

УДК 519.8

**Т. А. Зайцева**, канд. техн. наук**О. О. Кузенков**Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара  
(м. Дніпропетровськ, E-mail: ztan2004@ukr.net; kuzenkov1986@mail.ru)**ЧИСЕЛЬНИЙ ТА ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ ТЕХНОГЕННОГО ВПЛИВУ  
МАШИНОБУДУВАННЯ НА НАВКОЛИШНЄ СЕРЕДОВИЩЕ**

*Побудована математична модель техногенного впливу на рівень неоднорідності популяцій фауни та флори, що подано у вигляді системи диференціальних рівнянь. Досліджені особливі точки та стаціонарні гіперплощини системи. Розглянуті біфуркаційні гіперплощини на дво- та тривимірних біфуркаційних діаграмах. Для квадратичних біфуркаційних кривих та гіперплощин ідентифікований тип. Розроблений програмний комплекс чисельного аналізу диференціальних моделей субпопуляційної динаміки.*

*Построена математическая модель техногенного воздействия на уровень неоднородности популяций фауны и флоры, которая представлена в виде системы дифференциальных уравнений. Исследованы особые точки и стационарные гиперплоскости системы. Рассмотрены бифуркационные гиперплоскости на двух- и трехмерных бифуркационных диаграммах. Для квадратичных бифуркационных кривых и гиперплоскостей идентифицирован тип. Разработан программный комплекс численного анализа дифференциальных моделей субпопуляционной динамики.*

Передові розробки у наш час спрямовані на модифікацію процесу виробництва таким чином, аби знизити його вплив на навколишнє середовище. Питанням екологічних аспектів в машинобудуванні присвячені роботи В. Н. Кислого, Е. В. Лапіна, Н. А. Трофименка [1], Л. Г. Мельника [2], В. М. Макарова [3] та ін. При дослідженні техногенного впливу машинобудівних підприємств найважливішими є умови якісних змін станів екосистеми [4]. Емпірично визначити межі, при яких змінюються динамічні характеристики системи, достатньо важко. Математичні методи, зокрема теорія стійкості [5, 6], дозволяють винайти умови при яких система втрачає стійкість. Ряд фундаментальних робіт О. М. Ляпунова [7] створили теоретичну базу для досліджень в області стійкості розв'язків систем. На її основі було створено ряд синергетичних методів, таких, як теорія катастроф та теорія біфуркацій, що висвітлені в роботах Т. Постона, І. Стюарта [8], В. І. Арнольда [9].

При розробці моделі техногенного впливу на рівень неоднорідності популяцій враховані такі фактори:

- несприятливі екологічні умови, що спровоковані безконтрольним використанням природних запасів корисних копалин, збільшенням рівня забруднення навколишнього середовища, безконтрольним зростанням обсягів виробничих та машинобудівних комплексів, головні цілі яких розташовані виключно в економічній, а не в екологічній площині, можуть призвести як до хвороби окремих особин тієї чи іншої популяції, так і до епідемії серед усіх її представників. Окрім цього, у деяких випадках такі процеси можуть призвести до незворотних змін серед деяких членів тієї чи іншої популяції, що, в свою чергу, призводить до збільшення рівня неоднорідності популяцій. Але виходячи з того, що такі зміни відбуваються поступово і у деяких випадках можуть зайняти десятиріччя, репродукція нащадків можлива між представниками різних утворених субпопуляцій. Тобто існує *ймовірність*, що нащадок деякої субпопуляції за своїми генними або фенотипічними властивостями не належатиме до батьківської.
- швидкість розмноження особин, якщо і не впливає на деякі якісні аспекти системи, то значним чином впливає на її чисельні характеристики. Тому запропоновано ввести до

розгляду коефіцієнт  $a_i$ , що позначатиме репродуктивні властивості  $i$ -ї субпопуляції.

- чисельні характеристики системи не можуть нескінченно зростати. Тому, застосовуючи логістичну складову, запропоновану Ферх'юльстом, обмежимо зростання чисельностей субпопуляцій, що трансформує фазову траєкторію у всюди гладку, обмежену інтегральну криву.

Загальний вигляд математичної моделі техногенного впливу на рівень неоднорідності популяцій та впливу на них результатів роботи промислових комплексів подано такою системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_i = (A_{i1} \cdot a_1 \cdot x_1 + A_{i2} \cdot a_2 \cdot x_2 + \dots + A_{in} \cdot a_n \cdot x_n) \cdot \left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{K}\right),$$

де  $A_{1k} + A_{2k} + \dots + A_{nk} = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $x_i$  – чисельність субпопуляції з індексом  $i$ ;  $a_i$  – репродуктивні можливості субпопуляції з індексом  $i$ ;  $n$  – розмірність задачі;  $K$  – максимальна кількість особин, що може існувати в ареалі;  $A_{ij} \in [0; 1]$  – показує, яка частина нащадків  $j$ -ї субпопуляції за своїми генними (фенотипічними) властивостями належатиме до  $i$ -ї субпопуляції. Аналітичний вигляд констант  $A_{ij}$  є таким:

$$A_{ii} = \begin{cases} 1, & \rho_\phi < \rho_d \\ \frac{\rho_d}{\rho_\phi}, & \rho_\phi \geq \rho_d. \end{cases}$$

У формулі, що наведена вище,  $\rho_\phi$  – це фактична концентрація шкідливих речовин на ареалі, а  $\rho_d$  – її допустимий рівень. Слід зазначити, що має місце така рівність:  $A_{1i} + A_{2i} + \dots + A_{(i-1)i} + A_{(i+1)i} + \dots + A_{ni} = (1 - A_{ii})$ . Здебільшого елементи  $A_{ij}$  при  $i \neq j$  визначаються не екологічними факторами, а структурою генної будови того чи іншого фенотипічного фактора [10].

Для всіх субпопуляцій коефіцієнт  $K$  є однаковим, що зумовлено саме однорідністю досліджуваних об'єктів за більшістю факторів. Для випадку  $n = 2$  система набуде такого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\lambda_1 \cdot a_1 \cdot x_1 + (1 - \lambda_2) \cdot a_2 \cdot x_2) \cdot \left(1 - \frac{x_1 + x_2}{K}\right) \\ \dot{x}_2 = (\lambda_2 \cdot a_2 \cdot x_2 + (1 - \lambda_1) \cdot a_1 \cdot x_1) \cdot \left(1 - \frac{x_1 + x_2}{K}\right). \end{cases} \quad (1)$$

В роботі [11] нами було досліджено якісні властивості моделі (1) в особливій точці, що знаходиться на початку координат, та на стаціонарній гіперплощині загального вигляду  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = K$ . Згідно з загальним виглядом інваріанта системи (1) [11] вона може перебувати в трьох біфуркаційних станах

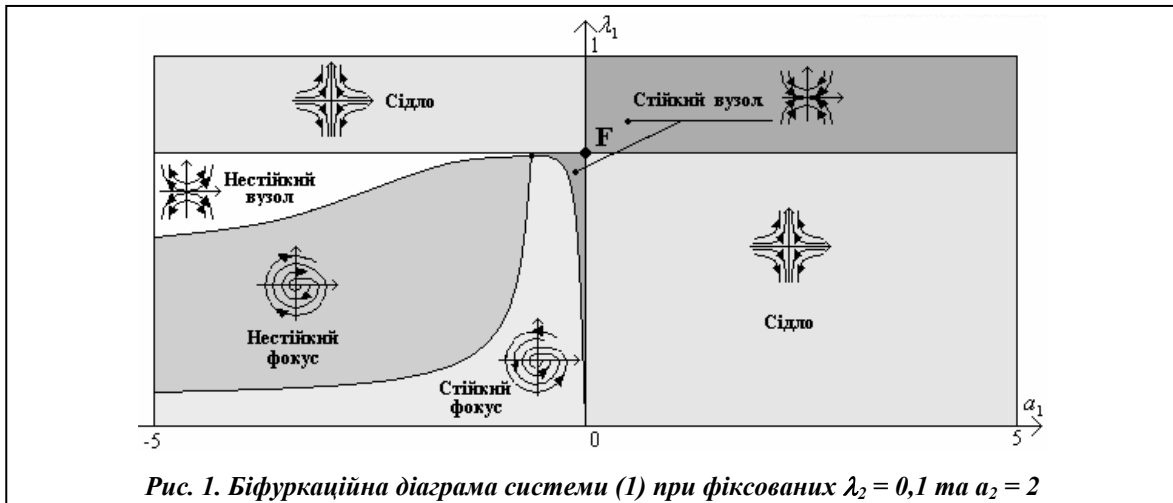


Рис. 1. Біфуркаційна діаграма системи (1) при фіксованих  $\lambda_2 = 0,1$  та  $a_2 = 2$

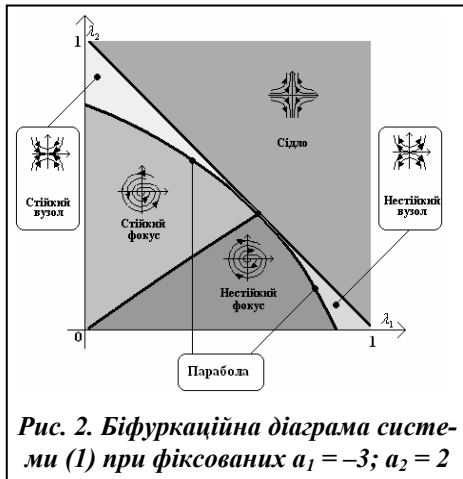


Рис. 2. Біфуркаційна діаграма системи (1) при фіксованих  $a_1 = -3$ ;  $a_2 = 2$

$$a_1 a_2 (\lambda_1 + \lambda_2 - 1) = 0, \quad (2)$$

$$a_1^2 \lambda_1^2 + 2a_1 a_2 \lambda_1 \lambda_2 + a_2^2 \lambda_2^2 - 4a_1 a_2 (\lambda_1 + \lambda_2 - 1) = 0, \quad (3)$$

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 = 0. \quad (4)$$

За умови, коли біфуркаційні криві є квадратичними, ідентифікуємо їх тип за відповідними інваріантами системи [12]. Канонічна форма кривої другого порядку має відомий вигляд

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0. \quad (5)$$

Відповідні інваріанти системи

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Коефіцієнти рівнянь (2)–(4) та відповідні інваріанти наведені в табл. 1–3.

Таблиця 1. Інваріанти та тип біфуркаційної кривої (2), зведеної до канонічного вигляду (5)

Поле	$b_{ij} \neq 0$	Значення	$I_2$	$I_3$	Тип кривої
$a_1:a_2$	$b_{12}$	$0,5(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)$	$-0,25(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)^2$	0	“Дві дійсні прямі, що перетинаються”
$\lambda_1:\lambda_2$	$b_{13}$	$0,5a_1a_2$	0	0	“Пара паралельних прямих”
	$b_{23}$	$0,5a_1a_2$			
	$b_{33}$	$-a_1a_2$			
$a_i:\lambda_{i(j)}$	$b_{12}$	$0,5a_j$	$-0,25 \cdot a_j^2$	0	“Дві дійсні прямі, що перетинаються” (рис. 1)
	$b_{13}$	$0,5(a_j \lambda_{j(i)} - a_j)$			

Біфуркація вигляду  $\text{Tr}(J) = 0$ , що відповідає переходу між стійким та нестійким фокусом, подана кривою другого порядку (див. табл. 3, поле  $a_i:\lambda_i$ ), а біфуркація  $\text{Tr}^2(J) - 4\text{Det}(J) = 0$ , що відповідає появи комплексних власних значень Якобіана системи. На біфуркаційній діаграмі системи (1), див. рис. 1, існує особлива точка  $M$ , в якій мають місце всі три біфуркації одночасно.

Таблиця 2. Інваріанти та тип біфуркаційної кривої (3), зведеної до канонічного вигляду (5)

Поле	$b_{ij} \neq 0$	Значення	$I_2$	$I_3$	Тип кривої
$a_1:a_2$	$b_{12}$	$\lambda_1 \lambda_2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2$	Знак не визначений	0	Прямі лінії
	$b_{11}$	$\lambda_1^2$			
	$b_{22}$	$\lambda_2^2$			
$\lambda_1:\lambda_2$	$b_{ii}$	$a_i^2$	0	$-4a_1^2 a_2^2 \times (a_1 - a_2)^2$	“Парабола” (рис. 2)
	$b_{12}$	$a_1 a_2$			
	$b_{13} = b_{23}$	$-a_1 a_2$			
$b_{33}$	$2a_1 a_2$				
$a_i:\lambda_i$	Крива четвертого порядку (рис. 1)				
$a_i:\lambda_j$	$b_{11}$	$\lambda_i^2$	$4a_j^2(\lambda_i - 1)$	$-4a_j^2(1 - \lambda_i)^2$	“Гіпербола” (рис. 3)
	$b_{12}$	$a_j \lambda_i - 2a_j$			
	$b_{13}$	$2a_j(1 - \lambda_i)$			
	$b_{22}$	$a_j^2$			

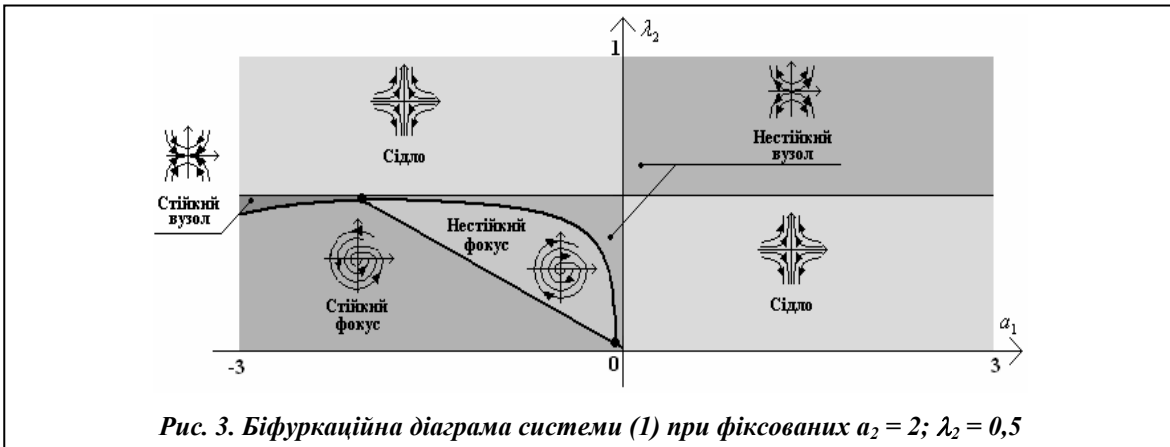


Рис. 3. Біфуркаційна діаграма системи (1) при фіксованих  $a_2 = 2; \lambda_2 = 0,5$

Аналітичний вигляд третьої біфуркації системи, типу “фокус–фокус” має вигляд:  $\text{Tr}(J) = 0$  за додатковою умовою  $\text{Det}(J) > 0$ . Рівняння  $\text{Tr}(J) = 0$  в позначеннях системи набуде вигляду (4).

Таблиця 3. Інваріанти та тип біфуркаційної кривої (4), зведеної до канонічного вигляду (5)

Поле	$b_{ij} \neq 0$	Значення	$I_2$	$I_3$	Тип кривої
$a_1:a_2$	$b_{13}$	$\lambda_1$	0	0	“Пара паралельних прямих”
	$b_{23}$	$\lambda_2$			
$\lambda_1:\lambda_2$	$b_{13}$	$a_1$	0	0	“Пара паралельних прямих”
	$b_{23}$	$a_2$			
$a_i:\lambda_i$	$b_{12}$	1	-1	$-0,25a_j\lambda_j$	“Гіпербола” (рис. 1)
	$b_{33}$	$a_j\lambda_j$			
$a_i:\lambda_j$	$b_{13}$	$\lambda_i$	0	0	“Пара паралельних прямих”
	$b_{23}$	$a_j$			

Загальне рівняння поверхні другого порядку має вигляд

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + 2b_{14}x + 2b_{24}y + 2b_{34}z + b_{44} = 0. \quad (6)$$

В табл. 4, 5 наведено інваріанти та типи біфуркаційних кривих (2), (4) системи (1) на тривимірних біфуркаційних діаграмах.

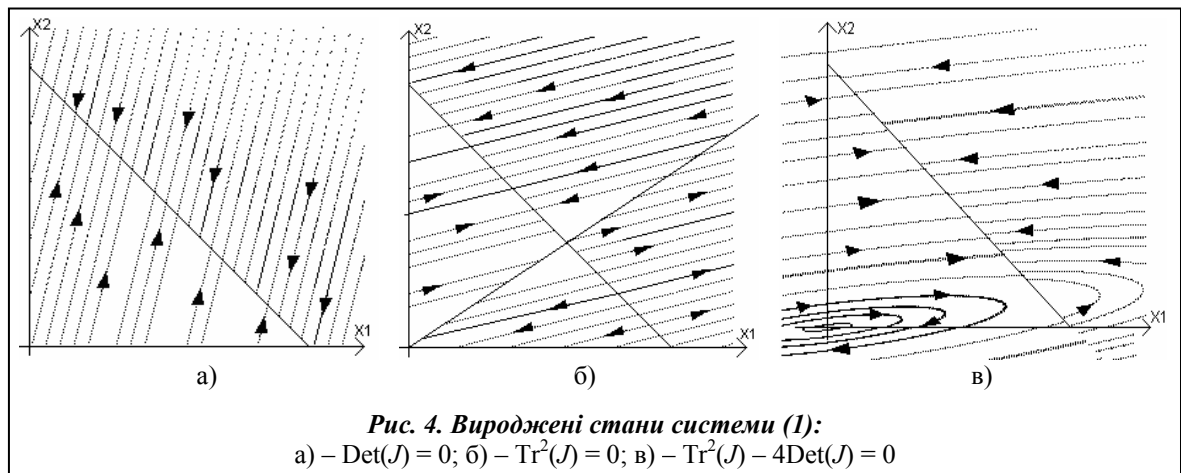
Таблиця 4. Інваріанти та тип біфуркаційної кривої (2), зведеної до канонічного вигляду (6)

Поле	$b_{ij} \neq 0$	Значення	$I_2$	$I_3$	$I_4$	Тип гіперплощини
$a_i:a_j:\lambda_i$	Поверхня третього порядку					
$a_i:\lambda_i:\lambda_j$	$b_{12} = b_{13} = b_{14}$	$0,5a_j$	$-0,5a_j^2$	0	0	“Гіперболічний циліндр”

Таблиця 5. Інваріанти біфуркаційної кривої (4) зведеної до канонічного вигляду (6)

Поле	$b_{ij} \neq 0$	Значення	$I_2$	$I_3$	$I_4$	Тип гіперплощини
$a_i:a_j:\lambda_i$	$b_{13}$	0,5	-0,25	0	$\lambda_j^2/16$	“Гіперболічний параболоїд”
	$b_{24}$	$0,5\lambda_j$				
$a_i:\lambda_i:\lambda_j$	$b_{12}$	0,5	-0,25	0	$a_j^2/16$	“Гіперболічний параболоїд”
	$b_{34}$	$0,5a_j$				

Ступінь нелінійності та топологія біфуркаційних гіперплощин на тривимірних біфуркаційних діаграмах достатньо різноманітна. Біфуркації (2)–(4) можуть мати однакову топологію при виконанні відповідних умов. Наприклад, на рис. 4 наведено біфуркаційні стани системи (1), два з яких (а, б) топологічно еквівалентні.



В роботі побудована модель техногенного впливу на рівень неоднорідності популяцій. Проведене дослідження особливих точок, регулярних стаціонарних ліній та гіперплощин системи. Досліджено питання щодо їх стійкості та особливостей топології. Проведений біфуркаційний аналіз моделі, встановлені три умови виникнення біфуркації в системі. Проведене дослідження щодо нелінійності та класифікації біфуркаційних кривих та гіперповерхонь на дво- та тривимірних біфуркаційних діаграмах відповідно. Для біфуркаційних кривих порядку два та вище наведені відповідні біфуркаційні діаграми. Розглянуті приклади вироджених станів фазового простору в околі початку координат при виконанні трьох можливих біфуркаційних умов. Розроблений спеціалізований програмний продукт чисельного дослідження динаміки субпопуляцій, основними функціями якого є побудова фазових портретів, біфуркаційних діаграм та розрахунок інваріантів системи у відповідних точках. Результати роботи можуть бути застосовані при дослідженні техногенного впливу машинобудування на навколишнє середовище, визначення критичних станів системи, вдосконалення старих та розробці нових синергетичних методів в екологічному питанні машинобудування.

### Література

1. Кислый В. Н. Экологизация управления предприятием / В. Н. Кислый, Е. В. Лапин, Н. А. Трофименко. – Сумы: Университетская книга, 2002. – 232 с.
2. Мельник Л. Г. Экономика развития : Учеб. пособие. – Сумы: Университетская книга, 2000. – 450 с.
3. Макаров В. М. Рациональное использование и очистка воды на машиностроительных предприятиях / В. М. Макаров, Ю. П. Беличенко, В. С. Галустов, А. И. Чуфаровский. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
4. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ ДАНА, 2000. – 367 с.
5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
6. Дубошин Г. Н. Основы устойчивости движения. – М.: МГУ, 1952. – 389 с.
7. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1953. – 426 с.
8. Постон Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. М. Стюарт. – Мир, 1980. – 608 с.
9. Арнольд В. И. Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
10. Кузенков О. О. Нелінійний аналіз внутрішньо-популяційної динаміки резус аглютиногену: Тези доп. – Л.: СНКПМІ-2008. – С 144–146.
11. Кузенков О. О. Чисельний аналіз динаміки гетерогенних популяцій / О. О. Кузенков, В. С. Чернишенко // Питання прикладної математики і математичного моделювання: Сб. науч. тр. – Дніпропетровськ, 2007. – С. 337–346.
12. Магницкий Н. А. Новые методы хаотической динамики / Н. А. Магницкий, С. В. Сидоров. – М.: Едиториал, 2004. – 320 с.

Поступила в редакцию  
02.09.09