

УДК 519.63

**В. М. Колодяжный**, д-р физ.-мат. наук  
**О. Ю. Лисина**

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины  
 (г. Харьков, E-mail: kolodyazhny@univer.kharkov.ua)

## **ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ БЕССЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ И АТОМАРНЫХ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ**

*Представлены бессеточные методы решения задач моделирования. Предлагаются алгоритмы численной реализации на основе использования радиальных базисных функций и атомарных радиальных базисных функций. Рассматриваются специальные интегро-дифференциальные уравнения, решениями которых являются атомарные радиальные базисные функции.*

*Подано безсіткові методи роз'язання задач моделювання. Пропонуються алгоритми чисельної реалізації на основі використання радіальних базисних функцій та атомарних радіальних базисних функцій. Розглядаються спеціальні інтегро-диференціальні рівняння, розв'язками яких є атомарні радіальні базисні функції.*

### **Введение**

Методы, реализующие аппроксимацию дифференциального уравнения в сильной форме с применением финитных радиальных функций в качестве базисных, относятся к бессеточным подходам решения краевых задач. В качестве указанных функций желательно использовать те, которые обладают свойством инвариантности не только при осуществлении операций сдвигов, но и при поворотах и отображениях в евклидовом пространстве. Этими свойствами обладают положительно определенные функции, составляющие класс радиальных базисных функций (РБФ), а также исследуемые в работах [1–5] – атомарные радиальные базисные функции (АРБФ).

С помощью функций указанного класса получены интересные результаты реализации бессеточных схем (Kansa E. J. [6]). Полиномиальные RBF позволили решить ряд проблем, возникающих при численной реализации методов аппроксимации на основе локального метода слабо-сильного решения Петрова–Галеркина и глобального метода слабо-сильного решения Галеркина. Использование комбинированных методов слабо-сильного решения, которые формировались на основе метода наименьших квадратов и метода точечной интерполяции с помощью радиальных базисных функций, позволили осуществлять при интегрировании перерасчеты сеток только вблизи граничных точек.

### **Численная схема решения на основе РБФ**

Пусть задано некоторое множество точек  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega \subset R^n$ . Радиальная базисная функция – такая функция вещественной переменной, значение которой зависит только от расстояния от точки отсчета  $x$  до некоторой другой точки  $x_i$ . Иными словами, функция, удовлетворяющая свойству  $\varphi(x, x_i) = \varphi_i(x) = \varphi(\|x - x_i\|)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , рассматривается как радиальная базисная функция, а ее норма  $\|\varphi(x, x_i)\|$  будет определяться величиной евклидова расстояния  $\|x - x_i\|$ . Пусть задана совокупность величин  $y_1, y_2, \dots, y_n \in R$ , заданных на соответствующем наборе точек  $x_1, x_2, \dots, x_n$  области  $R^n$ . В качестве интерполирующей функции выбираем линейную комбинацию радиальных базисных функций

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x) + \alpha_{n+1}. \quad (1)$$

Реализуя процедуру интерполяции с использованием (1), приходим к системе из  $n + 1$  линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x) + \alpha_{n+1} = y_i(x), & i = 1, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j = 0 \end{cases} \quad (2)$$

с  $n + 1$  неизвестными коэффициентами  $\alpha_j$ .

Исследование свойств радиальных базисных функций и развитие методов аппроксимации с их помощью относится к 1968 году. Задачу интерполяции на основе радиальных базисных функций рассматривал R. L. Hardy [7]. В его обозначениях система (2) записывается в матричном виде

$$H\alpha = y,$$

$$\text{где } H = \begin{bmatrix} \Phi & p \\ p^T & 0 \end{bmatrix} \in R^{(n+1) \times (n+1)}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \in R^{n \times n}, \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in R^n,$$

$$\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}]^T, \quad y = [y_1, \dots, y_n, 0]^T \in R^{n+1}.$$

Неизвестные коэффициенты определяются из выражения

$$\alpha = H^{-1}y.$$

Изначально R. L. Hardy предложил использовать для построения интерполяционных функций так называемые мультиквадратичные РБФ, которые впервые применялись в задачах томографии при интерполяции наборов случайно распределенных величин [7, 8]. Описанный метод интерполяции в дальнейшем использовался при решении задач аппроксимации на основе применения нейронных сетевых алгоритмов, в вычислительной геометрии и также в численных алгоритмах решения дифференциальных уравнений в частных производных [9–14]. Одним из преимуществ РБФ-методов является возможность достаточно точно аппроксимировать распределенные данные без использования процедур перерасчета сетки. Но эта возможность приводит к повышению вычислительной стоимости реализаций и в целом связана с вопросами стабильности РБФ-методов. Данные трудности успешно были преодолены благодаря разработанным в последнее время методам решения задач интерполяции [15–18].

Наиболее часто используемыми радиальными базисными функциями являются

- гауссиан  $\varphi(r) = e^{-c^2 r^2}$ ;
- мультиквадратичная функция  $\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$ ;
- полигармонический сплайн  $\varphi(r) = r^2 \ln r$ ,

где  $r = \|x - x_i\|$ ,  $x_n \in R^n$ ,  $c$  – произвольно выбираемый параметр,  $c \neq 0$ .

Решение задачи аппроксимации на основе РБФ приводит к представлению

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi(\|x - x_i\|), \quad x \in \Omega \subseteq R^n,$$

где каждому значению  $s(x_i)$  ставится в соответствие значение искомой функции  $f(x_i)$  в соответствующей точке  $x_i$ . Из получаемой системы уравнений находятся неизвестные коэффициенты  $c_i$ .

Известно, что в случае применения РБФ для решения задач аппроксимации возникает проблема, формируемая принципом «торговли» (trade-off principle) – хорошая сходимость при аппроксимации может быть достигнута только ценою нестабильности. Одним из путей решения этой проблемы является применение РБФ с компактными носителями. Такие РБФ, предложенные в работе Н. Wendland’a [19], являются строго положительно определенными в пространстве  $R^n$  и могут быть построены с обеспечением любой требуемой степенью гладкости  $\varphi(r) \in C^{2k}$ .

Классы функции Wendland’a  $\varphi_{l,k}(r)$  при  $l = (d/2) + k + 1$  и  $k = 0, 1, 2, 3$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{l,0}(r) &= (1-r)^l, \\ \varphi_{l,1}(r) &= (1-r)_+^{l+1}((l+1)r+1), \\ \varphi_{l,2}(r) &= (1-r)_+^{l+2}[(l^2+4l+3)r^2+(3l+6)r+3], \\ \varphi_{l,3}(r) &= (1-r)_+^{l+3}[l^3+9l^2+23l+15)r^3+(6l^2+36l+45)r^2+(15l+45)r+15]. \end{aligned}$$

Отметим, что концептуальная схема решения дифференциальных уравнений в частных производных на основе использования РБФ предложена Е. J. Kansa [6]. Среди применяемых на практике алгоритмов решения дифференциальных уравнений в частных производных, основанных на реализации РБФ-методов, выделим следующие:

1. *Схемы, определяемые областью решения задачи (domain-type schemes).*

Представителями данного направления являются несимметричный метод Е. J. Kansa и симметричный метод Г. Е. Fasshauer’a – метод Эрмита. Недостатки схем этого направления проявляются в значительной потере точности решения уравнения вблизи границы области.

2. *Схемы, определяемые границей области решения задачи (boundary-type schemes).*

Данное направление представлено методом фундаментального решения (MFS), который является несимметричным и требует создания фиктивной границы вне реальной области решения задачи. Недостаток схемы определяется особенностями фундаментального решения, приводящими к нестабильности решения из-за неправильной геометрии области.

Реализации численных алгоритмов на основе использования бессеточных схем определяются двумя подходами: структурированным (рис. 1) и неструктурированным (рис. 2).

Возникающие трудности при реализации структурированного бессеточного метода связаны с поиском

- наиболее приемлемого удовлетворения граничным условиям,
- проблемой управления условным числом.

Особенности реализации неструктурированного подхода связаны с проблемой удовлетворения граничных условий.

**Атомарные РБФ**

Новые перспективы практической реализации бессеточных методов связываются с использованием

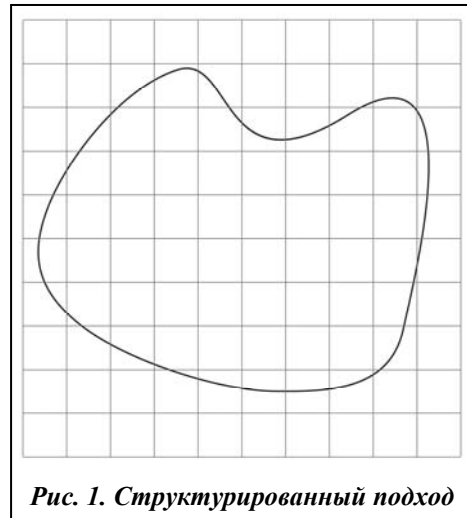


Рис. 1. Структурированный подход

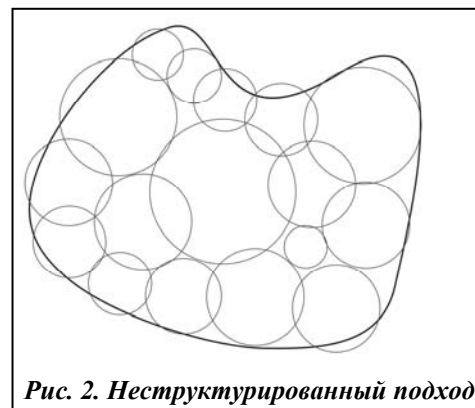


Рис. 2. Неструктурированный подход

в качестве базисных атомарных функций. Открытию и исследованиям классов атомарных функций мы обязаны В. Л. Рвачеву и В. А. Рвачеву, построившим в 1971 году простейшую одномерную атомарную функцию  $up(x)$  [20, 21]. Характерные свойства функции  $up(x)$  – бесконечная дифференцируемость и финитность, т. е. наличие компактного носителя – позволили построить алгоритмически простые вычислительные схемы для решения задач интерполяции и аппроксимации функций [22]. Эти функции использовались в качестве пробных при решении краевых задач на основе применения вариационных методов.

Особый класс радиальных базисных функций составляют атомарные функции многих независимых переменных. Такие функции являются бесконечно дифференцируемыми финитными решениями функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) специального вида [1, 20]

$$Lu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \oint_{\partial\Omega_k} u[a(x_1 - \xi_1), a(x_2 - \xi_2), \dots, a(x_n - \xi_n)] d\omega + \mu u(ax_1, ax_2, \dots, ax_n), \quad (3)$$

где  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ,  $L$  – дифференциальный оператор, в качестве которого можно рассматривать дифференциальные операторы различных видов  $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  – оператор Лапласа;

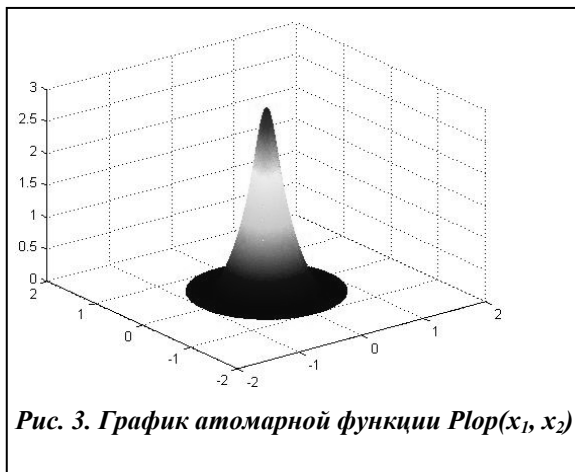
$\Delta \pm \delta^2$  – оператор Гельмгольца;  $\Delta\Delta$  – бигармонический оператор и т.д.;  $\partial\Omega_k : \sum_{i=1}^N \xi_i^2 = r_k^2$  – граница выпуклой области. Выбор значений коэффициентов  $\lambda_k, \mu$  осуществляется таким образом, чтобы обеспечивалось существование и единственность финитного решения соответствующих ФДУ.

Расширение понятия атомарной функции на случай многих независимых переменных (нетривиальные обобщения) связаны с исследованиями В. М. Колодяжного и В. А. Рвачева [2], которые предложили классы атомарных функций, порождаемых ФДУ специального вида. Так, для практически важных классов функций двух и трех независимых переменных были построены следующие атомарные функции  $Plop(x_1, x_2)$ ,  $Hlop(x_1, x_2)$ ,  $Vlop(x_1, x_2)$ ,  $KGlop(x_1, x_2)$ ,  $Согр(x_1, x_2, x_3)$ ,  $Ногр(x_1, x_2, x_3)$  и т. д.

Пример 1. Функция  $Plop(x_1, x_2) \in C^\infty$  является финитным решением функционально-дифференциального уравнения вида

$$\Delta u(x_1, x_2) = \lambda \oint_{\partial\Omega} u[3(x_1 - \xi_1), 3(x_2 - \xi_2)] d\omega + \mu u(3x_1, 3x_2), \quad (4)$$

где  $\partial\Omega : \xi_1^2 + \xi_2^2 = 4/9$ ;  $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ , при определенном выборе значений параметров  $\mu$  и  $\lambda$ :  $\mu = -4\pi\lambda/3$ ,  $\lambda = 3^5/(4\pi)$ . Носителем такой функции является круг единичного радиуса (рис. 3).



Согласно определению функции  $Plop(x_1, x_2)$  имеем

$$Plop(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(t_1 x_1 + t_2 x_2)] P\tilde{lop}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

где  $P\tilde{lop}(t_1, t_2) = \prod_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-(t_1^2 + t_2^2)]^k}{9^{(h+1)k} [(k+1)!]^2}$  [4].

Алгоритм бессеточной схемы численного решения 2D краевой задачи с помощью АРБФ  $Plop(x_1, x_2)$  рассмотрим на примере по-

строения решения краевой задачи для дифференциального уравнения Лапласа.

Пусть  $D = (x_1, x_2) : a \leq x_1 \leq b; c \leq x_2 \leq d$  прямоугольник на плоскости  $x_1Ox_2$ .

Пусть в ограниченной односвязной области  $\Omega \subset D$  задано дифференциальное уравнение

$$\Delta u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega \quad (5)$$

а на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  – условие Дирихле

$$u(x_1, x_2)|_{\partial\Omega} = \varphi(x_1, x_2). \quad (6)$$

Построим в области  $D$  множество точек  $D_h$ , задающее сеть

$$D_h = \{(x_{1i}, x_{2j}) : x_{1i} = x_{10} + ih, i = 0, 1, 2, \dots, n; x_{2j} = x_{20} + jh, j = 0, 1, 2, \dots, m;$$

$$a = x_{10} < \dots < x_{10} + kh < \dots < x_{10} + nh = b, k = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$c = x_{20} < \dots < x_{20} + lh < \dots < x_{20} + mh = d, l = 1, 2, \dots, m-1;$$

Определим в области  $D$  вспомогательную область  $\chi \supset \Omega$ , граница которой формируется в виде замкнутой непрерывной ломаной, соединяющей  $M$  узловых точек сети  $D_h$ . Обозначим множество этих граничных узлов через  $Q_{\partial\chi}$ . Граница  $\partial\chi$  области  $\chi$  пусть не приближается к точкам границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  ближе, чем на расстояние, равное  $r/3$ , и располагается от этих точек не далее чем на расстоянии  $2r/3$  (рис. 4).

Обозначим через  $Q_\chi$  множество из  $N$  узловых точек множества  $D_h$ , которые содержатся в области  $\chi$  (ограничены границей  $\partial\chi$ ):  $Q_\chi = \chi \cap D_h$ . Через  $Q_\Omega$  обозначим множество узловых точек множества  $D_h$ , которые являются внутренними точками области  $\Omega$ .

Приближенное решение задачи (5)–(6) будем отыскивать в виде

$$u_r(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N+M} c_i \text{Plop}(x_1 - x_{1i}, x_2 - x_{2i}), \quad (7)$$

где  $(x_{1i}, x_{2i}) \in Q_\chi, i = 1, 2, \dots, N; (x_{1i}, x_{2i}) \in Q_{\partial\chi}, i = 1 + N, N + 2, \dots, N + M$ .

Вместо интеграла по окружности в уравнении (4) воспользуемся приближенным его представлением, что позволяет записать (4) в форме

$$\Delta \text{Plop}(x_1, x_2) \approx \lambda \sum_{s=1}^S a_s \text{Plop}(3(x_1 - \xi_{1s}), 3(x_2 - \xi_{2s})) + \mu \text{Plop}(3x_1, 3x_2), \quad (8)$$

где  $a_s$  – весовые коэффициенты, а  $(\xi_{1s}, \xi_{2s})$  – координаты узлов соответствующей квадратурной формулы. Как следует из [23], для интегрирования периодических функций наилучшей является формула прямоугольников на равномерной сетке.

Воздействуем на функцию  $u_r(x_1, x_2)$  оператором Лапласа

$$\Delta u_r(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N+M} c_i \left\{ \lambda \oint_{\partial\Omega} \text{Plop}[3(x_1 - x_{1i} - \xi_1), 3(x_2 - x_{2i} - \xi_2)] ds + \mu \text{Plop}[3(x_1 - x_{1i}), 3(x_2 - x_{2i})] \right\}.$$

Учитывая (7) и (8), построим функцию

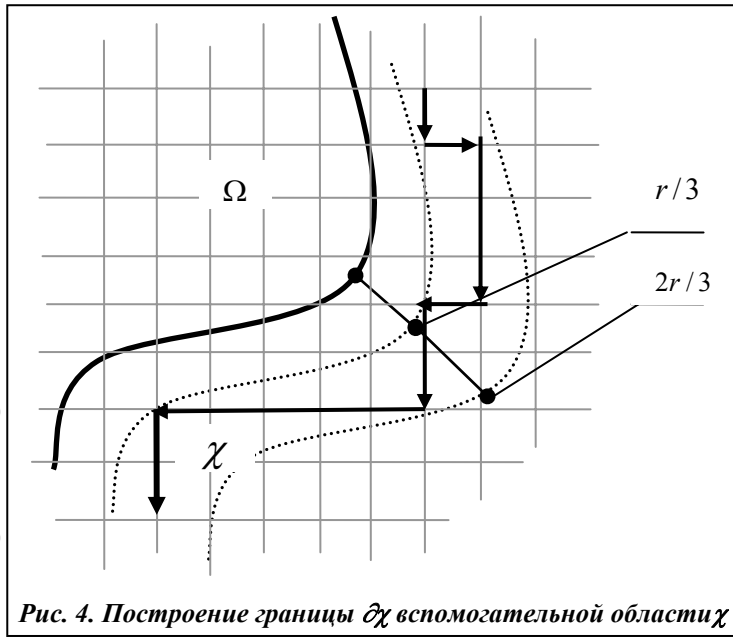


Рис. 4. Построение границы  $\partial\chi$  вспомогательной области  $\chi$

$$v_1(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N+M} c_i \left\{ \lambda \sum_{s=1}^S a_s \text{Plop}[3(x_1 - x_{1is} - \xi_{1s}), 3(x_2 - x_{2is} - \xi_{2s})] ds + \mu \text{Plop}[3(x_1 - x_{1is}), 3(x_2 - x_{2is})] \right\}.$$

Обозначим  $x_{1is} = x_{1i} + \xi_{1s}$ ;  $x_{2is} = x_{2i} + \xi_{2s}$ . Пусть  $S_i$  будет множеством индексов  $s$  тех функций  $\text{Plop}[3(x_1 - x_{1i} - \xi_{1i}), 3(x_2 - x_{2i} - \xi_{2i})]$ , для которых имеет место  $\Omega \cap \sup p \text{Plop}[3(x_1 - x_{1i} - \xi_{1i}), 3(x_2 - x_{2i} - \xi_{2i})] \neq \emptyset$ .

Определим для точек  $(x_{1is}, x_{2is})$  ближайшие точки множества  $D_h$ , которые в дальнейшем будем обозначать через  $(x_{1dis}, x_{2dis})$  и которые будут обеспечивать минимальную величину ошибки при замене точек  $(x_{1is}, x_{2is})$  точками  $(x_{1dis}, x_{2dis})$ .

Введем в рассмотрение функцию

$$v_2(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N+M} c_i \left\{ \lambda \sum_{s \in S_i'} a_s \text{Plop}[3(x_1 - x_{1dis}), 3(x_2 - x_{2dis})] ds + \mu \text{Plop}[3(x_1 - x_{1dis}), 3(x_2 - x_{2dis})] \right\} + \sum_{i=1}^{N+M} c_i \left\{ \lambda \sum_{s \in S_i} a_s \text{Plop}[3(x_1 - x_{1dis}), 3(x_2 - x_{2dis})] \right\}. \quad (9)$$

После приведения подобных членов выражение (9) приобретает вид

$$v_2(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N+M} c_i \sum_{j=1}^{N+M} b_{ji} \text{Plop}[3(x_1 - x_{1dis}), 3(x_2 - x_{2dis})]. \quad (10)$$

Будем требовать, чтобы в представлении (10), благодаря уравнению (5), выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^{N+M} c_i b_{ji} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

что приводит к  $N$  уравнениям, необходимым для определения  $N + M$  коэффициентов  $c_i$ . Остальные  $M$  уравнений получим из условия приближенного удовлетворения граничному условию (6). Это может быть обеспечено, например, следующим образом. Выделим на границе  $\partial\Omega$   $M$  точек, которые будем обозначать

$$(x_{1k}^*, x_{2k}^*) \in \partial\Omega, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Для данной совокупности из  $M$  точек границы  $\partial\Omega$  положим, что

$$u_r(x_{1j}^*, x_{2j}^*) = \phi(x_{1j}^*, x_{2j}^*), \quad (x_{1j}^*, x_{2j}^*) \in \partial\Omega, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

или

$$\sum_{i=1}^{N+M} c_i \text{Plop}(x_{1j}^* - x_{1i}, x_{1j}^* - x_{1i}) = \phi(x_{1j}^*, x_{2j}^*), \quad (x_{1j}^*, x_{2j}^*) \in \partial\Omega, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Таким образом, искомая система  $N + M$  линейных уравнений, из которой можно определить коэффициенты  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N + M$ , имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N+M} c_i b_{ji} = 0, & j = 1, 2, \dots, N; \\ \sum_{i=1}^{N+M} c_i \text{Plop}(x_{1j}^* - x_{1i}, x_{1j}^* - x_{1i}) = \phi(x_{1j}^*, x_{2j}^*), & j = 1, 2, \dots, M. \end{cases} \quad (11)$$

Матрица данной системы уравнений (11) будет иметь разреженную структуру

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,p} & a_{1,p+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1,t} & a_{1,t+1} & \dots & a_{1,t+v} & 0 & \dots & 0 & a_{1,N+1} & \dots & a_{1,N+w} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & a_{22} & \dots & a_{2,p} & a_{2,p+1} & a_{2,p+2} & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,t+1} & \dots & a_{2,t+v} & a_{1,t+v+1} & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2,N+w} & a_{2,N+w+1} & a_{2,N+w+2} & \dots & 0 \\
 \dots & \dots \\
 a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & 0 & a_{N,p+1} & a_{N,p+2} & a_{N,p+3} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{N,N+w+2} & \dots & 0 \\
 a_{N+1,1} & a_{N+1,2} & \dots & 0 & a_{N+1,p+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & a_{N+2,2} & \dots & 0 & a_{N+2,p+1} & a_{N+2,p+2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots \\
 a_{N+M,1} & a_{N+M,2} & \dots & a_{N+M,p} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N+M,N+M}
 \end{pmatrix}$$

где  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N + M$  числа, не равные нулю для соответствующих значений  $i$  и  $j$ ; величины индексов  $p, t, v, w$  зависят от величины радиуса  $r$  носителя функции  $\text{Pлор}(x_1, x_2)$ .

Характерными особенностями предлагаемого метода является, с одной стороны, использование финитных функций (свойство локальности), которое обеспечивает разреженность линейных систем (11), а с другой – полученные решения исходной краевой задачи являются бесконечно дифференцируемыми, что немаловажно для решения задач некоторых классов. Качество приближенного решения определяется способностью обеспечить оптимальные значения для величин  $N, M$ , и  $S$ , при которых имеют место минимальные ошибки, а именно:

- в случае определения результата действия оператора Лапласа, при рассмотрении ограниченного количества точек (точек множества  $Q_\gamma$ ) – параметр  $N$ ;
- в случае приближенного представления интеграла по контуру в виде конечной суммы – параметр  $S$ ;
- при проведении процедуры интерполяции граничного условия – параметр  $M$ .

Визуализация решения рассматриваемым методом модельной 2D краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x_1, x_2) = 1, \quad (x_1, x_2) \in \Omega,$$

в сложной области (рис. 5) и с граничными условиями  $u(x_1, x_2)|_{\partial\Omega} = \varphi(x_1, x_2)$  показаны на рис. 6.

Пример 2. Функция  $\text{Pлор}(x_1, x_2) \in C^\infty$  является финитным решением функционально-дифференциального уравнения вида



Рис. 5. Область решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

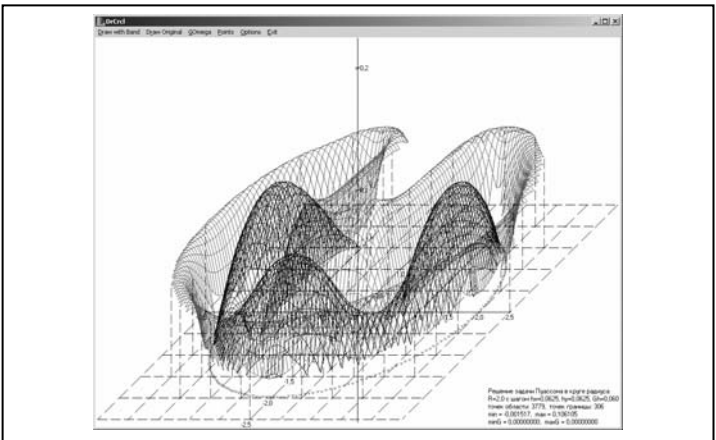


Рис. 6. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в сложной области на основе использования атомарной функции  $\text{Pлор}(x_1, x_2)$

$$\Delta u(x_1, x_2) - \delta^2 u(x_1, x_2) = \lambda \int_{\partial\Omega} u(3(x_1 - \xi_1), 3(x_2 - \xi_2)) d\omega + \mu u(3x_1, 3x_2)$$

где  $\partial\Omega: \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$ ;  $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ , при соответствующем выборе параметров  $\lambda$  и  $\mu$ :  $\mu = 2\pi\lambda J_0(ic)$ ,  $\lambda = \frac{9c^2}{2\pi[J_0(ic) - J(0)]}$ . Носителем функции  $\text{Hlor}(x_1, x_2)$  является круг радиуса 1,5 (рис. 7).

Информацию о других атомарных функциях  $\text{KGlor}(x_1, x_2)$ ,  $\text{Vlor}(x_1, x_2)$  и порождаемых полигармоническим дифференциальным оператором можно найти в работах [3, 20].

Полученные функции трех независимых переменных  $\text{CoGr}(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\text{NoGr}(x_1, x_2, x_3)$  являются решением ФДУ вида

$$Lu(x_1, x_2, x_3) = \lambda \oint_{\partial\Omega} [a(x_1 - \xi_1), a(x_2 - \xi_2), a(x_3 - \xi_3)] + \mu u(ax_1, ax_2, ax_3),$$

где соответственно функция  $\text{CoGr}(x_1, x_2, x_3)$  является решением ФДУ, порожденного оператором Лапласа:  $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ , функция  $\text{NoGr}(x_1, x_2, x_3)$  – оператором Гельмгольца:  $\Delta \pm \delta^2$ , где  $\delta$  – волновое число. Носителем функций  $\text{CoGr}(x_1, x_2, x_3)$  и  $\text{NoGr}(x_1, x_2, x_3)$  является шар определенного радиуса  $\sup p F(x_1, x_2, x_3) = M$ ;  $M: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$ ,  $F(x_1, x_2, x_3)$  – одна из функций  $\text{CoGr}(x_1, x_2, x_3)$  или  $\text{NoGr}(x_1, x_2, x_3)$ . Каждая из этих функций нормируется условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_1, x_2, x_3) dx = 1.$$

Данные трехмерные атомарные функции удобны для реализации вычислительных алгоритмов построения решений краевых задач в 3D областях по бессеточным схемам. Свойства этих функций позволяют использовать такие функции в качестве базисных при построении приближенного решения краевых задач бессеточными методами (методами коллокации).

### Заключение

Бессеточные методы с использованием радиальных базисных функций показали свою эффективность при решении большого класса практически важных задач, в которых применение сеточных методов оказывается малоэффективным (это относится, в частности, к задачам механики разрушения). Они демонстрировали свою эффективность и в задачах, где традиционно успешно реализовывались сеточные методы, например в задачах многофазной фильтрации, теплопереноса, конвекции-диффузии и др. [4, 5, 21, 24, 25]. Разрабатываемые ныне методы решения задач на основе атомарных радиальных базисных функций уже показали себя как достаточно эффективные и успешно реализуемые алгоритмы, что позволит в будущем использовать их для решения разного рода научно-инженерных задач.

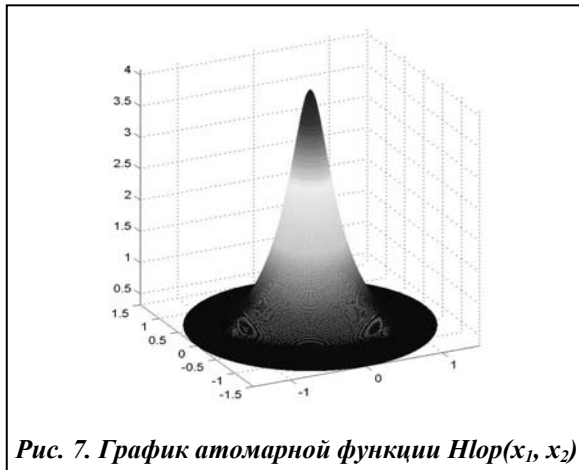


Рис. 7. График атомарной функции  $\text{Hlor}(x_1, x_2)$

### Литература

1. Колодяжний В. М. Деякі властивості атомарних функцій багатьох змінних / В. М. Колодяжний, В. О. Рвачов // Доп. НАН України. – 2005. – № 1 – С. 12–20.
2. Колодяжний В. М. Фінітні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними / В. М. Колодяжний, В. О. Рвачов // Доп. НАН України. – 2004. – № 5 – С. 17–22.
3. Колодяжний В. М. Фінітні функції, що поро-



- джені бігармонічним оператором / В. М. Колодяжний, В. О. Рвачов // Доп. НАН України. – 2006. – № 2. – С. 23–30.
4. *Колодяжний В. М.* Фінітні функції, що породжені оператором Лапласа / В. М. Колодяжний, В. О. Рвачов // Доп. НАН України. – 2004. – № 4. – С. 17–22.
  5. *Колодяжний В. М.* Атомарные функции трех переменных инвариантные относительно группы вращения / В. М. Колодяжний, В. А. Рвачев // Кибернетика и систем. анализ. – 2004. – № 6 – С. 118–130.
  6. *Kansa E. J.* Multiquadrics – a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – I: solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations / E. J. Kansa // *Comp. Math. Appl.* – 1990. – № 19. – P. 147–161.
  7. *Hardy R. L.* Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces / *R. L. Hardy* // *JGR.* – 1971. – № 76 (8) – P. 1905–1915.
  8. *Hardy R. L.* Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method. 20 years of discovery 1968–1988 / *R. L. Hardy* // *Comp. Math. Appl.* – 1990. – № 19 (8–9). – P. 163–208.
  9. *Fasshauer G. E.* Solving differential equations with radial basis functions: multilevel methods and smoothing / *G. E. Fasshauer* // *Adv. Comp. Math.* – 1999. – № 11 (2–3). – P. 139–159.
  10. *Fasshauer G. E.* Solving Partial Differential Equations by Collocation with Radial Basis Functions appeared / *G. E. Fasshauer* // *Surface Fitting and Multiresolution Methods.* A. Le Mehaute, C. Rabut, and L. L. Schumaker (eds.). Vanderbilt University Press. – 1997. – P. 131–138.
  11. *Fedoseyev A. I.* Improved multiquadric method for elliptic partial differential equations via PDE collocation on the boundary/ *A. I. Fedoseyev, M. J. Friedman, I. J. Kansa* // *Adv. Comp. Math.* – 2002. – № 43 (3–5). – P. 439–455.
  12. *Franke C.* Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions/ *C. Franke, R. Schaback* // *Adv. Comp. Math.* – 1998. – № 93 (1). – P. 73–82.
  13. *Larsson E.* A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic PDEs/ *E. Larsson, B. Fornberg* // *Adv. Comp. Math.* – 2003. – № 46. – P. 891–902.
  14. *Wu Z.* Solving differential equations with radial basis functions / *Z. Wu* // *Adv. Comp. Math.* – 1999 – P. 537–543.
  15. *Beatson R. K.* Fast solution of the radial basis function interpolation equations: domain decomposition methods / *R. K. Beatson, W. A. Light, S. Billings* // *SISC.* – 2000. – №22 (5). – P. 1717–1740.
  16. *Cherrie J. B.* Fast evaluation of radial basis functions: methods for generalized multiquadrics in / *J. B. Cherrie, R. K. Beatson, G. N. Newsam* // *SISC.* – 2002. – № 23 (5). – P. 1549–1571.
  17. *Fornberg B.* Stable computation of multiquadric interpolants for all values of the shape parameter/ *B. Fornberg, G. Wright* // *Comp. Math. Appl.* – 2004. – № 48. – P. 853–867.
  18. *Kansa E. J.* Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions: applications to elliptic partial differential equations/ *E. J. Kansa, Y. C. Hon* // *Adv. Comp. Math.* – 2000. – № 39 (7–8). – P. 123–137.
  19. *Wendland H.* Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree / *H. Wendland* // *Adv. Comp. Math.* – 1995. – № 4 – P. 389–396.
  20. *Колодяжний В. М.* Атомарные функции. Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений / В. М. Колодяжний, В. А. Рвачев // Кибернетика и систем. анализ. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 155–177.
  21. *Рвачев В. Л.* Теория атомарных приближений. Математика, кибернетика / В. Л. Рвачев, В. А. Рвачев. – М.: Знание, 1978. – 62 с.
  22. *Рвачев В. Л.* Неклассические методы теории приближений в краевых задачах / В. Л. Рвачев, В. А. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1979. – 196 с.
  23. *Лигун А. А.* О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов периодических функций / *А. А. Лигун* // *Мат. заметки.* – 1978. – Т. 24, № 5, 1978. – С. 661–669.
  24. *Iske A.* Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for transport problems / *A. Iske* // *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol., Torino*, 2003. – № 61 (3). – P. 247–284.
  25. *Wu Y. L.* A meshfree formulation of local radial point interpolation method for incompressible flow simulation / *Y. L. Wu, G. R. Liu* // *Comp. Mech.* – 2003. – № 30. – P. 355–365.

Поступила в редакцию  
19.09.09