УДК 621.313.32

ЧУМАК В.В., канд. техн. наук ,
ТИМОЩУК О.Л., канд. техн. наук ,
КУРІН І.М., студент, Національний Технічний Університет України "Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського", м. Київ

ОПТИМАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ОДНОФАЗНОГО КОНДЕНСАТОРНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГУНА ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

В даній статті запропоновано метод і розроблено програмний продукт для оптимального проектування електричних машин малої потужності, зокрема однофазного асинхронного конденсаторного двигуна. Результатом застосування розробленого програмного забезпечення є зменшення маси активних матеріалів спроектованого двигуна у порівнянні з базовим на 15 % при збереженні основних параметрів базового двигуна.

К л ю ч о в і   с л о в а: оптимальне проектування, однофазний асинхронний конденсаторний двигун, модифікований метод множників Лагранжа, метод штрафних функцій, метод допустимих напрямків, метод комплексів.

Електрична машина як об'єкт експлуатації має мати високі енергетичні показники: ККД та cos φ при мінімальних витратах, що дозволяє зменшити вклад матеріалів в енергетичний комплекс. Це гарантує зменшення рівня поточних затрат на експлуатацію машини та капітальні вклади споживача. Разом із тим сучасний етап розвитку народногосподарського комплексу України характеризується тимчасовим вагомим зниженням виробничих потужностей, технологічної бази і науково-технічного потенціалу в даній області. Зменшується кількість профільних електромеханічних виробництв, знижується рівень потреб багатьох видів електричних машин малої потужності у зв'язку із збільшенням імпортозаміщення. Постійний ріст цін на енергоносії потребує покращення енергетичних показників електричних машин, підвищення їх надійності та збільшення строку служби.

В наш час споживач диктує свої умови, тому вибір функції цілі для оптимального проектування визначається технічним завданням, яке видає саме споживач. Вибір методів має дозволяти швидко адаптувати функцію цілі до поставленої задачі. Найбільш важливою вимогою на виробництві є мінімальна матеріалоємність електричних машин і відповідно економія коштовної міді, електротехнічної сталі, алюмінію, ізоляції та інших конструкційних матеріалів.

Широка автоматизація проектних робіт в найближчі часи внесе суттєві зміни в процес проектування електричних машин. Також буде змінено підхід до навчального проектування. З метою запобігання зайвих втрат часу слід створювати системи автоматизованого проектування по типу САПР.

Нові умови потребують від інженерів-електромеханіків нових підходів до проектування та організації виробництва електричних машин, значно скорочуються терміни проектування і підготовки виробництва невеликих, але різноманітних модифікацій, серій електричних машин, зокрема асинхронних однофазних двигунів малої потужності. Різноманітність типів і модифікацій електричних машин суттєво зменшує можливості автоматизації виробництва і ставить на перший план технологічні можливості швидкого переходу до випуску малих серій електричних машин. В даній статті реалізовано підхід оптимального проектування за мінімумом використання активних матеріалів, а саме зменшення маси електротехнічної сталі.

На прикладі однофазного асинхронного конденсаторного двигуна представлені етапи оптимального проектування даного об'єкта і розглянуті основні проблеми, які виникають на етапі проектування технічної розробки системи. Слід зауважити, що оптимальне проектування є частиною технічної розробки системи, як це показано на Рис. 1.

З точки зору формалізації, оптимальне проектування електричних машин є частковим випадком багатопараметричного оптимального проектування. Об'єкт оптимізації - електричну машину — можна розглядати як систему функцій від змінних вхідних параметрів $X_1, X_2, ..., X_n$ і вихідної величини F. В загальному випадку така система

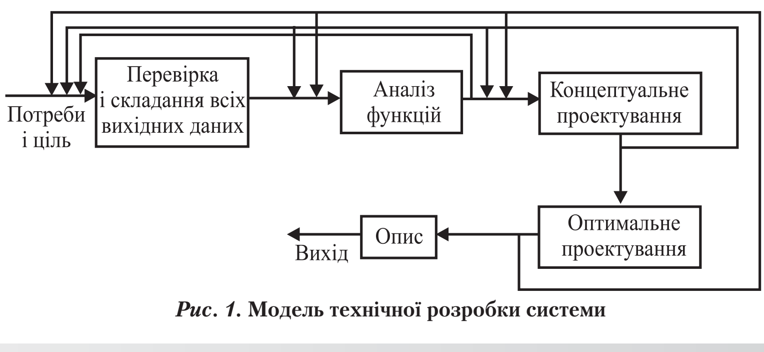

Рис. 1. **Модель технічної розробки системи**

має n змінних параметрів, які називаються незалежними змінними. Входом системи є n-мірний вектор $\overline{X}$ $=(X_1, X_2, ..., X_n)^T$, а вихід системи — функціонально залежна від стану незалежних змінних скалярна величина $F(\overline{X})$. Величина $F(\overline{X})$, характеризуюча степінь якості машини, яка проектується, отримала назву критерія оптимальності чи функції якості.

Як на вхідні параметри, так і на характеристики об'єкта оптимізації можуть бути накладені обмеження, які обумовлені потребами стандартів, технічних умов та інших нормативних документів. Ці обмеження, які залежать від вектора $\overline{X}$ можливо привести до виду $G_j(\overline{X}) \geq 0$, де $j = 1, 2, ... , m$.

При проектуванні однофазного асинхронного двигуна доцільно обмежитись сімома незалежними змінними: діаметром розточення статора, довжиною пакета статора, шириною зубця статора, шириною зубця ротора, висотою стінки статора, висотою стінки ротора та зовнішнім діаметром листа статора.

Контрольовані характеристики однофазного асинхронного двигуна — це регламентовані стандартами чи технічними умовами значення кратності пускового початкового моменту, кратності пускового початкового струму, кратності максимального моменту, перевищення температури обмотки статора, коефіцієнта заповнення пазу, коефіцієнта корисної дії та коефіцієнта потужності.

Критерієм оптимальності двигуна було взято масу електротехнічної сталі (F). Вона є сумою мас сталі спинок та зубців статора і ротора:

$$F = GAS + GAR + GZS + GZR,$$

де GAS — маса сталі спинки статора, кг; GAR — маса сталі спинки ротора, кг; GZS — маса сталі зубців статора, кг; GZR — маса сталі зубців ротора, кг.

Таким чином, була отримана така задача умовної нелінійної оптимізації:

$$F(\overline{X}) \rightarrow \min,$$

$$\tilde{G}_j(\overline{X}) \geq 0, j = 1, ..., m,$$

$$X_i \geq 0, i = 1, ..., n,$$

де $m = n = 7$; $\tilde{G}_j(\overline{X})$ — видозмінені функції обмежень: $\tilde{G}_j(\overline{X}) = G_j(\overline{X}) - b_j$ або $\tilde{G}_j(\overline{X}) = b_j - G_j(\overline{X})$; b_j — обмеження на технічні умови двигуна.

За допомогою побудованих алгоритмів в просторі R^n будується скінченна послідовність точок, яка починається із певної початкової точки і закінчується точкою, яка дає найкраще наближення до розв'язку задачі серед усіх точок побудованої послідовності. Обчислення функцій-обмежень та критерію оптимальності виконується шляхом багаторазового розрахунку, який детально описано в роботі [2].

Розв'язок даної задачі відбувався чотирма методами:

1) методом штрафних функцій;

2) модифікованим методом множників Лагранжа;

3) методом допустимих напрямків;

4) методом комплексів.

Був обраний модифікований метод множників Лагранжа, так як він виявився найбільш стійким, у порівнянні з методом комплексів, і не накопичував арифметичні помилки, у порівнянні з методами штрафних функцій та допустимих напрямків.

Розглянемо наступну ЗНП з обмеженнями у виді нерівностей:

$$f(\tilde{x}) \rightarrow \min,$$
$$g_j(\tilde{x}) \geq 0,\ j = 1, \dots, m.$$

Обмеження у виді нерівності $g_j(x) \geq 0$ називається активним в точці x, якщо $g_j(x) = 0$, і неактивним, якщо $g_j(x) > 0$.

Якщо існує можливість знайти обмеження, які неактивні в точці оптимума, до безпосереднього розв'язання задачі, то ці обмеження можна виключити з моделі і тим самим зменшити її розмірність. Основна складність полягає при цьому в ідентифікації неактивних обмежень, яка б передувала розв'язанню задачі.

Кун і Такер побудували необхідні та достатні умови оптимальності для задач нелінійного програмування, за припущенням, що f і g_j — диференційовані функції. Ці умови оптимальності, які відомі під назвою умови Куна-Такера, можна сформулювати у виді задачі знаходження розв'язку деякої системи нелінійних рівнянь і нерівностей, або, як іноді кажуть, задачі Куна-Такера.

Для задачі нелінійного програмування із обмеженнями у виді нерівностей, задача Куна-Такера виглядає так:

$$\nabla f(x) - \sum_{j=1}^{m} u_j \nabla g_j(x) = 0,$$
$$g_j(x) \geq 0,\ j = 1, \dots, m,$$
$$u_j g_j(x) = 0,\ j = 1, \dots, m,$$
$$u_j \geq 0,\ j = 1, \dots, m.$$

Тепер розглянемо строгі формулювання необхідних і достатніх умов оптимальності розв'язку задачі нелінійного програмування.

1. Нехай f і g_j — диференційовані функції, а x^* — допустимий розв'язок даної задачі. Покладемо $I = \{j \mid g_j(x^*) = 0\}$. Далі нехай $\nabla g_j(x^*)$ при $j \in I$ лінійно незалежні. Якщо x^* — оптимальний розв'язок задачі нелінійного програмування, то існує такий вектор u^*, що (x^*, u^*) є розв'язком задачі Куна-Такера (необхідна умова).

2. Нехай цільова функція f — опукла, усі обмеження у виді нерівностей — увігнуті функції g_j, $j = 1, ..., m$. Тоді, якщо існує розв'язок (x^*, u^*), який задовольняє умовам Куна-Такера, то x^* — оптимальний розв'язок задачі нелінійного програмування (достатня умова).

Для практичних задач умова лінійної незалежності, як правило, виконується. Якщо в задачі всі функції диференційовані, то точку Куна-Такера можна розглядати як можливу точку оптимума. Таким чином, багато методів нелінійного програмування збігаються саме до точки Куна-Такера.

Розглянемо функцію Лагранжа для задачі нелінійного програмування з обмеженнями у вигляді нерівностей:

$$L(x, u) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x)$$

Проблема в тому, що, використовуючи функцію Лагранжа, не можна мінімізувати її по x та u з метою отримання (x^*, u^*), оскільки вказаний вектор є не точкою мінімума функції L, а її стаціонарною точкою. Виявляється, що якщо певним чином модифікувати функцію Лагранжа, то отримана в результаті функція буде досягати свого мінімуму в точці Куна-Такера вихідної задачі. Розглянемо метод модифікованих множників Лагранжа, який також називається методом множників.

Розглянемо функцію

$$P(x,\sigma) - f(x) + R\sum_{j=1}^{m} (g_j(x) + \sigma_j)^2 - \sigma_j^2)$$

де R — постійний ваговий коефіцієнт; $\langle - \rangle$ — функція зрізання, яка має вид:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0, x \geq 0, \\ x, x > 0. \end{cases}$$

Параметри σ_j виконують зсув штрафних доданків. Даний зсув ітеративно уточнюється, в результаті чого процес збігається до розв'язку при не дуже жорстких обмеженнях на задачу. Початкова точка x^0 не обов'язково має бути допустимою, а початкове значення множників σ_j зручно брати 0.

Позначимо через x^t точку мінімума штрафної функції, яка використовується на t-й ітерації. При переході до $(t + 1)$-ї ітерації множники перераховуються за формулою:

$$\sigma_j^{t+1} = \left\langle g_j(x^t) + \sigma_j^t \right\rangle, j = 1, 2, ..., m.$$

Через наявність у формулі оператора зрізання вектор σ не має додатніх компонент. Кожен новий вектор σ^t визначає зсув аргументу відповідного штрафу, причому формула перерахунку така, що в результаті зміни зсуву при переході до нової під задачі штраф за порушення обмежень збільшується, і, як наслідок цього, стаціонарні точки x^t наближаються до допустимої області.

Для контролю збіжності методу використовують послідовності x^t, σ^t, $f(x^t)$ та $g(x^t)$. При цьому припускається, що алгоритм безумовної оптимізації, який використовується, кожний раз дозволяє знайти стаціонарну точку і після цього завершити ітерацію на основі певного критерію. Зупинка основного алгоритму відбувається тоді, коли хоча б одна з даних послідовностей перестає значно змінюватись при перерахунку множників і наступної безумовної оптимізації.

Градієнт штрафної функції в результаті безумовної оптимізації має в кінці стати нулем. Далі виконується перерахунок множників σ. Розглянемо величини σ^T і $g_j(x^T)$, вважаючи, що вони є границею відповідних послідовностей. Для існування граничних значень σ^T і $g_j(x^T)$ необхідно, щоб виконувались умови:

$$g_j(x^T) > 0 \text{ і } \sigma_j^T = 0, \text{ або } g_j(x^T) = 0 \text{ і } \sigma_j^T \leq 0 .$$

Записавши градієнт штрафної функції, отримаємо:

$$\nabla P(x^T) - \nabla f(x^T) + 2R\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^T \nabla g_j(x^T) = 0$$
$$g_j(x^T) \geq 0, \ j = 1, ..., m,$$
$$\sigma_j^T g_j(x^T) = 0, \ j = 1, ..., m,$$
$$\sigma_j^T \leq 0, \ j = 1, ..., m.$$

Легко побачити, що отримана задача представляє собою умови Куна-Такера для точки x^T. Таким чином, отримана гранична точка є точкою Куна-Такера.

Проте даний метод має і свої недоліки. Один із них полягає в тому, що елементи ітераційної послідовності x^t наближаються до x^*, майже завжди знаходячись поза допустимою зоною. Також до недоліків слід віднести і відсутність правил вибору параметра R.

Для оптимального проектування однофазного асинхронного двигуна було написано прикладний програмний продукт на мові програмування C# із зручним для користування інтерфейсом, на-

Рис. 2. **Головне вікно програми**

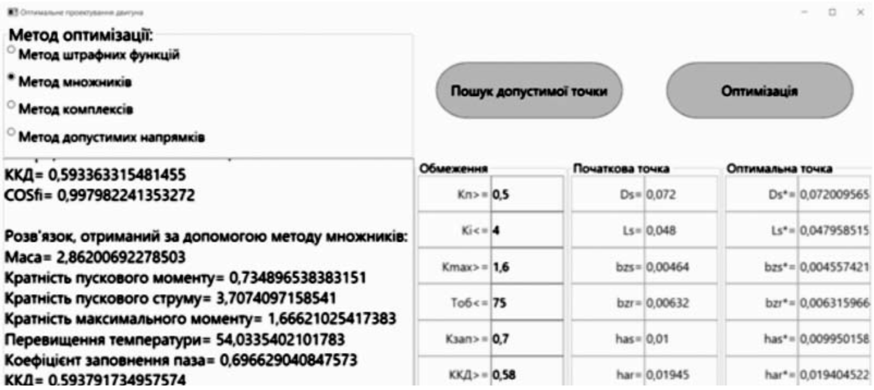

Рис. 3. **Результати розрахунку**

писаним за допомогою системи побудови клієнтських додатків Windows Presentation Foundation (WPF).

Вихідні дані для розрахунку конденсаторного двигуна:

1 - діаметр розточення статора (D_s) = 0,072 м;

2 - довжина пакета статора (L_s) = 0,048 м;

3 - ширина зубця статора (b_{zs}) = 0,00464 м;

4 - ширина зубця ротора (b_{zr}) = 0,00632 м;

5 - висота спинки статора (h_{as}) = 0,01 м;

6 - висота спинки ротора (h_{ar}) = 0,01945 м;

7- зовнішній діаметр листа статора (D_a) = 0,12 м.

Оптимальний результат розрахунку:

1 - діаметр розточення статора (D_s) = 0,072 м;

2 - довжина пакета статора (L_s) = 0,04796 м;

3 - ширина зубця статора (b_{zs}) = 0,00456 м;

4 - ширина зубця ротора (b_{zr}) = 0,00632 м;

5 - висота спинки статора (h_{as}) = 0,01 м;

6 - висота спинки ротора (h_{ar}) = 0,0194 м;

7 - зовнішній діаметр листа статора (D_a) = 0,12 м.

Висновки. Було розглянуто математичний підхід до оптимального проектування однофазного асинхронного конденсаторного двигуна. Завдяки сучасним електронно-обчислювальним машинам проектування електричного двигуна виконується в багато разів швидше, ніж було двадцять років тому. Таким чином даний підхід є адаптивним до змін технічного завдання споживача.

Було досліджено чотири методи оптимального проектування. На основі аналізу поставленої проблеми було обрано модифікований метод множників Лагранжа. На відміну від методів штрафних функцій, допустимих напрямків та комплексів, застосування запропонованого методу дозволяє отримати стійкий розв'язок при наявності великої кількості вхідних даних та нелінійних обмежень.

Було розроблено оригінальний програмний продукт, який написано на мові програмування C#, за допомогою якого проводилася оптимізація електричної машини, а саме, однофазного конденсаторного асинхронного двигуна з наступними характеристиками:

- номінальна потужність P_H=250 Вт;
- номінальна напруга U_H=220 В;
- номінальний струм I_H=1,95 А;
- номінальна частота обертання n_H=1386 об/хв;
- ККД η = 59,38 %;
- коефіцієнт потужності cos φ = 0,9979;
- кратність пускового моменту $K_П$ = 0,7349;
- кратність максимального моменту K_M = 1,67;
- кратність пускового струму K_I = 3,7.

При порівнянні показників базового двигуна з отриманим, вдалося зменшити масу активних матеріалів на 15 %.

ЛІТЕРАТУРА.

1. *Семенчуков Г.А., Сентюрихин Н.И., Меренков Д.В., Машкин В.Г.* Теория и методы автоматизированного проектирования серий и параметрических рядов асинхронных двигателей малой мощности // Электричество. —2007. — № 10. — С. 33—36.

2. *Лопухина Е.М., Семенчуков Г.А.* Проектирование асинхронных микродвигателей с применением ЭВМ. — Москва: Высшая школа, 1980.

3. *Struchenkov V.I.* Combined Algorithms of Optimal Resource Allocation // Applied Mathematics, 2012. — № 3.