 \frac{b_1 + b_2}{m_2} + \\ & \quad + D_{2s} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_2} + \omega_s^2 \right) + E_{2s} \omega_s^2 \frac{b_1}{m_1} + G_{2s} \left( \frac{c_1}{m_1} + \omega_s^2 \right) = b_1 \omega_s \cos \varphi_s + c_1 \sin \varphi_s; \end{aligned}$$

$$A_{2s} \frac{b_1(c_1 + c_2)}{m_1 m_2} + B_{2s} \left[ \frac{b_1(c_1 + c_2)}{m_1 m_2} + \frac{c_1(c_1 + c_2)}{m_1 m_2} \right] + C_{2s} \omega_s^2 \frac{c_1 + c_2}{m_2} +$$

$$+ D_{2s} \omega_s^2 \frac{b_1 + b_2}{m_2} + E_{2s} \omega_s^2 \frac{c_1}{m_1} + G_{2s} \omega_s^2 \frac{c_1}{m_1} = c_1 \omega_s \cos \varphi_s;$$

$$B_{2s} \frac{c_1(c_1 + c_2)}{m_1 m_2} + D_{2s} \omega_s^2 \frac{c_1 + c_2}{m_2} + G_{2s} \omega_s^2 \frac{c_1}{m_1} = 0, \quad s = l, k.$$

Далее определим

$$x_{22}(t) \overset{\rightarrow}{\leftarrow} \frac{\Delta F_1(p) (b_1 p + c_1)}{(m_1 p^2 + b_1 p + c_1) [m_2 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2]},$$

где  $\Delta F_1(p) = m_1 [p^2 x_{1ak} \sin \Psi_{1k} + x_{1ak} \omega_k p \cos \Psi_{1k}] + b_1 x_{1ak} p \sin \Psi_{1k}$ .

$x_{22}(t)$  находим по таблицам [3]. Заметим (см. (7) и (8)), что  $x_{22}(t)$  описывается выражением, подобным (19). Только в  $x_{22}(t)$  в коэффициентах  $A_{2k}, D_{2k}, C_{2k}, D_{2k}$  вместо  $x_{2ak}$  стоят  $x_{1ak}$  и вместо  $\omega_{10}$  стоят  $\omega_{20}$

$$x_{23}(t) \overset{\rightarrow}{\leftarrow} \frac{\Delta F_2(p)}{m_2 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2} \overset{\rightarrow}{\leftarrow}$$

$$\overset{\rightarrow}{\leftarrow} x_{2ak} \left\{ e^{-\frac{(b_1+b_2)t}{2m_2}} (\sin \omega_{20} t) \frac{1}{\omega_k} [m_2 \omega_{20} \cos \Psi_{2k} + (b_1 + b_2) \sin \Psi_{2k}] - \right.$$

$$\left. - \frac{b_1 + b_2}{2\omega_{20}} \sin \Psi_{2k} \right\} + m_2 e^{-\frac{(b_1+b_2)t}{2m_2}} (\sin \Psi_{20} t) \cos \omega_{20} t \left. \right\}. \quad (24)$$

Итак, получены все составляющие выражения перемещений  $x_1(t), x_2(t)$  КС после момента переключения частоты входного силового воздействия  $F(t)$ , то есть

$$x_1(t) = (18) + (19) + (20);$$

$$x_2(t) = (22) = (23) + x_{22}(t) + (24).$$

Если здесь использовать обозначения (25) из [2], то тогда подобно выражению (28) из [2]

$$x_1(t) = A_1 + B_1 e^{-\frac{bt}{2m}} (\cos \omega_{10} t + \alpha_1 \sin \omega_{10} t) + C_1 e^{-\frac{bt}{2m_1}} (\cos \omega_1 t + \beta_1 \sin \omega_1 t) -$$

$$- D_1 e^{-\frac{b}{2m_1}} (\cos \omega_k t + \beta_1 \sin \omega_k t) + E_1 \sin(\omega_1 t + \Psi_{1k}). \quad (25)$$

$$x_2(t) = A_2 + B_2 e^{-\frac{b_1+b_2}{2m_2} t} (\cos \omega_{20} t + \alpha_2 \sin \omega_{20} t) + C_2 e^{-\frac{b_1+b_2}{2m_2} t} (\cos \omega_1 t + \beta_2 \sin \omega_1 t) -$$

$$- D_2 e^{-\frac{b_1+b_2}{2m_2} t} (\cos \omega_k t + \beta_2 \sin \omega_k t) + E_2 \sin(\omega_1 t + \Psi_{2k}). \quad (26)$$

В выражениях (25), (26) величины  $A_s, D_s, C_s, D_s, E_s, \alpha_s, \beta_s, s = 1, 2$  являются обобщающими и не зависят от времени  $t$ . Из этих соотношений видно, что при переключении частот силового воздействия  $F(t)$  в КС возникают переходные процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , обусловленные наличием начальных ненулевых значений  $x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0)$  в момент переключения частот.

Кроме того, как было отмечено, на переходной процесс в КС существенно влияет АЧХ этой КС при переключении одной частоты на значительно большую, особенно с дорезонансной на резонансную и далее зарезонансную области.

**Выводы**

Следует отметить следующую особенность в данном исследовании. Определение переходных процессов координат  $x_{1k}(t)$ ,  $x_{2k}(t)$  связано с методом качающей частоты, то есть когда частота входного воздействия  $F(t)$  скачками изменяется от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ , далее до  $\omega_3$  и т. д. до  $\omega_n$ , причем когда КС переключается с  $\omega_k$  на  $\omega_l$ , переходной процесс КС на частоте  $\omega_k$  еще не окончился. Если же время паузы между переключением такое, что переходные процессы  $x_{1k}(t)$ ,  $x_{2k}(t)$  оканчиваются, то тогда расчет их на частоте  $\omega_k$  осуществлять не надо. При плавном изменении частот, когда время пауз между  $\omega_k$  и  $\omega_l$  равно нулю, надо учитывать только амплитуды колебаний, ориентируясь на АЧХ колебательной системы.

**Литература**

1. *Теория электромагнитных вибровозбудителей* / Под ред. А. Е. Божко. – Харьков: Изд-во Харьк. нац. автодор. ун-та, 2009. – 436 с.
2. *Божко А. Е.* О процессах при изменении частот колебаний в электромагнитных вибровозбудителях / А. Е. Божко // Доп. НАН України. – 2006. – № 4. – С. 82–91.
3. *Божко А. Е.* Динамико-энергетические связи колебательных систем / А. Е. Божко, Н. М. Голуб. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.
4. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях / С. Г. Гинзбург. – М.: Сов. радио, 1959. – 404 с.

Поступила в редакцию  
13.12.11