

УДК 536

**Ю. О. Бахмутская**Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины  
(г. Харьков, e-mail: julija\_ne@mail.ru)**РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СТЕРЖНЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ МЕТОДОМ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИЛЬТРА КАЛМАНА**

*Решена задача идентификации тепловых потоков, входящих в одномерный стержень конечной длины методом оптимального оценивания с использованием фильтра Калмана в пространстве параметров. Показана устойчивая сходимость и несмещенность оценок тепловых потоков адаптивного итерационного алгоритма сплайн-идентификации на основе фильтра Калмана.*

*Вирішено задачу ідентифікації теплових потоків, які входять до одновимірного стрижня скінченної довжини методом оптимального оцінювання з використанням фільтра Калмана у просторі параметрів. Показано стійку збіжність та незсуненість оцінок теплових потоків адаптивного ітераційного алгоритму сплайн-ідентифікації на основі фільтра Калмана.*

**Введение**

Часто перед инженерами ставится задача определения теплопроводности элементов энергетической установки, в частности задача определения теплопроводности и тепловых потоков, входящих в концы стержня (рис. 1). На рисунке  $T_1$ ,  $T_n$  – измеряемые температуры конца стержня;  $q_1$ ,  $q_n$  – удельные тепловые потоки;  $L$  – длина стержня. В работе [1] получено приближенное аналитическое решение линейной задачи теплопроводности в стержне конечной длины при граничных условиях второго рода с помощью квантования по пространству.

Тепловые процессы в стержне описываются уравнением теплопроводности

$$c\rho(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

где  $\lambda$  – теплопроводность;  $c\rho$  – произведение теплоемкости на плотность;  $T$  – распределение температуры в стержне.

Задача определения теплопроводности стержня конечной длины может быть решена как с помощью экспериментальных исследований, так и теоретически путем решения обратной задачи теплопроводности. Тепловой эксперимент является традиционным и вполне достоверным источником информации о тепловом состоянии объектов исследования. Вместе с тем его проведение связано с большими материальными затратами, затратами труда и времени.

В работе [2] приведен пример решения задачи идентификации в случае пространственного квантования стержня тремя квантами. Полученная дифференциально-разностная модель позволяет реализовать одношаговый метод решения прямой задачи, однако такое



**Рис. 1. Модель теплопроводности стержня конечной длины**

решение не имеет практического применения в силу низкой точности пространственного квантования. Реализация же алгоритма в случае большого числа узлов пространственного кван-

тования является сложной инженерной задачей, так как требует определения собственных чисел матрицы модели.

Задача определения теплового потока и теплопроводности стержня конечной длины относится к классу обратных некорректно поставленных задач. Следуя Адамару, постановку задачи нахождения  $y$  по  $x$  из уравнения  $y = Ax$  называют корректной, если выполнено три условия [3]:

1. Решение задачи  $y = Ax$  существует ( $\forall x \in X \exists y \in Y$ );
2. Решение задачи  $y = Ax$  единственно ( $y_1 = Ax, y_2 = Ax \Rightarrow y_1 = y_2$ );
3. Решение задачи  $y = Ax$  непрерывно зависит от входных данных  $x$ .

В противном случае постановку задач называют некорректной. Некорректность постановки задач по идентификации теплофизических процессов заключается в основном в нарушении третьего условия корректности, которое в сочетании с особенностями компьютерной арифметики порождает и нарушение второго. Таким образом, при решении некорректно поставленных задач теплофизики необходима дополнительная априорная информация, позволяющая изменить постановку задачи так, чтобы сузить множество возможных решений до одного.

Решение обратной некорректно поставленной задачи методом идентификации требует многократного решения прямой задачи [4]. Поэтому наиболее рациональным методом решения прямой задачи будет метод одношагового определения теплового состояния в  $k$ -й момент времени. Однако подавляющее большинство методов используют пусть и прогрессивные (метод прогонки), но все же многошаговые методы определения теплового состояния.

Целью данной работы является решение обратной задачи теплопроводности в стержне конечной длины методом оптимального оценивания с использованием фильтра Калмана, а также получение оценок теплового потока в стержне конечной длины при семи узлах пространственного квантования и с учетом активности и пассивности торцов стержня.

### Основная часть

Решая обратную задачу теплопроводности определения тепловых потоков, используется метод сплайн-идентификации, который заключается в нахождении оптимальных (относительно функции идентичности теплоизмерительной системы) оценок коэффициентов сплайнового представления идентифицируемой функции. Задача оптимального оценивания может рассматриваться как вариационная задача. При оптимальном оценивании неизвестного параметра находят значение, минимизирующее некоторый функционал.

Для получения методом сплайн-идентификации оценки теплового потока, поступающего в стержень конечной длины с неизвестными начальными условиями, необходимо использовать модель теплоизмерительной системы

$$\begin{cases} \vec{T}(\tau) = A\vec{T}(\tau) + G\vec{Q}; \\ \vec{Y}(\tau) = H(\tau)\vec{T}(\tau) + \vec{\varepsilon}(\tau), \end{cases}$$

где первое уравнение – уравнение теплоприемника, второе – уравнение измерений. Шум измерений  $\vec{\varepsilon}(\tau)$ , входящий как аддитивная составляющая в уравнение измерений, по возможности должен обладать известными статическими характеристиками: математическим ожиданием, дисперсией, а в некоторых случаях и ковариационной матрицей.

В основе сплайн-идентификации тепловых потоков лежит поиск неизвестных коэффициентов сплайн-аппроксимации искомого нестационарного теплового потока методами параметрической идентификации.

Задача определения одномерного нестационарного теплового потока может рассматриваться как задача косвенного измерения. Математическая модель измерительной системы для косвенных измерений теплового потока может быть представлена в виде динамической системы

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = 0, & \text{— уравнение объекта,} \\ \mathbf{\hat{Y}} = \mathbf{T}(q_1, q_2, \tau) & \text{— уравнение измерения.} \end{cases}$$

Для нахождения оценок  $q_1$  и  $q_2$ , оптимальных в смысле среднеквадратичного функционала ошибки измерения будем решать метод оптимального оценивания с использованием фильтра Калмана. Безусловно, задача сплайн-идентификации тепловых параметров стержня может осуществляться различными алгоритмами, но, по нашему мнению, наиболее прогрессивным является алгоритм фильтра Калмана.

Алгоритм фильтра Калмана позволяет в реальном времени построить оптимальную оценку состояния системы, основываясь на измерениях, неизбежно содержащих погрешности; при этом вектор измерений рассматривается в качестве многомерного выходного сигнала системы, отягощенного шумом, а вектор состояния — неизвестный многомерный сигнал, подлежащий определению. Условием оптимальности построенной оценки состояния является минимум ее среднеквадратической ошибки.

На рис. 2 проиллюстрирована работа алгоритма фильтра Калмана. Начальными условиями на каждом новом цикле служат оценка состояния системы и величина, которая характеризует ее погрешность. В случае скалярной переменной такой характеристикой является дисперсия, которая тем больше, чем сильнее разброс индивидуальных значений относительно истинного. Распространенная оценка дисперсии — среднеквадратическое отклонение, то есть квадрат стандартного отклонения — выражает степень разброса величины относительно среднего. Обобщением дисперсии для вектора, то есть совокупности скалярных величин, служит ковариационная матрица. Ее диагональные элементы являются дисперсиями соответствующих составляющих вектора, а недиагональные — ковариациями, характеризующими взаимосвязь между парой составляющих. Совокупность измерений, отнесенных к каждому из моментов времени, обобщает вектор измерений. Алгоритм последовательно обрабатывает вновь поступающие векторы измерений, учитывая при этом значения, вычисленные на предшествующем цикле. Эта особенность отличает алгоритм фильтра Калмана от рекуррентных алгоритмов, которым для работы требуется хранить весь массив обрабатываемых данных. На следующем шаге с помощью обрабатываемых на данном цикле измерений уточняются начальные условия.

Уточнение начальных условий на основе поступивших на данном цикле измерений, в общем случае приводит к уменьшению неопределенности в оценке состояния системы. Исправленные таким образом начальные условия и являются выходными данными фильтра Калмана на каждом цикле. На заключительном этапе работы алгоритма происходит подготовка к поступлению нового вектора измерений. На основе заданного линейного преобразования, связывающего последующий вектор состояния с предыдущим, прогнозируется оценка состояния системы, отнесенная к моменту следующего измерения.

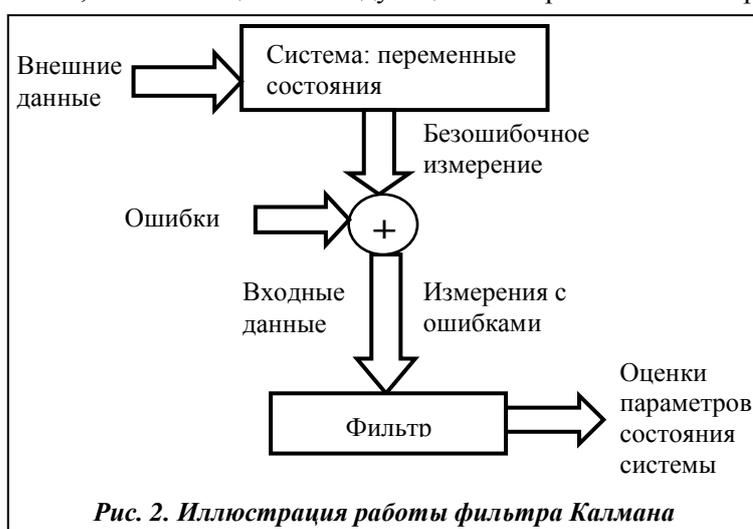


Рис. 2. Иллюстрация работы фильтра Калмана

При построении ковариационной матрицы прогнозируемого вектора состояния фильтром Калмана учитывается возможность искажения модели, описывающей поведение системы, некоторым случайным процессом с известными статистическими параметрами. Поскольку конкретные значения возмущающего эффекта не могут быть известны, данное обстоятельство способствует повышению неопределенности

прогноза. По мере последовательной обработки новых измерений происходит накопление фильтром полезной информации, поэтому если элементы вектора состояния уверенно выражаются через измеренные величины, то суммарная погрешность оценок, как правило, должна снижаться. Однако поскольку вместе с улучшением точности оценок на этапе их уточнения имеет место ее снижение при построении прогноза, то эти тенденции, компенсируя друг друга, впоследствии приведут к стабилизации неопределенности, характеризующей оценку состояния системы. В случае отсутствия фактора, вносящего возмущения в процесс перехода системы из одного состояния в другое, погрешность оценок в итоге достигнет нуля. Изменяющаяся в процессе работы алгоритма степень неопределенности оценки состояния системы влечет за собой и изменение весов, вычисляемых на втором шаге; данное обстоятельство выделяет фильтр Калмана как алгоритм с переменными весами.

Найдем оценки  $q_1$  и  $q_2$  стержня конечной длины пространственного квантования на основе фильтра Калмана.

На рис. 3  $\varepsilon_1, \varepsilon_n$  – случайная ошибка измерения, входящая в измеряемые температуры на концах стержня. Шум распределяется по нормальному закону  $p(x) = 0,3989 \cdot \exp(-x^2/2)$ . Последовательность чисел с нормальным законом распределения реализована в виде программы на основании алгоритма получения выборки случайных чисел заданной длины с заданным распределением  $p(x)$ . Проведено компьютерное моделирование последовательностей случайных чисел (рис. 3). Результаты компьютерного моделирования свидетельствуют о том, что алгоритм работает устойчиво. Выборки таких случайных чисел необходимы при компьютерном моделировании стохастических процессов.

Рассмотрим случай пространственного квантования стержня семью квантами с различными вариантами расположения и количества локальных измерителей температуры (рис. 4).

Квант – элементарная неделимая однородная часть пространства, а узел – точка пространства, в которую сметены все свойства кванта. Квант обладает некоторой пространственной границей, а узел – нет.

Рассмотрим три случая сплайн-идентификации:

- уравнение наблюдения  $T_n = T_1$  ( $T_1$  – активная,  $T_7$  – пассивная);
- уравнение наблюдения  $T_n = T_7$  ( $T_7$  – активная,  $T_1$  – пассивная);
- уравнение наблюдения  $T_n = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_7 \end{bmatrix}$  ( $T_1$  и  $T_7$  – активные),

где  $T_n$  – наблюдаемая температура.

На каждом шаге фильтра Калмана выполняется прогноз оценки и её корректировка. На этапе прогноза по значению вектора состояния на предыдущем шаге вычисляются оценка вектора состояния на текущем шаге. На этапе корректировки по данным текущих измерений уточняют оценку вектора состояния динамической системы на текущем шаге, т. е. получают прогноз вектора состояния. Рассмотрим работу классического оптимального фильтра Калмана примени-

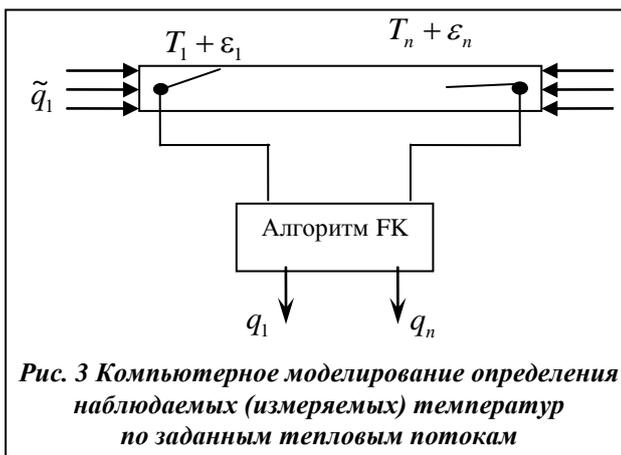


Рис. 3 Компьютерное моделирование определения наблюдаемых (измеряемых) температур по заданным тепловым потокам

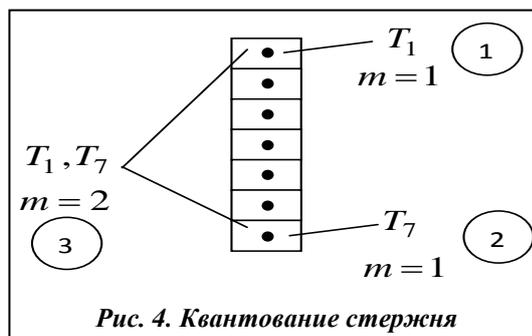


Рис. 4 Квантование стержня

тельно к поставленной задаче.

Этап прогноза:

- 1) Вычисление прогноза вектора состояния по априорно известной модели:  $\hat{\mathbf{q}}_k$ ;
- 2) Вычисление прогноза ковариационной матрицы:  $\mathbf{P}_k$ .

Этап корректировки:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{K}_{k+1}[\mathbf{T}_k(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) - \hat{\mathbf{T}}_k(\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2)] \\ \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{S}_{k+1}^{-1} \\ \mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_k \end{cases},$$

где  $\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{S}_{k+1}$  – ковариационная матрица измерений;  $\mathbf{K}_{k+1}$  – оптимальный по Калману коэффициент усиления;  $\hat{\mathbf{T}}_k$  – прогноз вектора измерения в момент времени  $(k+1)\Delta t$ ;  $\hat{\mathbf{q}}_k, \mathbf{P}_k$  – ковариационные матрицы оценок параметров;  $\mathbf{P}_{k+1}$  – прогноз ковариационной матрицы ошибок оценок;  $\mathbf{H}_{k+1}$  – матрица измерения;  $\mathbf{N}$  – ковариационная матрица помехи  $\varepsilon$ .

Распишем этап корректировки в матричном виде для случая двух локальных измерителей на концах стержня конечной длины. Случай одного активного торца подробно описываться не будет, так как он аналогичен рассматриваемому примеру.

Этап корректировки:  $r = 2; m = 2$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_3 \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_3 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_{k+1} \cdot \begin{bmatrix} T_1 - \hat{T}_1 \\ T_3 - \hat{T}_3 \end{bmatrix}_k \\ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}_{k+1} * \\ * &\left\{ \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}_{k+1} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}_{k+1} + \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_{k+1} \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}_{k+1} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}_k. \end{aligned}$$

Уравнения для собственных чисел и собственных векторов системы в работе [1] значительно снижает объем вычислений при большом числе узлов пространственного квантования. Используя полученные ранее уравнения [1], находим собственные числа

$$\begin{aligned} v_1 = 0; \quad v_2 = -0,1980622\mathbf{A}; \quad v_3 = -3,8019377\mathbf{B}; \quad v_4 = -0,7530203\mathbf{C}; \\ v_5 = -3,2469796\mathbf{A}; \quad v_6 = -1,5549581\mathbf{B}; \quad v_7 = -2,4450418\mathbf{C}. \end{aligned}$$

и собственные векторы

$$\begin{aligned} \alpha_{1k} = 1; \quad \alpha_{2k} = 1 + \mu_k; \quad \alpha_{3k} = \mu_k \alpha_{2k} - \alpha_{1k}; \quad \alpha_{4k} = \mu_k \alpha_{3k} - \alpha_{2k}; \\ \alpha_{5k} = \mu_k \alpha_{4k} - \alpha_{3k}; \quad \alpha_{6k} = \mu_k \alpha_{5k} - \alpha_{4k}; \quad \alpha_{7k} = \mu_k \alpha_{6k} - \alpha_{5k}. \end{aligned}$$

Нормируя собственные векторы, то есть делая их единичными, запишем окончательные выражения для элементов матрицы

$$h_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{\sqrt{\sum \alpha_{ik}^2}}$$

Найдем значения матрицы измерения  $\mathbf{H}_{k+1}$ , где  $k$  – время, шаг, номер шага по времени;  $1 \leq i \leq m$  – размерность вектора измерений;  $1 \leq j \leq r$  – размерность вектора искомых параметров. Матрица измерения  $\mathbf{H}_{k+1}$  имеет размерность  $(m \times r)$  и выглядит следующим образом:

$$\mathbf{H}_{k+1} = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_k} = [u_{ijk}]_{\substack{i \leq m \\ j \leq r}}.$$

Составляющие  $u_{ijk}$  в формуле (4) называются функциями чувствительности  $i$ -го наблюдения температуры к изменению  $j$ -го параметра теплового потока в  $k$ -й момент времени. Значения температур распишем как

$$T_i = \frac{1}{c\rho} \sum_{1 \leq j \leq 7} P_j \left( \frac{1}{7} \int_0^\tau q_j d\xi + \sum_{2 \leq k \leq 7} h_{ik} h_{jk} \int_0^\tau q_j \exp(\alpha \mu_k (\tau - \xi)) d\xi \right),$$

где  $P_j$  – отношение поверхности, воспринимающей тепловой поток к объему блока.

Для  $i = 1$

$$T_1 = \frac{1}{c\rho} \left\{ P_1 q_1 \left( \frac{1}{7} \tau + [h_{12}^2 E_2 + h_{13}^2 E_3 + h_{14}^2 E_4 + h_{15}^2 E_5 + h_{16}^2 E_6 + h_{17}^2 E_7] \right) + P_7 q_7 \left( \frac{1}{7} \tau + [h_{12} h_{72} E_2 + h_{13} h_{73} E_3 + h_{14} h_{74} E_4 + h_{15} h_{75} E_5 + h_{16} h_{76} E_6 + h_{17} h_{77} E_7] \right) \right\}.$$

Для  $i = 7$

$$T_7 = \frac{1}{c\rho} \left\{ P_1 q_1 \left( \frac{1}{7} \tau + [h_{12} h_{72} E_2 + h_{13} h_{73} E_3 + h_{14} h_{74} E_4 + h_{15} h_{75} E_5 + h_{16} h_{76} E_6 + h_{17} h_{77} E_7] \right) + P_7 q_7 \left( \frac{1}{7} \tau + [h_{72}^2 E_2 + h_{73}^2 E_3 + h_{74}^2 E_4 + h_{75}^2 E_5 + h_{76}^2 E_6 + h_{77}^2 E_7] \right) \right\},$$

где  $E_s = \frac{1}{(-\mu_s)\alpha} (1 - \exp(\mu_s \alpha \tau))$ , ( $s = 2 \div 7$ ).

Получим значения матриц измерения  $\mathbf{H}_{k+1}^j$  для трех случаев:

1.  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial q_1} & \frac{\partial T_1}{\partial q_3} \end{bmatrix}$  активный первый торец, последний пассивный;

2.  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_3}{\partial q_1} & \frac{\partial T_3}{\partial q_3} \end{bmatrix}$  активный последний торец, первый активный;

3.  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial q_1} & \frac{\partial T_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial T_3}{\partial q_1} & \frac{\partial T_3}{\partial q_3} \end{bmatrix}$  два торца активны.

Здесь  $H_{11} = \frac{\partial T_1}{\partial q_1} = \frac{1}{c\rho} P_1 \left( \frac{1}{7} \tau + h_{12}^2 E_2 + h_{13}^2 E_3 + h_{14}^2 E_4 + h_{15}^2 E_5 + h_{16}^2 E_6 + h_{17}^2 E_7 \right);$

$$H_{12} = \frac{\partial T_1}{\partial q_7} = \frac{1}{c\rho} P_7 \left( \frac{1}{7} \tau + h_{12} h_{72} E_2 + h_{13} h_{73} E_3 + h_{14} h_{74} E_4 + h_{15} h_{75} E_5 + h_{16} h_{76} E_6 + h_{17} h_{77} E_7 \right);$$

$$H_{21} = \frac{\partial T_3}{\partial q_1}; H_{12} = H_{21}; H_{22} = \frac{\partial T_3}{\partial q_3} = \frac{1}{c\rho} P_7 \left( \frac{1}{7} \tau + h_{72}^2 E_2 + h_{73}^2 E_3 + h_{74}^2 E_4 + h_{75}^2 E_5 + h_{76}^2 E_6 + h_{77}^2 E_7 \right).$$

Описанные выше выкладки получения оценки тепловых потоков реализованы в виде программы. Сплайн-идентификация теплового потока проводилась с помощью адаптивного алгоритма фильтра Калмана. Начальное приближение для первой итерации выбрано нулевым, а ковариационная матрица ошибок – диагональной. Элементы диагонали постоянны и равны  $10^8$  Вт/м<sup>2</sup>. Исходные данные:  $oq1 = 2000$ ;  $oq2 = 3000$ ;  $q1 = 1000$ ;  $q2 = 600$ , где  $q1$  и  $q2$  –

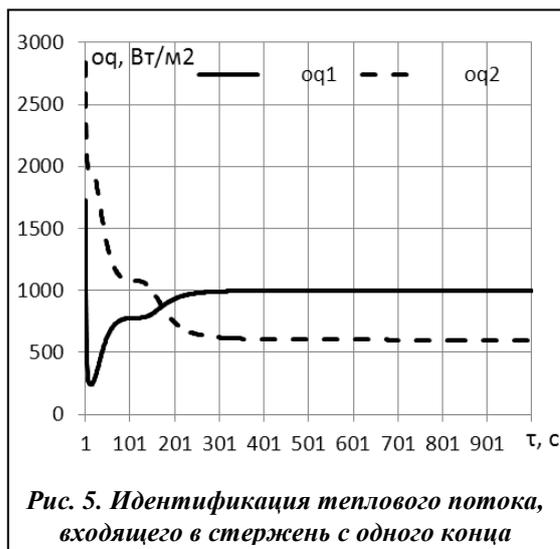


Рис. 5. Идентификация теплового потока, входящего в стержень с одного конца

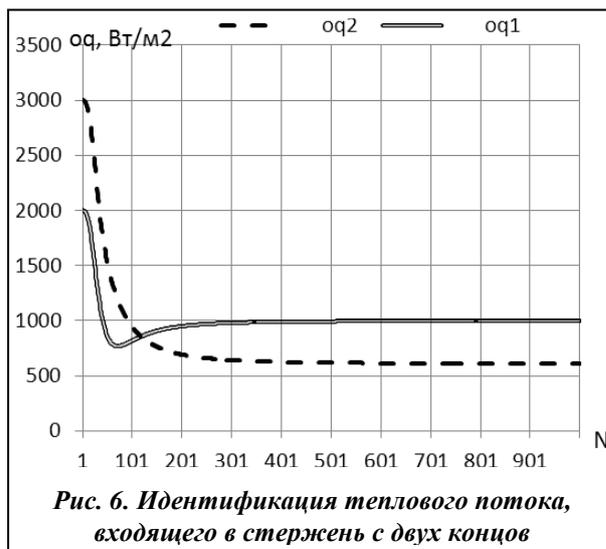


Рис. 6. Идентификация теплового потока, входящего в стержень с двух концов

тепловые потоки на торцах стержня,  $oq1$  и  $oq2$  – оценки теплового потока на торцах стержня.

На рис. 5 и рис. 6 видно, что сплайн-идентификация теплового потока с помощью адаптивного алгоритма фильтра Калмана сходится и является устойчивой. В первом случае (рис.5) идет небольшой разброс значений на начальных итерациях расчета, но уже на 300-й итерации процесс дает хорошие результаты; во втором случае (рис. 6) процесс сплайн-идентификации более устойчив и сходимость наступает раньше, уже на 200 шаге. Из графиков, полученных для двух случаев, видно, что процесс сходимости оценок теплового потока лучше протекает для случая двух тепловых потоков. В оценки теплового потока входит разница между температурой и оценкой температуры.

### Выводы

Таким образом, предложен метод экспериментально-расчетного определения тепловых потоков (сплайн-идентификация), расчетная часть которого сводится к решению обратной задачи теплопроводности. Решена задача идентификации тепловых потоков, входящих в одномерный стержень конечной длины. Получен адаптивный алгоритм сплайн-идентификации на основе алгоритма фильтра Калмана. Адаптивный итерационный алгоритм сплайн-идентификации на основе усеченного фильтра Калмана показал устойчивую сходимость и несмещенность оценок тепловых потоков.

Математическим моделированием доказана эффективность разработанных алгоритмов сплайн-идентификации и показана их применимость при экспериментально-расчетном определении тепловых потоков.

### Литературы

1. Бахмутская Ю. О. Аналитическое решение задачи теплопроводности стержня конечной длины с помощью дифференциально-разностной модели / Ю. О. Бахмутская, Е. Н. Бут // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Харьков: Нац. аэрокосмич. ун-т ХАИ, 2009. – Вып. 42. – С. 211–219.
2. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
3. Мацевитый Ю. М. Сплайн-идентификация теплофизических процессов / Ю. М. Мацевитый, Е. Н. Бут. – Киев: Наук. думка, 2010. – 240 с.
4. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности: в 2-х т. / Ю. М. Мацевитый. – Киев: Наук. думка, 2002. – Т. 1. Методология. – 2002. 408 с.

Поступила в редакцию  
11.11.12