УДК 519.63

В. М. Колодяжный, д–р физ.–мат. наук
О. Ю. Лисина

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, E–mail: kolodyazhny@univer.kharkov.ua)

БЕССЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Предлагается обзор работ, посвященных исследованию бессеточных подходов к разработке численных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующих различные физические процессы. Приводится хронологический обзор бессеточных методов. Описываются бессеточные схемы алгоритма на основе метода частиц и его модификаций.

Пропонується огляд робіт, що присвячені дослідженню безсіткових підходів до розробки чисельних методів розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних, які моделюють різні фізичні процеси. Наводиться хронологічний огляд безсіткових методів. Описуються безсіткові схеми алгоритму на основі методу часток та його модифікацій.

Введение

Последние 20 лет ознаменовались значительными успехами в применении численных методов при моделировании 3D физических явлений, описываемых с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. Этим успехам исследователи во многом обязаны возможностям так называемых бессеточных подходов к решению задач математического моделирования. Один из факторов пристального внимания к бессеточным методам является практическое преимущество по сравнению с сеточными методами при решении задач в сложных областях. В отличие от метода сеток, в бессеточных методах область решения задачи представляет собой равномерно или произвольно (независимо) распределенные по области узлы, к которым «привязываются» базисные функции, то есть центр носителя базисной функции, имеющего форму круга в 2D или шара в 3D областях, совмещается с соответствующим узлом. Перспективность бессеточных методов подтверждается при решении задач, являющихся традиционно сложными в случае применения сеточных методов. Практические исследования показывают, что сеточные методы затруднительно применять в ситуациях, когда рассматриваемые в задачах объекты представляют собою набор дискретных физических объектов (частиц) или когда решаемые задачи сводятся к исследованию сложных процессов, отображающих взаимодействия звезд в астрофизике [1–3], моделирования течения жидкости в гидродинамике [2, 4, 5], описания равновесных и неравновесных систем в термодинамике, динамических режимов протеиновых молекул в биохимии [6, 7] и т. д.

В статье рассмотрены результаты исследований по развитию бессеточных схем решения краевых задач математической физики, проводимых в Институте проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины. В дальнейшем, наряду с общепринятыми положениями, рамки бессеточных методов будут расширены за счет использования математических средств теории *R*-функций и структурного метода построения функций, точно удовлетворяющих граничным условиям краевой задачи [8].

Бессеточные подходы численного решения краевых задач

Прежде чем рассмотреть практические достоинства бессеточных методов, отметим их успешное применение при решении задач теплопроводности (M. Zerroukat, H. Power [9], C. S. Chen, M. S. Ingber, J. A. Tanski [10], P. Chinchapatnam, K. Djidjeli, P. Nair [11]), теории несжимаемых потоков (S. N. Atluri [12], С. В. Богомолов [13], Y. L. Wu, G. RLiu [14]), при моделировании течения жидкости (J. Kruger, P. Kipfer, P. Kondratieva, R. Westermann [15], B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon [16]), в механике твердого тела (W. Hoover [17]), в краевых задачах с особенностями (W. K. Liu [18]) и др.

Реализуемые на практике бессеточные методы можно условно разделить на три основные группы:

– методы, основанные на аппроксимации решения дифференциального уравнения в частных производных в сильной форме (meshfree strong–form methods) – методы коллокации;
– методы, основанные на аппроксимации решения дифференциального уравнения в частных производных в слабой форме (meshfree weak–form methods), реализуемые на основе применения вариационных принципов;
– методы гладких частиц (smoothed particle hydrodynamics – SPH), при реализации которых используются формы интегрального представления.

Одновременно с вышеприведенной классификацией некоторые исследователи отмечают специфические подходы реализации алгоритмов бессеточных схем. Например, выделяется подход, основанный на построении обобщенного слабо–сильного решения с использованием комбинаций методов, приведенных выше (G. R. Liu, Y. T. Gu [19]).

Некоторыми авторами разрабатываются схемы решения, по структуре являющиеся родственными (связанными) бессеточным, а именно:

– метод скользящих наименьших квадратов (moving least squares method – MLSM), описанный в работе P. Lancaster; K. Salkauskas [20];
– метод разбиения единицы (partition of unity method – PUM), применявшийся в работе I. Babuska, J. M. Melenk [21];
– энергетический метод конечных элементов (energy finite element method – EFEM), исследуемый в работе D. Moens, D. Vandepitte [5];
– метод локальной максимальной энтропии (local maximum–entropy method – LMEM), предложенный M. Arroyo и M. Ortiz в 2006 году в работе [22].

Исторически одной из самых ранних реализаций, представляющих обширный класс бессеточных подходов, является метод сглаженных гидродинамических частиц (smoothed particle hydrodynamics method), о котором было заявлено в 1977 году L. B. Lucy [23] и R. A. Gingold, J. J. Monaghan [1]). Данный метод, проявивший, прежде всего, свои достоинства в задачах астрофизики (L. B. Lucy [23]) и вместе со своими многочисленными вариантами относящийся к категории методов частиц, получил широкое применение при пространственном моделировании динамики жидкости (J. U. Brackbill, D. B. Kothe, H. M. Ruppel [24]).

Отметим, что методы частиц, или Лагранжевы методы успешно применяются исследователями в России при моделировании процессов на водной поверхности (С. В. Богомолов, Е. В. Захаров, С. В. Зеркаль [25]), воздушных масс (И. В. Шевченко [37]), волновых процессов (А. П. Потапов, С. И. Ройз., И. Б. Петров [26]), высокоскоростного соударения (Ю. В. Блажевич, В. Д. Иванов, И. Б. Петров, И. В. Петвиашвили [3]), течения жидкости (С. В. Богомолов [13]).

Достоинства методов частиц можно суммировать следующим образом:

– методы могут быть применимы к задачам, описывающим процессы больших деформаций и изломов, поскольку легко вычисляются связности между узлами;
– методы легко реализуемы программно и достаточно просто стыкуются с системами автоматизированного проектирования;
– методы позволяют реализовывать управление точностью вычислений для областей с особенностями;
– при использовании этих методов обеспечивается достаточно точное представление геометрического объекта.

Численная схема решения на основе метода частиц

Метод частиц [13] представляет собой слабую аппроксимацию функции, то есть замену ее конечной суммой δ-функций Дирака

$$u(x) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x - x_i), \tag{1}$$

или приближенное представление обобщенной функции с помощью квадратурной формулы

$$\int u(x)\varphi(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(x_i), \tag{2}$$

где $1/N$ – веса; $\varphi(x)$ – достаточно гладкая и обращающаяся в ноль на бесконечности функция (пробная функция). Это равенство должно выполняться для любой финитной пробной функции, то есть для любой области интегрирования, в том числе и для малой. Отметим, что скорость сходимости методов частиц имеет порядок $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. Простейшим является представление функции $u(x)$ в виде ступенчатой функции

$$\varphi(x - x_i) \approx \prod_i (x - x_i).$$

При этом узлы следует выбирать так, чтобы интегралы по соседним подобластям были равными или сравнимыми, то есть площадь (в одномерном случае) под графиком функции $u(x)$ заменяется набором частиц, центры которых – координаты частиц.

В качестве примера рассмотрим уравнение переноса, для которого метод частиц является наиболее естественным

$$\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t} + \frac{\partial\big(a(t,\,x)u(x,\,t)\big)}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

или в обобщенном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int u(x,\,t)\varphi(x)dx - \int a(t,\,x)u(x,\,t)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}dx = 0, \qquad \forall\varphi.$$

В уравнение (3) подставим ее представление (1) или (2), тогда вместо функции $u(x, t)$ неизвестными становятся узлы $x_i(t)$, что приводит к уравнению

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x_i(t)) - a(t,\,x_i(t))\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i(t)}\right] = 0$$

или

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi'(x_i)\left[\frac{\partial x_i(t)}{\partial t} - a(t,\,x_i(t))\right] = 0,$$

которое выполняется, если для каждого x_i справедлива система

$$\frac{\partial x_i(t)}{\partial t} = a(t,\,x_i(t)) \tag{4}$$

Решая систему (4), получаем слабое решение уравнения переноса.

Очень важным этапом построения численных алгоритмов является оптимальная аппроксимация δ-функций, необходимая для вычисления скорости движения частиц. Здесь и возникают различные модификации метода частиц по способу получения правых частей в системе уравнений их движения.

Для метода «частиц в ячейке» (particle–in–cell–method) δ-функция представляется аппроксимацией классических функций $w^{(k)}(x)$ на основании определения

$$\delta(x - x_0) = \lim_{k\to\aleph} w^{(k)}(x - x_0),$$

где $w^{(k)}(x)$ – гладкие неотрицательные финитные функции, значения которых в точке x_0 стремятся к бесконечности, а площадь под их графиками остается равной единице. Тогда в качестве представления искомой функции решения будем иметь

$$u(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w^{(k)}(x - x_i)\,. \tag{5}$$

По представлению (5) можно восстанавливать функцию $u(x)$ в небольшом количестве точек, а необходимые значения $u(x_i)$ вычислять с помощью интерполяции. Достоинство метода в небольшом количестве вычислительных операций, недостаток – грубость вычислений, хотя это не мешает эффективно использовать метод «частиц в ячейке» для решения, например, задач физики плазмы, где преобладают дальнодействующие силы кулоновского типа.

В задачах близкодействия (газовая динамика) необходимо использование более точных приближений

$$u(x) = \frac{1}{N}\sum_{i \in J(x_i)}^{N} w^{(k)}(x - x_i)\,.$$

В силу финитности $w^{(k)}(x)$ суммировать надо не по всем $i = 1, 2, \ldots, N$, а только по множествам ближайших соседей $J(x_i)$. Значительные вычислительные затраты по поиску этих соседей могут быть существенно сокращены предварительной сортировкой частиц по крупным ячейкам. В итоге получится алгоритмы с числом действий порядка $O(N)$. Такой метод получил название метода «естественных соседей» (natural element method).

Вариацией метода «естественных соседей» является метод сглаженных частиц, который основан на представлении

$$u(x) = \int \delta(x - y)u(y)dy\,,$$

в котором δ-функция аппроксимируется сглаживающим ядром, а интеграл приближается с помощью квадратурной формулы, узлами которой являются координаты частиц. Этот метод продуктивно работает в случае, если нет необходимости точного представления разрывов решения.

В настоящее время методы частиц получили довольно широкое распространение в качестве методов получения решений краевых задач.

Хронологический обзор бессеточных методов

Алгоритмы решения краевых задач на основе бессеточных схем успешно реализуются при исследовании задач в областях с использованием произвольной нерегулярной сетки, что способствовало разработке в 1980 году T. Liszka и J. Orkisz [27] модификации метода конечных разностей (finite difference method – FDM). Воспользовавшись этим методом, B. Nayroles [16] в 1992 году применил подход MLS-аппроксимации при использовании метода Галеркина, который в дальнейшем получил наименование метода диффузного элемента (diffuse element method – DEM). Такая DEM-аппроксимационная схема позволила T. Belytschko в 1994 году предложить метод свободного элемента Галеркина (element–free Galerkin method – EFGM) [28]. Этот EFG-метод является в настоящее время наиболее популярным бессеточным методом, широко применяемым при решении многочисленных задач механики (P. Krysl, T. Belytschko [29], H. Noguchi [30]).

S. N. Atluri и T. Zhu в 1998 году успешно применили для анализа и решения задач вычислительной механики локальный бессеточный метод Петрова–Галеркина (meshless local Petrov–Galerkin method – MLPGM). Особенностью данного подхода является необходимость генерации только локальной сетки при интегрировании, что отличает его от вышеупомянутого EFG–метода. Данный MLPG–метод находит применение при расчете прогибов балок и пластин и при решении задач гидродинамики (S. Atluri, T. Zhu [12]).

W. K. Liu, модифицируя алгоритм построения решения краевых задач на основе SPH-метода, предложил метод репродуцированных ядерных частиц (reproducing kernel particle method – RKPM). Применяемые в методе приемы позволили добиться повышения точности по сравнению со стандартной SPH-аппроксимацией, в особенности при аппроксимации краевых условий на границе области (см. J. S. Chen, C. Pan, C. T. Wu, W. K. Liu [18], W. K. Liu, W. Han, H. Lu, S. Li [31]).

Дальнейшие успехи бессеточных методов связаны с разработкой в 2001 году G. R. Liu [32] метода точечной интерполяции (point interpolation method – PIM), развиваемого в дальнейшем X. Liu, K. Tai [19].

Значительный интерес у математиков вызвали методы, разработанные в 1996 году C. A. M. Duarte и J. T. Oden [33], метод *hp*-облака, и в 1995 году G. Yagawa [34] метод свободного элемента (free mesh method – FMM).

Отметим, что в последние годы моделирование физических процессов на основе применения бессеточных методов становится все более популярным. Появляется большое число различных исследований на основе бессеточного подхода. Информация об использовании бессеточных схем, о которых уже указывалось ранее, а также о некоторых реализациях бессеточных вычислительных алгоритмов решения краевых задач, о которых будет упомянуто в дальнейшем, представлена в таблице.

Одним из достоинств бессеточных методов является упрощение процедур моделирования и численного решения сложных задач, в которых требуется учитывать особенности геометрии области, наличие подвижных границ (при деформации тел, фазовых переходах), неоднородность материалов и т. д. Такого рода особенности проявляются, например, при моделировании процессов формирования литейных отливок, решении задач фильтрации и т. д.

Бессеточные методы, основанные на сильной форме решения (методы коллокации), являются простыми в реализации и вычислительно эффективными. Эти методы, привлекающие в настоящее время внимание многих исследователей [3, 9, 11, 17–19, 32, 35–37], свидетельствуют о том, что бессеточные подходы имеют несомненные преимущества и рассматриваются как альтернативные по отношению к традиционным и популярным сеточным методам. Алгоритмы, реализующие бессеточные схемы, не нуждаются в привязке к интерполяционной сетке, в отличие от сеточных методов, и по этой причине легко интегрируются в системы автоматизированного проектирования (CAD–системы). Применение бессеточных методов для решения инженерных и научно-исследовательских задач приводит, несмотря на увеличивающийся объем вычислительных процедур, к повышению точности решения, а также значительно упрощает в целом алгоритмы численной реализации.

Заключение

В статье была реализована попытка кратко охарактеризовать работы, посвященные применению бессеточных подходов в численных методах решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Методы на основе реализации бессеточных схем решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных

Наименование метода и год публикации	Русский аналог наименования	Используемый метод аппроксимации	Разработчики
Particle–in–cell–method – PICM(1964)	Метод частицы в ячейке	Метод конечных элементов с произвольной сеткой с использованием гладких частиц	Harlow F. H.
Radial basis functions method – RBFM (1971)	Метод радиальных базисных функций	Метод коллокации	Hardy R. L.
Smoothed particle hydrodynamics method – SPHM (1977)	Метод сглаженных гидродинамических частиц	Интегральное представление с использованием дельта–функций Дирака	Lucy L. B., Gingold R. A., Monaghan J. J.
Finite difference method – FDM (1980)	Метод конечных разностей	Представление производных в виде конечных разностей	Liszka T., Orkisz J.
Natural element method – NEM (1980)	Метод естественных соседей	Интерполяция с использованием базисных функций Сибсона	Sibson R.
Diffuse element method – DEM (1992)	Метод диффузного элемента	Метод Галеркина с аппроксимацией скользящим методом наименьших квадратов	Nayroles B., Touzot G., Villon P.
Element–free Galerkin method – EFGM (1994)	Метод свободного элемента Галеркина	Метод Галеркина с использованием тестовых функций скользящего метода наименьших квадратов	Belytschko T.
Free mesh method – FMM (1995)	Метод произвольной сетки	Комбинирование метода конечных элементов и метода коллокации	Nojima K., Kawahara M.
Reproducing kernel particle method – RKPM (1996)	Метод репродуцированных ядерных частиц	Интегральное представление Галеркина	Liu W. K.
hp–clouds method (1996)	Метод *hp*–облака	Использование внешнего базиса с дополнительными параметрами в вариационной формулировке	Duarte C. A. M., Oden J. T.
Meshless local Petrov–Galerkin method – MLPG (1998)	Метод локальной сетки Петрова–Галеркина	Интегральное представление в перекрывающихся подобластях	Atluri S. N., Zhu T.
Meshless local Petrov Galerkin method – MLPG (1998)	Локальный метод Галеркина	Метод Галеркина с аппроксимацией скользящим методом наименьших квадратов	Atluri S. N.
Point interpolation method – PIM (2002)	Метод точечной интерполяции	Метод Галеркина с интерполяцией функциями с радиальным или полиномиальным базисами	Liu G. R.
Generalized finite difference method – GFDM (2000)	Обобщенный метод конечных элементов	Метод коллокации с аппроксимацией скользящим методом наименьших квадратов	Strouboulis T., Copps K., Babuska I.
Atomic radial basis functions method – ARBF (2004)	Метод атомарных радиальных базисных функций	Метод коллокации	Колодяжный В. М., Рвачев В. А.

Литература

1. *Gingold R. A.* Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non–spherical stars / R. A. Gingold, J. J. Monaghan // MNRAS. – 1977. – № 181. – P. 375–389.
2. *Monaghan J. J.* Smoothed particle hydrodynamics //Annual Reviews of Astronomy & Astrophysics. – 1992. – № 30. – P. 543–574.
3. *Блажевич Ю. В.* Моделирование высокоскоростного соударения методом гладких частиц / Ю. В. Блажевич, В. Д. Иванов, И. Б. Петров, И. В. Петвиашвили // Мат. моделирование.– 1999.– **11**, № 1. – С. 88–100.
4. *Shakib F.* A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: X. The Compressible Euler and Navier–Stokes Equations / F. Shakib, T. J. R. Hughes, Z. Johan// Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.. – 1991. – № 89. – P. 141–219.
5. *Moens D.* A survey of non–probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis / D. Moens, D. Vandepitte // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2005. – № 194(1). – P. 1527–1555.
6. *Jafari A.* Numerical investigation of blood flow. Part II: In capillaries / A. Jafari, P. Zamankhan, S. Mousavi, P. Kolari // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2009. –**14**, № 4. – P. 1396–1402.
7. *Kopacz A. M.* Simulation and prediction of endothelial cell adhesion modulated by molecular engineering / A. M. Kopacz, W. K. Li, S. Q. Liu // Comp. Math. Appl. Mech. Eng. – 2008. – **197**, № 25–28. – P. 2340–2352.
8. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
9. *Zerroukat M.* Explicit and implicit meshless methods for linear advection–diffusion type of partial differential equations / M. Zerroukat, K. Djidjeli, A. Charafi// Intern. J. Numerical Meth. Eng. – 2000. – № 48 (1). – P. 19–35.
10. *Ingber M. S.* A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving free–dimensional diffusion equations / M. S. Ingber, C. S. Chen, J. A. Tanski // Intern. J. Numerical Math. Eng. – 2004. – № 60. – P. 2183–2201.
11. *Chinchapatnam P. P.* Unsymmetric and symmetric meshless schemes for the unsteady convection–diffusion equation / P. P. Chinchapatnam, K. Djidjeli, P. B. Nair //Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2006. – № 195 (19–22). – P. 2432–2453.
12. *Atluri S. N.* A new meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics / S. N. Atluri, T. A. Zhu // Comp. Mech. – 1998. – № 22. – P. 117–127.\
13. *Богомолов С. В.* Метод частиц. Несжимаемая жидкость // Мат моделирование. – 2003. – **15**, № 1. – С. 46–58.
14. *Wu Y. L.* A meshfree formulation of local radial point interpolation method for incompressible flow simulation / Y. L. Wu, G. R. Liu // Comp. Mech. – 2003. – № 30. – P. 355–365.
15. *Kruger J.* A Particle System for Interactive Visualization of 3D Flows / J. Kruger, P. Kipfer, P. Kondratieva, R. Westermann A // IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics.– 2005.– № 6 (11). – P. 744–756.
16. *Nayroles B.* Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements / B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon // Comp. Mech. – 1992. – № 10 – P. 307–318.
17. *Hoover W. G.* Smooth Particle Applied Mechanics // World Scientific, Singapore, in preparation – 2005. – 316 p.
18. *Chen J. S.* Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of nonlinear structures / J. S. Chen, C. Pan, C. T. Wu, W. K. Liu // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1996. – № 139. – P. 195–227.
19. *Liu X.* Point interpolation collocation method for the solution of partial differential equations / X. Liu, K. Tau // Eng. analysis with boundary elements. – 2006. – № 3 (7). – P. 598–609.
20. *Lancaster P.* Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods / P. Lancaster, K. Salkauskas // Math. Comp. – 1981. – № 37. – P. 141–158.
21. *Babuska I.* The Partition of Unity Finite Element Method / I. Babuska, J. M. Melenk // Technical Report BN–11S5, Univ. of Maryland: Institute for Physical Science and Technology. – June 21, 1995.
22. *Arroyo M.* Local maximum–entropy approximation schemes: a seamless bridge between finite elements and meshfree methods / M. Arroyo, M. Ortiz // Intern. J. Numerical Meth. Eng. – 2006. – № 65 (13). – P. 2167–2202.
23. *Lucy L. B.* A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // The Astronomical J. – 1977. – № 12. – P. 1013–1024.

24. *Brackbill J. U.* FLIP: A Method for Adaptively Zoned, Particle–in–Cell Calculations of Fluid Flows in two Dimensions / J. U. Brackbill, H. M. Ruppel // J. Comp. Phys. – 1986. – № 65. – P. 314–343.
25. *Шевченко И. В.* Численное моделирование движения воздушных масс бессеточными методами // Мат. моделирование. – 2008. – **20**, № 10. – С. 75–85.
26. *Потапов А. П.* Моделирование волновых процессов методом сглаженных частиц (SPH) / А. П. Потапов, С. И. Ройз, И. Б. Петров// Мат. моделирование. – 2009. – **21**, № 7. – С. 20–28.
27. *Liszka T.* The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics / T. Liszka, J. Orkisz // Comput. Struct. – **11**. – 1980 – 83 p.
28. *Belytschko T.* Element–free Galerkin Methods / T. Belytschko, Y. Lu, L. Gu // Intern. J. Numerical Meth. Eng. – **37**. – 1994. – P. 229–256.
29. *Krysl P.* Analysis of Thin Shells by the Element–Free Galerkin Method / P. Krysl, T. Belytschko // Intern. J. of Solids and Structures. – 1996. – № 33 (20–22). – P. 3057–3080.
30. *Noguchi H.* Element Free Analyses of Shell and Spatial Structures / H. Noguchi, T. Miyamura // Fourth World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina, 1998.
31. *Liu W.* Reproducing Kernel Element Method, Part I Theoretical Formulation / W. Liu, W. Han, H. Lu, S. Li // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2004. – № 193. – P. 933–951.
32. *Gu Y. T.* A boundary point interpolation method for stress analysis of solid / Y. T. Gu, G. R. Liu // Comp. Mech. –2002. – № 28.– P. 47–54.
33. *Duarte C. A.* An *h–p* adaptive method using clouds / C. A. Duarte, J. T. Oden // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1996. – № 139. – P. 237–262.
34. *Yagawa G.* Some Remarks on Free Mesh Method: A Kind of Meshless Finite Element Method // Intern. Conf. on Comput. Sci. and Eng., Hawaii, USA, 1995.
35. *Chen W.* Relationship between boundary integral equation and radial basis function / W. Chen, M. Tanaka // JASCOME 57th BEM Conference Department of Mechanical Systems Engineering. Shinshu University, 30 september 2000.
36. *Li S.* Meshfree and Particle Methods and Their Applications / S. Li, W. K. Liu // Applied Mechanics Review. – 2002. – № 55. – P. 1–34.
37. *Liu G. R.* Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. – Boca Raton, USA: CRC press, 2003. – 712 p.

Поступила в редакцию
19.09.09