

УДК 539.3

К. В. Аврамов, д-р техн. наук**Е. В. Тишковец**, канд. техн. наук**К. В. Максименко-Шейко**, канд. физ.-мат. наукИнститут проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, E-mail: kvavt@kharkov.ua)**МЕТОДЫ R-ФУНКЦИЙ И МНОГИХ МАСШТАБОВ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С ВЫРЕЗАМИ**

Для исследования нелинейных колебаний круглых пластин с двумя вырезами предлагается использовать сочетание методов R-функций и многих масштабов. Собственные формы линейных колебаний пластины определяются с использованием методов R-функций и Релея–Ритца. Нелинейные колебания раскладываются по найденным собственным формам колебаний; в результате получается динамическая система с малым параметром, которая исследуется методом многих масштабов.

Для дослідження нелінійних коливань круглих пластин з двома вирізами запропоновано використовувати поєднання методів R-функцій та багатьох масштабів. Власні форми лінійних коливань пластины визначаються з використанням методів R-функцій та Релея–Ритца. Нелінійні коливання розкладаються за знайденими власними формами коливань; в результаті одержано динамічну систему з малим параметром, яка досліджується методом багатьох масштабів.

Введение

Круглые пластины широко используются в турбинах, тормозных системах, баках и т. д. Если поперечные перемещения пластины соизмеримы с ее толщиной, то ее изгиб описывается геометрически нелинейной теорией [1]. Параметрические колебания круглых пластинок рассматриваются в книге [2]. Эти движения описываются системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Голоскоков, Филиппов [3] исследовали прохождение через резонанс круглых дисков постоянной толщины. Они предполагали, что частота колебаний изменяется по линейному закону. Осесимметричные колебания круглых заземленных пластин рассматривались в статье [4]. В монографии [5] для исследования нелинейных колебаний круглых пластин применяются уравнения Кармана. Приложения теории R-функций к изгибу пластин рассматриваются в монографиях [6, 7].

В этой статье исследуются нелинейные колебания круглых пластин с вырезами. Собственные формы линейных колебаний описываются выражениями, содержащими R-функции. Нелинейные колебания пластины раскладываются в ряд по собственным формам линейных колебаний. Континуальная модель пластины заменяется нелинейной динамической системой с конечным числом степеней свободы, которая исследуется методом многих масштабов.

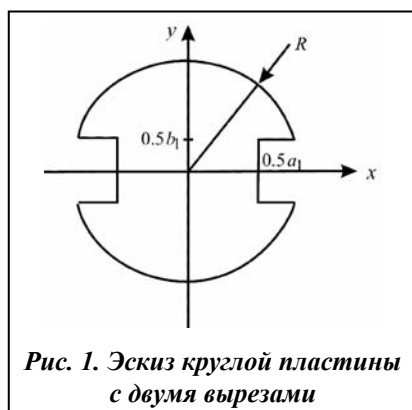


Рис. 1. Эскиз круглой пластины с двумя вырезами

1. Формулировка проблемы

Рассмотрим круглую пластину с двумя вырезами (рис. 1). Предположим, что деформации связаны с перемещениями нелинейными зависимостями, а напряжения с деформациями – линейными. Колебания пластины исследуются в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Перемещения точек пластины вдоль осей (r, θ, z) обозначим соответственно через u_r, u_θ, u_z . Уравнения нелинейного де-

формирования тонких оболочек [8] использовались для вывода уравнений колебаний пластины. Уравнения колебаний пластины в полярных координатах принимают следующий вид

$$\begin{aligned}
 & u_{r,rr} - \frac{(3-\nu)u_{\theta,0}}{2r^2} + \frac{(1+\nu)}{2r}u_{\theta,0r} + \frac{1-\nu}{2r^2}u_{r,0\theta} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} + u_{z,r}u_{z,rr} - \\
 & - \frac{1+\nu}{2r^3}u_{z,0}^2 + \frac{\nu+1}{2r^2}u_{z,0}u_{z,0r} + \frac{1-\nu}{2r^2}u_{z,r}u_{z,0\theta} + \frac{1-\nu}{2r}u_{z,r}^2 = \mu \frac{1-\nu^2}{Eh} \ddot{u}_r; \\
 & \frac{1}{r^2}u_{\theta,0\theta} + \frac{3-\nu}{2r^2}u_{r,0\theta} + \frac{1+\nu}{2r}u_{r,0\theta} + \frac{1-\nu}{2r}u_{\theta,r} - \frac{1-\nu}{2r^2}u_{\theta} + \frac{1-\nu}{2}u_{\theta,rr} + \\
 & + \frac{1}{r^3}u_{z,0}u_{z,0\theta} + \frac{1+\nu}{2r}u_{z,r}u_{z,0\theta} + \frac{1-\nu}{2r^2}u_{z,r}u_{z,0} + \frac{1-\nu}{2r}u_{z,rr}u_{z,0} = \mu \ddot{u}_\theta \frac{1-\nu^2}{Eh}; \\
 & \frac{h^2}{12} \nabla^4 u_z = -\mu \frac{1-\nu^2}{Eh} \ddot{u}_z + \frac{1}{r} (r u_{z,r})_{,r} \left(u_{r,r} + \frac{1}{2} u_{z,r}^2 + \frac{\nu}{r} u_r + \frac{\nu}{r} u_{\theta,0} + \frac{\nu}{2r^2} u_{z,0}^2 \right) + \\
 & + \frac{1-\nu}{r} u_{z,0r} \left(u_{\theta,r} + \frac{1}{r} u_{r,0} - \frac{1}{r} u_{\theta} + \frac{1}{r} u_{z,r} u_{z,0} \right) + \frac{1}{r^2} u_{z,0\theta} \left(\frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} u_{\theta,0} + \frac{1}{2r^2} u_{z,0}^2 + \nu u_{r,r} + \frac{\nu}{2} u_{z,r}^2 \right),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\ddot{u}_\theta = \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$; $u_{z,r} = \frac{\partial u_z}{\partial r}$; μ – масса единицы длины; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; h – толщина пластины.

2. Линейные колебания пластины

Для исследования системы (1) воспользуемся методом Бубнова–Галеркина. Нелинейные колебания пластины с вырезами раскладываются по собственным модам ее линейных колебаний. Для определения собственных форм линейных колебаний воспользуемся методом Релея–Ритца. Тогда потенциальную энергию пластины Π представим так:

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left\{ u_{r,r}^2 + \frac{2\nu}{r} (u_{\theta,0} + u_r) u_{r,r} + \frac{1}{r^2} (u_{\theta,0} + u_r)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} u_{r,0} \right)^2 \right\} r dr d\theta + \\
 & + \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left\{ u_{z,rr}^2 + 2\nu u_{z,rr} \left(\frac{1}{r^2} u_{z,0\theta} + \frac{1}{r} u_{z,r} \right) + \left(\frac{1}{r^2} u_{z,0\theta} + \frac{1}{r} u_{z,r} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{r} u_{z,r\theta} - \frac{1}{r^2} u_{z,0} \right)^2 \right\} r dr d\theta,
 \end{aligned}$$

где Ω – область, занимаемая пластиной. Кинетическая энергия имеет следующий вид:

$$T = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} (\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2) r dr d\theta,$$

где μ – масса единицы площади. Линейные колебания пластины удовлетворяют следующему соотношению:

$$[u_r(r, \theta, t), u_\theta(r, \theta, t), u_z(r, \theta, t)]^T = [\bar{u}_r(r, \theta), \bar{u}_\theta(r, \theta), \bar{u}_z(r, \theta)]^T \sin(pt + \alpha). \tag{2}$$

Уравнение (2) введем в действие по Гамильтону и произведем интегрирование. В результате получим следующий функционал:

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left\{ \bar{u}_{r,r}^2 + \frac{2\nu}{r} (\bar{u}_{\theta,0} + \bar{u}_r) \bar{u}_{r,r} + \frac{1}{r^2} (\bar{u}_{\theta,0} + \bar{u}_r)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\bar{u}_{\theta,r} - \frac{\bar{u}_\theta}{r} + \frac{\bar{u}_{r,0}}{r} \right)^2 \right\} r dr d\theta + \\
 & \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left\{ \bar{u}_{z,rr}^2 + 2\nu \bar{u}_{z,rr} \left(\frac{1}{r^2} \bar{u}_{z,0\theta} + \frac{1}{r} \bar{u}_{z,r} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \bar{u}_{z,0\theta} + \frac{1}{r} \bar{u}_{z,r} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{r} \bar{u}_{z,r\theta} - \frac{1}{r^2} \bar{u}_{z,0} \right)^2 \right\} r dr d\theta - \\
 & \frac{\mu}{2} p^2 \int_{\Omega} (\bar{u}_r^2 + \bar{u}_\theta^2 + \bar{u}_z^2) r dr d\theta.
 \end{aligned} \tag{3}$$

В дальнейшем рассмотрим защемленную по контуру $\partial\Omega$ пластину. Тогда граничные условия запишем так:

$$\bar{u}_z|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial n}|_{\partial\Omega} = u_\theta|_{\partial\Omega} = u_r|_{\partial\Omega} = 0,$$

где n – нормаль к границе $\partial\Omega$.

Уравнение границы пластины $\partial\Omega$ (рис. 1) получим аналитически, используя метод R-функций [9]. Функция $\omega(r, \theta)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\omega(r, \theta) = 0, \quad \forall (r, \theta) \in \partial\Omega; \quad \omega(r, \theta) > 0, \quad \forall (r, \theta) \in \Omega.$$

Для построения функции $\omega(r, \theta)$ используется подход, предложенный в [9]. Здесь рассматриваются два варианта функции $\omega_i(r, \theta)$, $i = 1, 2$. Для рассматриваемой пластины функция ω_1 в декартовых координатах принимает следующий вид:

$$\omega_1(x, y) = (\eta_2 \vee_0 \eta_3) \wedge_0 \eta_1;$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2); \quad \eta_2 = \frac{1}{a_1}\left(\frac{a_1^2}{4} - x^2\right); \quad \eta_3 = \frac{1}{b_1}\left(y^2 - \frac{b_1^2}{4}\right),$$

где \wedge_0, \vee_0 – булевы операции конъюнкции и дизъюнкции [9]. Функция $\omega_1(r, \theta)$ имеет два локальных экстремума. Построим функцию ω_2 , которая не содержит этих экстремумов. Ее можно представить так:

$$\omega_2(x, y) = [(\eta_2 \vee_0 \eta_3) \wedge_0 \eta_1] \wedge_0 \Gamma,$$

где $\Gamma = \chi \max[\omega_1(r, \theta)]; 0 < \chi < 1$.

Собственные формы колебаний пластины запишем в следующем виде:

$$\bar{u}_z(r, \theta) = \omega_k^2 \sum_{k=0}^{m_1} [Z_k^{(c)} \cos(k\theta) + Z_k^{(s)} \sin(k\theta)];$$

$$\bar{u}_\theta(r, \theta) = \omega_k \sum_{k=0}^{m_2} [\Theta_k^{(c)} \cos(k\theta) + \Theta_k^{(s)} \sin(k\theta)]; \quad (4)$$

$$\bar{u}_r(r, \theta) = \omega_k \sum_{k=0}^{m_3} [R_k^{(c)} \cos(k\theta) + R_k^{(s)} \sin(k\theta)], \quad k = 1 \text{ или } 2,$$

где $Z_k^{(c)}(r), Z_k^{(s)}(r), \dots, R_k^{(s)}(r)$ представим такими полиномами:

$$Z_k^{(c)}(r) = \sum_{j=0}^{M_{1,k}} A_{k,j}^{(c)} r^j; \quad Z_k^{(s)}(r) = \sum_{j=0}^{M_{2,k}} A_{k,j}^{(s)} r^j; \quad k = 0, 1, \dots, m_1;$$

$$\Theta_k^{(c)}(r) = \sum_{j=0}^{M_{3,k}} B_{k,j}^{(c)} r^j; \quad \Theta_k^{(s)}(r) = \sum_{j=0}^{M_{4,k}} B_{k,j}^{(s)} r^j; \quad k = 0, 1, \dots, m_2; \quad (5)$$

$$R_k^{(c)}(r) = \sum_{j=0}^{M_{5,k}} C_{k,j}^{(c)} r^j; \quad R_k^{(s)}(r) = \sum_{j=0}^{M_{6,k}} C_{k,j}^{(s)} r^j; \quad k = k = 0, 1, \dots, m_3.$$

Уравнения (4), (5) вводятся в (3) и производится интегрирование по области пластины Ω . В результате получим функционал, который в общем случае запишем как

$$S = S(a_0, \dots, a_l); \quad l = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{m_j} (M_{2j-1,k} + M_{2j,k}),$$

где $X = (a_0, \dots, a_l) = (A_{0,0}^{(c)}, A_{0,1}^{(c)}, \dots, C_{m_3, M_{6,k}}^{(s)})$ – коэффициенты полиномов (5). Следуя методу Релея-Ритца, минимум функционала (3) определим из следующей системы линейных алгеб-

раических уравнений: $\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0 ; j = 0, 1, \dots, l$. Эти уравнения могут быть представлены в виде

проблемы собственных значений $(K - p^2 M)X = 0$, где $K = \|k_{ij}\|_{j=1, l+1}^{i=1, l+1}$; $M = \|m_{ij}\|_{j=1, l+1}^{i=1, l+1}$.

3. Нелинейная модель с конечным числом степеней свободы

Нелинейные колебания пластины разложим в ряд по собственным формам (4)

$$u_z = \sum_{i=1}^L q_i(t) \bar{u}_z^{(i)}(r, \theta); \quad u_\theta = \sum_{i=1}^L \psi_i(t) \bar{u}_\theta^{(i)}(r, \theta); \quad u_r = \sum_{i=1}^L \varphi_i(t) \bar{u}_r^{(i)}(r, \theta), \quad (6)$$

где $q_1(t), q_2(t), \dots, \varphi_L(t)$ – обобщенные координаты. Из результатов численного анализа линейных колебаний, которые представлены в следующем разделе, следует, что в разложениях (6) достаточно взять $L = 3$.

Уравнения (6) введем в первые два уравнения системы (1) и отбросим инерционные слагаемые, так как собственные частоты колебаний в плоскости пластины значительно выше собственных частот изгибных колебаний. К полученным уравнениям применим метод Галеркина. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно $(\varphi_1, \dots, \psi_3)$

$$[B][\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3]^T = \sum_{l=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 q_l q_\mu [A_{l\mu}^{(1)}, A_{l\mu}^{(2)}, A_{l\mu}^{(3)}, D_{l\mu}^{(1)}, D_{l\mu}^{(2)}, D_{l\mu}^{(3)}]^T.$$

Параметры этой системы не приводятся для краткости изложения. Используя матрицу $R = (r_{ij})_{j=1,6}^{i=1,6}$; $R = B^{-1}$, перемещения срединной поверхности (u_θ, u_r) представим так:

$$u_\theta = \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \alpha_{l\mu}^{(i)} \bar{u}_\theta^{(i)}(r, \theta) q_l q_\mu; \quad u_r = \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \chi_{l\mu}^{(i)} \bar{u}_r^{(i)}(r, \theta) q_l q_\mu, \quad (7)$$

где $\chi_{l\mu}^{(j)} = \sum_{v=1}^3 (r_{j,v} A_{l\mu}^{(v)} + r_{j,v+3} D_{l\mu}^{(v)})$; $\alpha_{l\mu}^{(j)} = \sum_{v=1}^3 (r_{j+3,v} A_{l\mu}^{(v)} + r_{j+3,v+3} D_{l\mu}^{(v)})$; $(l, \mu, j) = 1, 2, 3$. Решения (7) введем в третье уравнение системы (1) и воспользуемся методом Галеркина; в результате получим следующую нелинейную динамическую систему с тремя степенями свободы:

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 G_{il\mu}^{(k)} q_i q_l q_\mu; \quad k = 1, 2, 3.$$

Параметры $G_{il\mu}^{(k)}$ не приводятся для краткости изложения.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tau = p_1 t; \quad \xi_i = \frac{q_i}{h}; \quad i = 1, 2, 3; \quad \varepsilon H_{il\mu}^{(k)} = \frac{h^2}{p_1^2} G_{il\mu}^{(k)}; \quad (l, \mu) = 1, 2, 3, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Теперь динамическую систему с конечным числом степеней свободы представим так:

$$\ddot{\xi}_k + v_k^2 \xi_k = \varepsilon \sum_{i,l,\mu} H_{il\mu}^{(k)} \xi_i \xi_l \xi_\mu; \quad k = 1, 2, 3. \quad (8)$$

В следующем разделе будет показано, что для широкого диапазона значения параметров пластины выполняется условие внутреннего резонанса

$$2v_1 = v_2 + \varepsilon \sigma, \quad (9)$$

где σ – параметр расстройки. Теперь исследуем свободные колебания системы (8) при внутреннем резонансе (9). Следуя методу многих масштабов [5], решения системы (8) представим так:

$$\xi_k = \xi_{k,0}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon \xi_{k,1}(T_0, T_1, \dots) + \dots, \quad (10)$$

где $T_0 = \tau$; $T_1 = \varepsilon\tau$. Теперь разложения (10) введем в систему (8) и соберем слагаемые при одинаковых степенях ε . В результате получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \xi_{k,0} &= A_k \exp(iv_k T_0) + \bar{A}_k \exp(-iv_k T_0); \\ \frac{\partial^2 \xi_{k,1}}{\partial T_0^2} + v_k^2 \xi_{k,1} &= -2iv_k A'_k \exp(iv_k T_0) + 2A_k \exp(iv_k T_0) \sum_{j=1}^3 D_i^{(k)} |A_j| + IN.E.T; \quad k=1,2,3, \end{aligned} \quad (11)$$

где символ *IN.E.T* обозначает несущественные для дальнейшего анализа слагаемые; $|A_i| = A_i \bar{A}_i$; \bar{A}_i – комплексно сопряженная величина; $D_i^{(k)} = H_{iki}^{(k)} + H_{iik}^{(k)} + H_{kii}^{(k)}$. Исключая секулярные слагаемые из уравнения (11), приходим к следующей системе модуляционных уравнений относительно комплексных переменных:

$$iv_k A'_k = A_k f_k(A_1, A_2, A_3); \quad f_k(A_1, A_2, A_3) = \sum_{i=1}^3 D_i^{(k)} |A_i|; \quad k=1,2,3. \quad (12)$$

К системе (12) применим следующую замену переменных: $A_k = 0,5 \tilde{a}_k \exp(i\psi_k)$; в результате получим систему модуляционных уравнений

$$\tilde{a}'_k = 0; \quad \tilde{a}_k [v_k \psi'_k + f_k(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)] = 0, \quad f_k(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 D_i^{(k)} \tilde{a}_i^2. \quad (13)$$

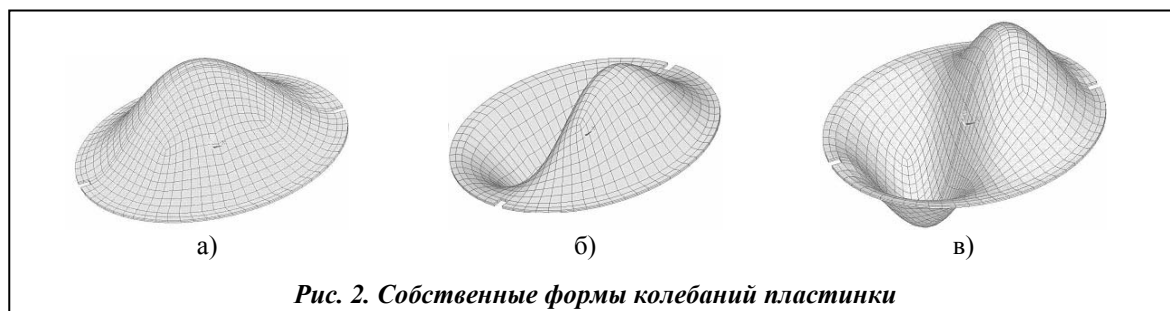
Обобщенные координаты системы (8) связаны с переменными модуляционных уравнений (13) так: $\xi_k = \tilde{a}_k \cos(v_k t + \psi_k) + O(\varepsilon)$.

4. Численный анализ колебаний

Исследуем стальную пластину со следующими параметрами: $R = 0,25$ м; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$; $\rho = 7800$ кг/м³; $h = 5 \cdot 10^{-3}$ м. Рассмотрим линейные изгибные колебания пластины. Расчет таких колебаний осуществляется двумя подходами; первый из них – представленная выше комбинация методов R-функций и Релея–Ритца; второй подход – метод конечных элементов, который реализован в программном комплексе ANSYS. Изменяя параметры a_1 и b_1 , исследовалось влияние выреза на собственные частоты колебаний пластины. Результаты расчетов методом конечных элементов, показывающие зависимость первых трех собственных частот от a_1 и b_1 , представлены в табл. 1. Первая собственная частота отвечает зонтичной форме колебаний пластины, а вторая и третья – характеризуются парой сопряженных форм колебаний. Значение третьей собственной частоты существенно зависит от параметров выреза, так как пучность третьей формы колебаний находится около выреза. Если пластина не имеет выреза, $p_2 = p_3$. Если площадь выреза увеличивается, разница между собственными частотами сопряженных мод растет.

Численные расчеты с помощью метода R-функций производились для пластины со следующими параметрами: $a_1 = 0,4$ м; $b_1 = 0,1$ м. На рис. 2 показаны первые три собственные формы линейных колебаний. Рис. 2, а демонстрирует первую зонтичную форму линейных колебаний; рис. 2, б, в представляет две сопряженные формы колебаний. Результаты расчетов собственных частот с использованием функции $\omega_1(r, \theta)$ представлены в табл. 2. Значения первых трех собственных частот определялись для различных степеней полиномов (5). Данные этой таблицы демонстрируют хорошую сходимость. Для сравнения результаты, полученные методом конечных элементов, показаны в пятой строке таблицы. Относительная разница данных четвертой и пятой строк представлена в шестой строке.

Результаты расчетов собственных частот с функцией $\omega_2(r, \theta)$ даны в табл. 3. Эти собственные частоты получены с различными степенями полиномов (5). В таблице показаны данные, полученные методом конечных элементов, и относительная разница результатов, полученных с использованием R-функций и метода Релея–Ритца.



Частоты, полученные с использованием функции ω_2 , ближе к результатам метода конечных элементов, чем данные, полученные с помощью ω_1 . Большая точность результатов, представленных в табл. 3, достигается при меньших степенях полиномов (5) в сравнении с данными табл. 2.

Таблица 1. Собственные частоты, полученные методом конечных элементов

a_1 , м	b_1 , м	p_1 , Гц	p_2 , Гц	p_3 , Гц
0,46	0,02	203,76	414,77	431,39
0,45	0,02	206,01	414,63	439,22
0,40	0,02	223,23	416,49	493,69
0,36	0,02	245,68	420,15	556,20
0,30	0,02	299,67	432,42	677,19
0,46	0,05	204,86	414,73	435,41
0,45	0,05	207,58	415,1	444,68
0,40	0,05	226,52	418,26	504,99
0,30	0,05	313,12	445,71	719,55
0,46	0,1	206,26	415,12	440,71
0,45	0,1	209,27	415,99	451,09
0,40	0,1	231,51	422,66	522,77
0,30	0,1	330,98	468,06	759,49
0,45	0,2	210,10	416,60	454,31
0,30	0,2	348,98	503,31	779,58

Таблица 2. Собственные частоты, полученные с использованием функции $\omega_1(r, \theta)$

Степени полиномов	p_1 , Гц	p_2 , Гц	p_3 , Гц
$M_{1,0} = 4; M_{1,2} = 4; M_{1,4} = 2; M_{1,1} = 13; M_{1,3} = 0; M_{2,1} = 1$	273,37	456,08	616,94
$M_{1,0} = 7; M_{1,2} = 7; M_{1,1} = 8; M_{1,3} = 2; M_{2,1} = 2$	258,59	450,05	605,64
$M_{1,0} = 10; M_{1,2} = 10; M_{1,1} = 8; M_{1,3} = 5; M_{2,1} = 5$	254,76	444,97	596,95
$M_{1,0} = 13; M_{1,2} = 13; M_{1,1} = 8; M_{1,3} = 8; M_{2,1} = 8$	254,24	444,18	595,73
МКЭ	231,51	422,66	522,77
Относительная погрешность	8,9%	4,8%	12,2%

Таблица 3. Собственные частоты, полученные с использованием функции $\omega_2(r, \theta)$

Степени полиномов	p_1 , Гц	p_2 , Гц	p_3 , Гц
$M_{1,0} = 6; M_{1,2} = 0; M_{1,1} = 4; M_{1,3} = 0; M_{2,1} = 2; M_{2,3} = 0$	256,76	449,41	566,28
$M_{1,0} = 6; M_{1,2} = 2; M_{1,1} = 4; M_{1,3} = 2; M_{2,1} = 3; M_{2,3} = 0$	250,64	449,01	545,95
$M_{1,0} = 6; M_{1,2} = 4; M_{1,1} = 4; M_{1,3} = 4; M_{2,1} = 2; M_{2,3} = 4$	249,99	448,33	543,07
МКЭ	231,51	422,66	522,77
Относительная разница	7,3%	5,7%	3,7%

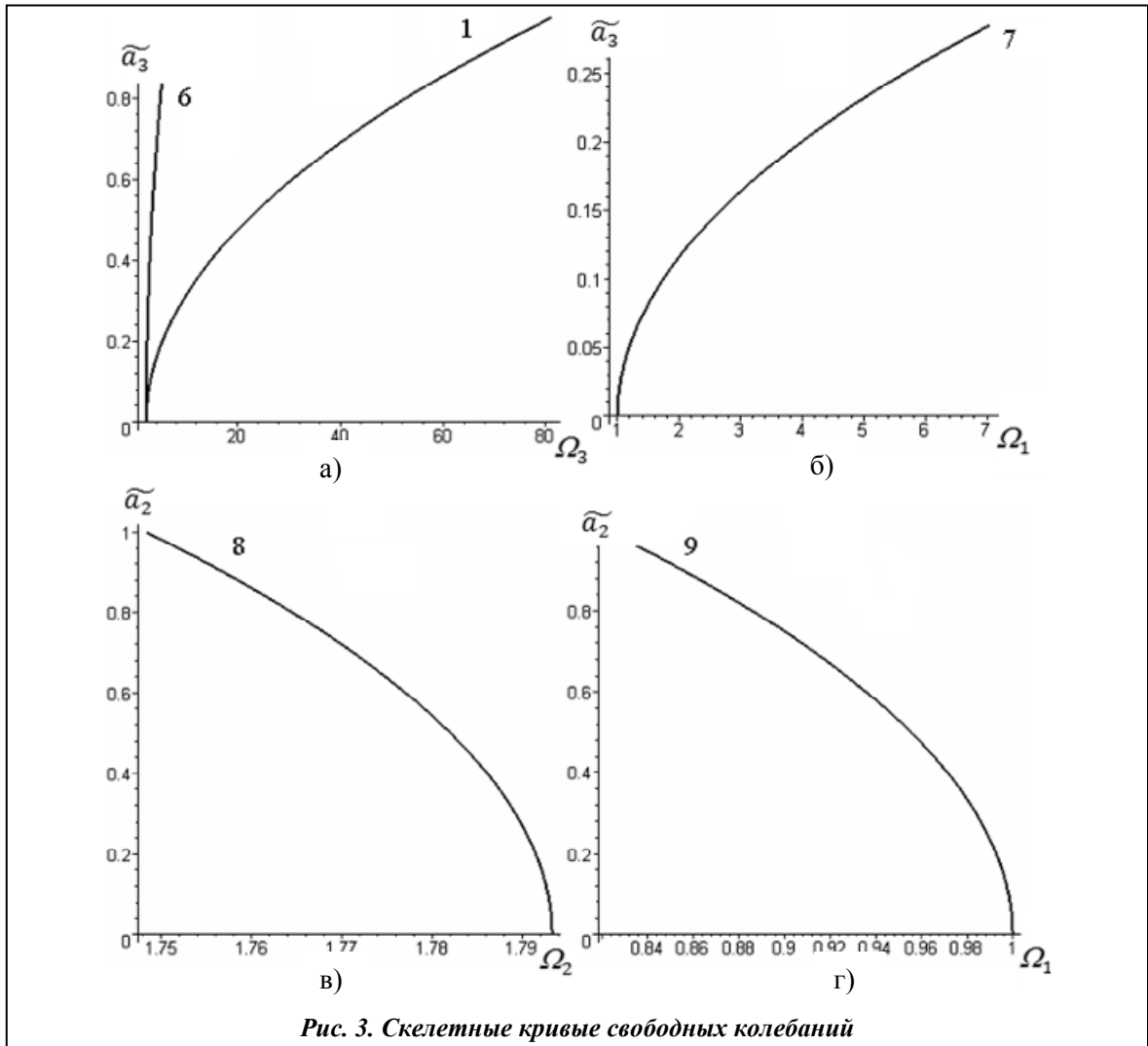


Рис. 3. Скелетные кривые свободных колебаний

Заметим, что вторая и третья частоты для круглых пластинок являются кратными. Однако если форма границы пластины не является идеально круглой, кратные частоты расщепляются, что наблюдается в рассматриваемом случае. Вторая и третья собственные частоты пластины представлены во втором и третьем столбце табл. 1. Как следует из этой таблицы, кратные частоты круглой пластины существенно отличаются от собственных частот пластины с двумя вырезами.

Для исследования нелинейных колебаний пластины определялись неподвижные точки системы модуляционных уравнений (13). Результаты расчетов представлены на рис. 3. На рис. 3, а показаны колебания, отмеченные номером 1. Они соответствуют неподвижной точке системы модуляционных уравнений ($\tilde{a}_1 \neq 0; \tilde{a}_2 \neq 0; \tilde{a}_3 \neq 0$), которая определяется из системы нелинейных алгебраических уравнений: $f_j(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = 0; j = 1, 2$. Скелетная кривая, отмеченная номером 6, соответствует неподвижной точке ($\tilde{a}_1 \neq 0; \tilde{a}_2 = 0; \tilde{a}_3 \neq 0$), которая описывается нелинейным алгебраическим уравнением $f_1(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = 0$. Скелетная кривая (рис. 3, б) соответствует неподвижной точке ($\tilde{a}_1 \neq 0; \tilde{a}_2 = 0; \tilde{a}_3 \neq 0$), которая описывается следующим нелинейным алгебраическим уравнением: $f_3(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = 0$. Скелетная кривая (рис. 3, в) соответствует неподвижным точкам модуляционных уравнений ($\tilde{a}_1 \neq 0; \tilde{a}_2 \neq 0; \tilde{a}_3 = 0$), которые описываются одним нелинейным алгебраическим уравнением $f_1(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = 0$. На рис. 3, г показаны свободные нелинейные колебания, которые ха-

рактируются неподвижными точками ($\tilde{a}_1 \neq 0; \tilde{a}_2 \neq 0; \tilde{a}_3 = 0$). Эти точки описываются следующим нелинейным алгебраическим уравнением: $f_2(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = 0$. Отметим, что кривые 1 и 6, представленные на рис. 3, а, описывают различные типы движений.

Теперь свяжем колебания, представленные на рис. 3, с движениями диска. Скелетная кривая, обозначенная цифрой 1, соответствует взаимодействию зонтичной формы и двух сопряженных форм колебаний. Все остальные колебания пластины, представленные на рис. 3, соответствуют взаимодействию зонтичной формы с одной из двух сопряженных форм колебаний.

Заключение

В статье исследовано взаимодействие зонтичной формы колебаний круглой пластины и двух сопряженных форм колебаний. Такое взаимодействие в случае геометрически нелинейного деформирования пластины описывается системой трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Подробно исследована сходимость при расчете собственных форм и частот линейных колебаний, полученных совместным использованием методов R-функций и Релея–Ритца. Для анализа сходимости результаты сравнивались с данными метода конечных элементов.

Динамика пластины при ее геометрически нелинейном деформировании исследовалась методом многих масштабов. В этом случае обнаружены следующие два вида колебаний:

- колебания, в которых принимают участие зонтичная форма и пара сопряженных форм колебаний;
- колебания, в которых участвует зонтичная форма и одна из сопряженных форм колебаний.

Полученные скелетные кривые свободных нелинейных колебаний обладают как мягким, так и жестким поведением.

Эта работа была частично поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины в рамках проекта Ф28/257. Первый автор благодарит аспиранта И. Д. Бреславского за полезные обсуждения метода R-функций.

Литература

1. White R. G. Effects of nonlinearity due to large deflections in the resonance testing of structures / R. White // J. of Sound and Vibration. – 1963. – Vol. 16. – P. 255–267.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем / В. В. Болотин. – М: Физматлит, 1956. – 750 с.
3. Голоскоков Е. Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е. Г. Голоскоков, А. П. Филиппов. – Киев: Наук. думка, 1977. – 336 с.
4. Farnsworth C. E. Resonance response of nonlinear circular plates subjected to uniform static load / C. E. Farnsworth, R. M. Evan-Iwanowski // ASME J. Appl. Mech. – 1970. – Vol. 37. – P. 1043–1049.
5. Nayfeh A. H. Nonlinear Oscillations / A. H. Nayfeh, D. T. Mook. – New York: John Wiley and Sons, 1979. – 870 p.
6. Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы / В. Л. Рвачев, Л. В. Курпа, Н. Г. Склепус, Л. А. Учишвили. – Киев: Наук. думка, 1973. – 123 с.
7. Курпа Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек / Л. В. Курпа. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 406 с.
8. Григолюк Э. И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций / Э. И. Григолюк, В. И. Мамай. – М.: Наука, 1997. – 380 с.
9. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

Поступила в редакцию
01.10.10