doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.03.043
УДК 539.3

Л.П. Хорошун, О.И. Левчук

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: lkhoroshun@ukr.net

К основам нелинейной теории электроупругости

Представлено членом-кореспондентом НАН України Л.П. Хорошуном

Предложен новый принцип построения нелинейной теории связанных процессов электроупругости. Теория базируется на уравнениях двухконтинуумной механики диэлектриков как смеси положительных и отрицательных зарядов, попарно связанных в нейтральные молекулы или элементарные ячейки. Принимается существование упругого потенциала и линейно-квадратичной зависимости парциальных напряжений от разности перемещений зарядов. Исходя из определения вектора поляризации и порождаемого им электрического поля, нелинейные уравнения двухконтинуумной механики преобразуются в уравнения электроупругости, описывающие эффекты пьезоэлектричества и электрострикции.

Ключевые слова*: диэлектрик, электроупругость, двухконтинуумная механика, пьезоэлектрик, электрострикация, вектор поляризации.*

Применение в многочисленных приборах и установках электромеханических преобразователей, в основу которых положены пьезоэффект и эффект электрострикции, требует дальнейшего более глубокого изучения и адекватного описания закономерностей электромеханического взаимодействия. Существующая теория электроупругости [1, 2] описывает электромеханическое взаимодействие на основе уравнений статики или динамики упругого тела, уравнениях электростатики (акустическое приближение) и уравнениях состояния, связывающих тензор напряжений и вектор электрической индукции с тензором деформаций и вектором напряженности электрического поля. При этом принимается, что внутренняя энергия является функцией деформаций и электрической индукции.

Акустическое приближение не позволяет описать связанные акустические и электромагнитные динамические процессы. Кроме того, электрическая индукция [3] представляет собой заданное электрическое поле свободных зарядов независимо от нахождения в нем диэлектрика, поэтому предположение о зависимости внутренней энергии от этого поля не представляется обоснованным. Устранение этих недостатков возможно на основе двухконтинуумной механики диэлектриков как смеси положительных и отрицательных зарядов, попарно связанных в нейтральные молекулы или элементарные ячейки [4]. В настоящей работе эта теория обобщается на случай нелинейной электроупругости, связанной с эффектом электрострикции [5].

Нелинейные уравнения двухконтинуумной механики диэлектриков. Рассмотрим элементарный макрообъем диэлектрика, представляющего собой совокупность взаимодействующих нейтральных молекул или элементарных ячеек [6], каждая из которых состоит из двух связанных частей — носителей положительного q и отрицательного $-q$ зарядов или просто зарядов. В начальном состоянии плотности носителей положительных n_{10} и отрицательных n_{20} зарядов совпадают и равны числу N молекул или элементарных ячеек в единице макрообъема, т.е. $n_{10} = n_{20} = N$. Текущие значения плотностей носителей зарядов n_1, n_2 удовлетворяют уравнениям баланса

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + (n_1 \dot{u}_i^1)_{,i} = 0, \quad \frac{\partial n_2}{\partial t} + (n_2 \dot{u}_i^2)_{,i} = 0, \tag{1}$$

где $\dot{u}_i^1, \dot{u}_i^2$ — векторы скоростей соответственно положительных и отрицательных зарядов, относящиеся к элементарному макрообъему, точка сверху обозначает субстанциональную производную по времени

$$\dot{u}_i^1 \equiv \frac{d_1 u_i^1}{dt} = \frac{\partial u_i^1}{\partial t} + u_{i,n}^1 \dot{u}_n^1, \quad \dot{u}_i^2 \equiv \frac{d_2 u_i^2}{dt} = \frac{\partial u_i^2}{\partial t} + u_{i,n}^2 \dot{u}_n^2. \tag{2}$$

Умножая уравнения (1) соответственно на массы положительного и отрицательного зарядов m_1, m_2, получим уравнения сохранения массы

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\rho_1 \dot{u}_i^1)_{,i} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + (\rho_2 \dot{u}_i^2)_{,i} = 0, \tag{3}$$

где $\rho_1 = n_1 m_1$, $\rho_2 = n_2 m_2$ — плотности массы соответственно положительных и отрицательных зарядов.

По аналогии с теорией механических смесей [7] введем парциальные напряжения $\sigma_{ij}^1, \sigma_{ij}^2$ как составляющие равнодействующей сил, действующих соответственно на положительные и отрицательные заряды площадки диэлектрика, отнесенные к размеру площадки. Тогда уравнения сохранения импульса положительных и отрицательных зарядов, отнесенные к элементарному макрообъему диэлектрика, можно представить в виде

$$\rho_1 \ddot{u}_i^1 = \sigma_{ij,j}^1 + R_i + F_i^1, \quad \rho_2 \ddot{u}_i^2 = \sigma_{ij,j}^2 - R_i + F_i^2, \tag{4}$$

где R_i — результирующая сила взаимодействия между положительными и отрицательными зарядами, отнесенная к элементарному макрообъему; F_i^1, F_i^2 — внешние объемные силы, действующие на соответствующие заряды; $\ddot{u}_i^1, \ddot{u}_i^2$ — субстациональные производные по времени от скоростей

$$\ddot{u}_i^1 \equiv \frac{d_1 \dot{u}_i^1}{dt} = \frac{\partial \dot{u}_i^1}{\partial t} + \dot{u}_{i,n}^1 \dot{u}_n^1, \quad \ddot{u}_i^2 \equiv \frac{d_2 \dot{u}_i^2}{dt} = \frac{\partial \dot{u}_i^2}{\partial t} + \dot{u}_{i,n}^2 \dot{u}_n^2. \tag{5}$$

Балансовые уравнения (3), (4) необходимо дополнить уравнениями состояния, связывающими динамические и кинематические параметры. Будем считать диэлектрик идеально упругим. По аналогии с классической теорией упругости [8] находим

$$\int_V (\dot{T} + \dot{U}) dV = \int_V (F_i^1 \dot{u}_i^1 + F_i^2 \dot{u}_i^2) dV + \int_S (\sigma_{ij}^1 n_j \dot{u}_i^1 + \sigma_{ij}^2 n_j \dot{u}_i^2) dS, \tag{6}$$

где n_j — направляющие косинусы нормали к поверхности S, а кинетическая энергия T и скорость приращения внутренней энергии $\dot{U}$ определяются формулами

$$T=\frac{1}{2}(\rho_1\dot{u}_i^1\dot{u}_i^1+\rho_2\dot{u}_i^2\dot{u}_i^2),\quad \dot{U}=\sigma_{ij}^1\dot{\varepsilon}_{ij}^1+\sigma_{ij}^2\dot{\varepsilon}_{ij}^2-R_i(\dot{u}_i^1-\dot{u}_i^2),\ \ \varepsilon_{ij}^k=\frac{1}{2}(u_{i,j}^k+u_{j,i}^k)\quad (k=1,2). \tag{7}$$

Отсюда следует, что внутренняя энергия U является функцией кинематических параметров $\varepsilon_{ij}^1,\varepsilon_{ij}^2,u_i^1-u_i^2$, а динамические параметры $\sigma_{ij}^1,\sigma_{ij}^2,R_i$ определяются производными

$$\sigma_{ij}^1=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}^1},\quad \sigma_{ij}^2=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}^2},\quad R_i=-\frac{\partial U}{\partial(u_i^1-u_i^2)}. \tag{8}$$

Если принять зависимость внутренней энергии от кинематических параметров в виде

$$U=\frac{1}{2}\lambda_{ijmn}^{11}\varepsilon_{ij}^1\varepsilon_{mn}^1+\lambda_{ijmn}^{12}\varepsilon_{ij}^1\varepsilon_{mn}^2+\frac{1}{2}\lambda_{ijmn}^{22}\varepsilon_{ij}^2\varepsilon_{mn}^2+h_{mij}^1\varepsilon_{ij}^1(u_m^1-u_m^2)+$$
$$+h_{mij}^2\varepsilon_{ij}^2(u_m^1-u_m^2)+\frac{1}{2}\kappa_{ij}(u_i^1-u_i^2)(u_j^1-u_j^2)-\frac{1}{2}h_{mnij}^1\varepsilon_{ij}^1(u_m^1-u_m^2)(u_n^1-u_n^2)-$$
$$-\frac{1}{2}h_{mnij}^2\varepsilon_{ij}^2(u_m^1-u_m^2)(u_n^1-u_n^2) \tag{9}$$

и ввести замену

$$u_i^1=u_i+u_i',\quad u_i^2=u_i-u_i',\quad \sigma_{ij}=\sigma_{ij}^1+\sigma_{ij}^2,\quad \sigma_{ij}'=\sigma_{ij}^1-\sigma_{ij}^2, \tag{10}$$

то уравнения (3), (4) и выражения (7)—(9) преобразуются соответственно к виду

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho\dot{u}_i+\rho'\dot{u}_i')_{,i}=0,\quad \frac{\partial\rho'}{\partial t}+(\rho'\dot{u}_i+\rho\dot{u}_i')_{,i}=0, \tag{11}$$

$$\rho\ddot{u}_i+\rho'\ddot{u}_i'=\sigma_{ij,j}+F_i,\quad \rho'\ddot{u}_i+\rho\ddot{u}_i'=\sigma_{ij,j}'+2R_i+F_i', \tag{12}$$

$$T=\frac{1}{2}\rho(\dot{u}_i\dot{u}_i+\dot{u}_i'\dot{u}_i')+\rho'\dot{u}_i\dot{u}_i',\quad U=\frac{1}{2}\overset{*}{\lambda}_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}+\bar{\lambda}_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}'+\frac{1}{2}\lambda_{ijmn}\varepsilon_{ij}'\varepsilon_{mn}'+$$
$$+\overset{*}{h}_{mij}\varepsilon_{ij}u_m'+h_{mij}'\varepsilon_{ij}'u_m'+2\kappa_{ij}u_i'u_j'-\overset{*}{h}_{mnij}\varepsilon_{ij}u_m'u_n'-h_{mnij}'\varepsilon_{ij}'u_m'u_n'; \tag{13}$$

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}}=\overset{*}{\lambda}_{ijmn}\varepsilon_{mn}+\bar{\lambda}_{ijmn}\varepsilon_{mn}'+\overset{*}{h}_{mij}u_m'-\overset{*}{h}_{mnij}u_m'u_n',$$
$$\sigma_{ij}'=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}'}=\bar{\lambda}_{mnij}\varepsilon_{mn}+\lambda_{ijmn}\varepsilon_{mn}'+h_{mij}'u_m'-h_{mnij}'u_m'u_n',$$
$$2R_i=-\frac{\partial U}{\partial u_i'}=-4\kappa_{ij}u_j'-\overset{*}{h}_{imn}\varepsilon_{mn}-h_{imn}'\varepsilon_{mn}'+2\overset{*}{h}_{ijmn}u_j'\varepsilon_{mn}+2h_{ijmn}'u_j'\varepsilon_{mn}', \tag{14}$$

где введены обозначения

$$\ddot{u}_i=\frac{\partial\dot{u}_i}{\partial t}+\dot{u}_{i,n}\dot{u}_n+\dot{u}_{i,n}'\dot{u}_n',\qquad \ddot{u}_i'=\frac{\partial\dot{u}_i'}{\partial t}+\dot{u}_{i,n}\dot{u}_n'+\dot{u}_{i,n}'\dot{u}_n,$$
$$\dot{u}_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_{i,n}\dot{u}_n+u_{i,n}'\dot{u}_n',\qquad \dot{u}_i'=\frac{\partial u_i'}{\partial t}+u_{i,n}\dot{u}_n'+u_{i,n}'\dot{u}_n,$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(u'_{i,j} + u'_{j,i}), \quad F_i = F_i^1 + F_i^2, \quad F'_i = F_i^1 - F_i^2,$$

$$\lambda^*_{ijmn} = \lambda^{11}_{ijmn} + \lambda^{21}_{ijmn} + 2\lambda^{12}_{ijmn}, \quad \bar{\lambda}_{ijmn} = \lambda^{11}_{ijmn} - \lambda^{22}_{ijmn},$$

$$\lambda_{ijmn} = \lambda^{11}_{ijmn} + \lambda^{22}_{ijmn} - 2\lambda^{12}_{ijmn}, \quad h^*_{imn} = 2(h^1_{imn} + h^2_{imn}),$$

$$h'_{imn} = 2(h^1_{imn} - h^2_{imn}), \quad h^*_{ijmn} = 2(h^1_{ijmn} + h^2_{ijmn}), \quad h'_{ijmn} = 2(h^1_{ijmn} - h^2_{ijmn}),$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho' = \rho_1 - \rho_2, \tag{15}$$

Подставляя (14) в (12), приходим к системе связанных динамических уравнений относительно перемещений нейтральных молекул

$$u_i = \frac{1}{2}(u_i^1 + u_i^2)$$

и половины взаимных смещений

$$u'_i = \frac{1}{2}(u_i^1 - u_i^2)$$

положительных и отрицательных зарядов

$$\rho\ddot{u}_i + \rho'\ddot{u}'_i = \lambda^*_{ijmn} u_{m,nj} + \bar{\lambda}_{ijmn} u'_{m,nj} + h^*_{mnij} u'_{m,j} - h^*_{mnij}(u'_m u'_n)_{,j} + F_i,$$

$$\rho'\ddot{u}_i + \rho\ddot{u}'_i = \bar{\lambda}_{mnij} u_{m,nj} + \lambda_{ijmn} u'_{m,nj} - h^*_{imn} u_{m,n} + h_{mij} u'_{m,j} - 4\kappa_{ij} u'_j + 2h^*_{ijmn} u'_j u_{m,n} +$$

$$+ 2h_{ijmn} u'_j u'_{m,n} + F'_i \quad (h_{mij} = h'_{mij} - h'_{imj}, \quad h_{ijmn} = h'_{ijmn} - h'_{jmin}). \tag{16}$$

Для изотропных диэлектриков уравнения (16) принимают вид

$$\rho\ddot{u}_i + \rho'\ddot{u}'_i = \mu^* u_{i,rr} + (\lambda^* + \mu^*) u_{r,ri} + \bar{\mu} u'_{i,rr} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) u'_{r,ri} - h^*(u'_n u'_n)_{,i} - 2l^*(u'_i u'_n)_{,n} + F_i,$$

$$\rho'\ddot{u}_i + \rho\ddot{u}'_i = \bar{\mu} u_{i,rr} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) u_{r,ri} + \mu u'_{i,rr} + (\lambda + \mu) u'_{r,ri} - 4\kappa u'_i + 2h^* u'_i u_{n,n} +$$

$$+ 2l^* u'_n (u_{i,n} + u_{n,i}) + 2(h' - l')(u'_i u'_{n,n} - u'_n u'_{n,i}) + F'_i, \tag{17}$$

где $\lambda^*, \mu^*, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \lambda, \mu, h^*, l^*, h, l, \kappa$ — постоянные материала.

Полученные уравнения можно упростить, если не детализировать структуру атома, молекулы или элементарной ячейки, а считать, что заряды симметричны, т.е. материальные тензоры не зависят от перестановки зарядов местами. В этом случае следует положить $\lambda^{11}_{ijmn} = \lambda^{22}_{ijmn}$, $h^1_{ijmn} = h^2_{ijmn}$, $h^1_{imn} = h^2_{imn}$, что приводит к равенствам $\bar{\lambda}_{ijmn} = 0$, $h'_{ijmn} = 0$, $h'_{imn} = 0$. В результате определяющие уравнения (14), а также динамические уравнения в перемещениях (16), (17), соответственно упрощаются

$$\sigma_{ij} = \lambda^*_{ijmn} \varepsilon_{mn} + h^*_{mij} u'_m - h^*_{mnij} u'_m u'_n,$$

$$\sigma'_{ij} = \lambda_{ijmn} \varepsilon'_{mn},$$

$$2R_i = -4\kappa_{ij} u'_j - h^*_{imn} \varepsilon_{mn} + 2h^*_{ijmn} u'_j \varepsilon_{mn}, \tag{18}$$

$$\rho\ddot{u}_i + \rho'\ddot{u}'_i = \lambda^*_{ijmn} u_{m,nj} + h^*_{mij} u'_{m,j} - h^*_{mnij}(u'_m u'_n)_{,j} + F_i\,,$$

$$\rho'\ddot{u}_i + \rho\ddot{u}'_i = \lambda_{ijmn} u'_{m,nj} - h^*_{imn} u_{m,n} - 4\kappa_{ij} u'_j + 2h^*_{ijmn} u'_j u_{m,n} + F'_i\,; \tag{19}$$

$$\rho\ddot{u}_i + \rho'\ddot{u}'_i = \mu^* u_{i,rr} + (\lambda^* + \mu^*) u_{r,ri} - h^*(u'_n u'_n)_{,i} - 2l^*(u'_i u'_n)_{,n} + F_i\,,$$

$$\rho'\ddot{u}_i + \rho\ddot{u}'_i = \mu u_{i,rr} + (\lambda + \mu) u'_{r,ri} - 4\kappa u'_i + 2h^* u'_i u_{n,n} + 2l^* u'_n(u_{i,n} + u_{n,i}) + F'_i\,. \tag{20}$$

Из уравнений (20) для изотропного упругого диэлектрика следует, как предельный случай, уравнения для идеально жидкого или газообразного диэлектрика. Для этого необходимо положить $\mu^* = 0, \quad l^* = 0$, в результате чего будем иметь

$$\rho\ddot{u}_i + \rho'\ddot{u}'_i = -p_{,i} + F_i \quad (p = p_0 - \lambda^* u_{r,r} + h^* u'_n u'_n)\,,$$

$$\rho'\ddot{u}_i + \rho\ddot{u}'_i = \mu u'_{i,rr} + (\lambda + \mu) u'_{r,ri} - 4\kappa u'_i + 2h^* u'_i u_{n,n} + F'_i\,, \tag{21}$$

где p, p_0 — давление соответственно в возмущенном и покоящемся жидком диэлектрике.

Переход к связанным уравнениям механики и электричества. Умножим уравнения баланса плотностей носителей зарядов (1) соответственно на заряды $q, -q$ и сложим. В результате с учетом (10) получим закон сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + I_{i,i} = 0, \tag{22}$$

где обозначено

$$\rho_e = (n_1 - n_2) q, \quad I_i = I_i^{кон} + I_i^{пол}, \quad I_i^{кон} = \rho_e \dot{u}_i, \quad I_i^{пол} = (n_1 + n_2) q \dot{u}'_i, \tag{23}$$

где ρ_e — плотность поляризационных или связанных зарядов, являющаяся полной плотностью ввиду отсутствия свободных зарядов; $I_i^{\text{кон}}$ — конвекционный ток, обусловленный перемещением поляризационных зарядов; $I_i^{\text{пол}}$ — ток поляризации или скорость поляризации.

Если принять, что в начальный момент времени плотности носителей связанных зарядов совпадают $(n_{10} = n_{20} = N)$, то, интегрируя уравнение (22) по времени, в линейном приближении получим известное уравнение

$$\rho_e + P_{i,i} = 0, \tag{24}$$

где вектор поляризации P_i определяется формулой

$$P_i = 2Nqu'_i. \tag{25}$$

Плотность поляризационных электрических зарядов ρ_e порождает электрическое поле E_i, которое, согласно теореме Гаусса [3, 6], определяется в вакууме формулой

$$E_{i,i} = 4\pi k \rho_e \tag{26}$$

где

$$k = 1 \quad \text{и} \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

соответственно в системах СГС и СИ. Подставляя (24) в (26), приходим к уравнению

$$(E_i + 4\pi k P_i)_{,i} = 0\,, \tag{27}$$

решение которого в общем случае имеет вид

$$E_i = -4\pi k P_i . \tag{28}$$

Поляризация, порождаемая взаимным смещением связанных зарядов, может быть вызвана различными факторами – внешним электрическим полем или полем свободных зарядов, инерционными силами, деформациями диэлектрика, изменением температуры. Если предположить, что диэлектрик находится во внешнем статическом электрическом поле $E_i^{\text{в}}$, связанным с некоторой плотностью свободных электрических зарядов $\rho_e^{\text{в}}$ согласно теореме Гаусса

$$E_{i,i}^{\text{в}} = 4\pi\rho_e^{\text{в}}, \tag{29}$$

а другие факторы, вызывающие поляризацию отсутствуют, то, согласно опытному закону [3, 6], вектор поляризации единицы объема определяется формулами

$$P_i = \beta E_i^*, \quad P_i = \varepsilon_0 \beta E_i^*, \ (E_i^* = E_i^{\text{в}} + E_i) \tag{30}$$

соответственно в системах СГС и СИ, где β — поляризуемость или электрическая восприимчивость единицы объема диэлектрика. Тогда из (28)—(30) следует известное уравнение для вектора D_i так называемой электрической индукции, имеющее в системах СГС и СИ соответственно вид

$$D_{i,i} = 4\pi\rho_e^{\text{в}} \quad (D_i = E_i^* + 4\pi P_i = \chi E_i^*, \quad \chi = 1 + 4\pi\beta), \tag{31}$$

$$D_{i,i} = \rho_e^{\text{в}} \quad (D_i = \varepsilon_0 E_i^* + P_i = \varepsilon_0 \chi E_i^*, \quad \chi = 1 + \beta), \tag{32}$$

где χ — диэлектрическая проницаемость.

Как видим, согласно (28)—(32), имеют место равенства

$$D_i = E_i^{\text{в}}, \quad D_i = \varepsilon_0 E_i^{\text{в}} \tag{33}$$

соответственно в системах СГС и СИ, т.е. вектор электрической индукции [3] — это просто заданная напряженность внешнего электрического поля или пропорциональная ему величина.

Если в диэлектрике происходят динамические процессы, то на связанные заряды действуют также инерционные силы, в результате чего перестают быть справедливыми соотношения (30)—(32). В этом случае для определения вектора поляризации P_i или порождаемого им, согласно (28), электрического поля E_i необходимо строить динамические уравнения

На основе соотношений (25), (28) находим

$$u_i' = \frac{1}{2Nq} P_i = -\nu E_i \quad \left(\nu = \frac{1}{8\pi k N q} \right). \tag{34}$$

Объемные силы F_i^1, F_i^2 представим в виде суммы механических и пондеромоторных составляющих, обусловленных электрическим полем, т.е.

$$F_i^1 = \overline{F}_i^1 + \overline{\overline{F}}_i^1, \quad F_i^2 = \overline{F}_i^2 + \overline{\overline{F}}_i^2, \ \overline{\overline{F}}_i^1 = -\overline{\overline{F}}_i^2 = Nqk(E_i + E_i^{\text{в}}), \tag{35}$$

где $E_i^{\text{в}}$ — заданная напряженность внешнего электрического поля. Тогда, приняв $\overline{F}_i^1 = \overline{F}_i^2$, согласно (15), имеем

$$F_i = \overline{F}_i^1 + \overline{F}_i^2, \quad F_i' = \overline{\overline{F}}_i' = 2Nqk(E_i + E_i^{\text{в}}). \tag{36}$$

Подставляя (34)—(36) в (13), (18)—(21), получим выражения кинетической и внутренней энергии

$$T = \frac{1}{2}\rho(\dot{u}_i\dot{u}_i + \nu^2\dot{E}_i\dot{E}_i) - \nu\rho'\dot{u}_i\dot{E}_i, \quad U = \frac{1}{2}\lambda_{ijmn}^*\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + \frac{1}{2}\nu^2\lambda_{ijmn}E_{ij}E_{mn} -$$

$$-\nu h_{mij}^*\varepsilon_{ij}E_m + 2\nu^2\kappa_{ij}E_iE_j - \nu^2 h_{mnij}^*\varepsilon_{ij}E_mE_n \quad \left(E_{ij} = \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i})\right), \tag{37}$$

уравнения состояния

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn}^*\varepsilon_{mn} - \nu h_{mij}^*E_m - \nu^2 h_{mnij}^*E_mE_n,$$

$$\sigma_{ij}' = -\nu\lambda_{ijmn}E_{mn},$$

$$2R_i = 4\nu\kappa_{ij}E_j - h_{imn}^*\varepsilon_{mn} - 2\nu h_{ijmn}^*E_j\varepsilon_{mn}, \tag{38}$$

динамические нелинейные уравнения электроупругости соответственно для анизотропного и изотропного диэлектриков

$$\rho\ddot{u}_i - \nu\rho'\ddot{E}_i = \lambda_{ijmn}^*u_{m,nj} - \nu h_{mij}^*E_{m,j} - \nu^2 h_{mnij}^*(E_mE_n)_{,j} + F_i,$$

$$\rho'\ddot{u}_i - \nu\rho\ddot{E}_i = -h_{imn}^*u_{m,n} - \nu(\lambda_{ijmn}E_{m,nj} - 4\kappa_{ij}^*E_j + 2h_{ijmn}^*E_ju_{m,n}) + 2NqkE_i^{\text{в}}, \tag{39}$$

$$\rho\ddot{u}_i - \nu\rho'\ddot{E}_i = \mu^*u_{i,rr} + (\lambda^* + \mu^*)u_{r,ri} - \nu^2[h^*(E_nE_n)_{,i} + 2l^*(E_iE_n)_{,n}] + F_i,$$

$$\rho'\ddot{u}_i - \nu\rho\ddot{E}_i = -\nu[\mu E_{i,rr} + (\lambda + \mu)E_{r,ri} - 4\kappa^*E_i + 2h^*E_iu_{n,n} + 2l^*E_n(u_{i,n} + u_{n,i})] + 2NqkE_i^{\text{в}}, \tag{40}$$

а также уравнения электрогидромеханики для идеально жидкого диэлектрика

$$\rho\ddot{u}_i - \nu\rho'\ddot{E}_i = -p_{,i} + F_i \quad (p = p_0 - \lambda^*u_{r,r} + \nu^2 h^*E_nE_n),$$

$$\rho'\ddot{u}_i - \nu\rho\ddot{E}_i = -\nu[\mu E_{i,rr} + (\lambda + \mu)E_{r,ri} - 4\kappa^*E_i + 2h^*E_iu_{n,n}] + 2NqkE_i^{\text{в}}, \tag{41}$$

где

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial\dot{u}_i}{\partial t} + \dot{u}_{i,n}\dot{u}_n + \nu^2\dot{E}_{i,n}\dot{E}_n; \quad \ddot{E}_i = \frac{\partial\dot{E}_i}{\partial t} + \dot{u}_{i,n}\dot{E}_n + \dot{E}_{i,n}\dot{u}_n,$$

$$\dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,n}\dot{u}_n + \nu^2 E_{i,n}\dot{E}_n; \quad \dot{E}_i = \frac{\partial E_i}{\partial t} + u_{i,n}\dot{E}_n + E_{i,n}\dot{u}_n;$$

$$\kappa_{ij}^* = \kappa_{ij} + 4\pi kN^2q^2\delta_{ij}; \quad \kappa^* = \kappa + 4\pi kN^2q^2. \tag{42}$$

К уравнениям (39)—(42) необходимо присоединить уравнения сохранения массы, которые, как следует из (3), (10), (34), имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho\dot{u}_i-\nu\rho'\dot{E}_i)_{,\,i}=0, \quad \frac{\partial\rho'}{\partial t}+(\rho'\dot{u}_i-\nu\rho\dot{E}_i)_{,\,i}=0. \tag{43}$$

Уравнения (39)—(43) инвариантны относительно преобразований Галилея.

Дифференциальные уравнения (39)—(41) описывают связанные динамические процессы механических перемещений нейтральных частиц диэлектрика и изменений электрического поля, обусловленного поляризаций. Линейные слагаемые с коэффициентами h^*_{mij} описывают пьезоэлектрические эффекты, а нелинейные слагаемые с коэффициентами h^*_{mnij}, h^*, l^* — эффекты электрострикции.

Пьезоэлектрический эффект, описываемый в уравнениях (38), (39) слагаемыми с коэффициентами h^*_{imn}, проявляется только в твердых диэлектриках, кристаллическая решетка которых не имеет центра симметрии. В пьезоэлектрических преобразователях, применяемых в технике, наиболее широкое распространение получила предварительно поляризованная пьезокерамика, имеющая трансверсально-изотропную симметрию электроупругих свойств. Если ось x_3 направить вдоль оси симметрии такого материала, то уравнения состояния (38) будут иметь вид

$$\sigma_{ij}=(\lambda^*_{11}-\lambda^*_{12})\varepsilon_{ij}+(\lambda^*_{12}\varepsilon_{kk}+\lambda^*_{13}\varepsilon_{33}-\nu h^*_{31}E_3)\delta_{ij}-\nu^2[(h^*_{11}-h^*_{12})E_iE_j+(h^*_{12}E_kE_k+h^*_{31}E_3^2)\delta_{ij}],$$

$$\sigma_{33}=\lambda^*_{13}\varepsilon_{kk}+\lambda^*_{33}\varepsilon_{33}-\nu h^*_{33}E_3-\nu^2(h^*_{31}E_kE_k+h^*_{33}E_3^2),$$

$$\sigma_{i3}=2\lambda^*_{44}\varepsilon_{i3}-\nu h^*_{15}E_i-2\nu^2h^*_{55}E_iE_3,$$

$$\sigma'_{ij}=-\nu[(\lambda_{11}-\lambda_{12})E_{ij}+(\lambda_{12}E_{kk}+\lambda_{13}E_{33})\delta_{ij}],$$

$$\sigma'_{33}=-\nu(\lambda_{13}E_{kk}+\lambda_{33}E_{33}), \quad \sigma'_{i3}=-2\nu\lambda_{44}E_{i3},$$

$$2R_i=4\nu\kappa_{11}E_i-2h^*_{15}\varepsilon_{i3}-2\nu[(h^*_{11}-h^*_{12})\varepsilon_{ij}E_j+(h^*_{12}\varepsilon_{kk}+h^*_{13}\varepsilon_{33})E_i],$$

$$2R_3=4\nu\kappa_{33}E_3-(h^*_{31}\varepsilon_{kk}+h^*_{33}\varepsilon_{33})-2\nu(2h^*_{55}\varepsilon_{i3}E_i+h^*_{31}\varepsilon_{kk}E_3+h^*_{33}\varepsilon_{33}E_3) \quad (i,j,k=1,2), \tag{44}$$

где для электроупругих постоянных λ^*_{ijmn}, λ_{ijmn}, h^*_{ijmn}, h^*_{imn} приняты матричные обозначения [2].

Подставляя (35), (36) и (44) в уравнения сохранения импульса (12), с учетом (42) получим

$$\rho\ddot{u}_i-\nu\rho'\ddot{E}_i=\frac{1}{2}(\lambda^*_{11}-\lambda^*_{12})u_{i,\,kk}+\frac{1}{2}(\lambda^*_{11}+\lambda^*_{12})u_{k,\,ki}+(\lambda^*_{13}+\lambda^*_{44})u_{3,\,3i}+$$

$$+\lambda^*_{44}u_{i,33}-\nu(h^*_{31}E_{3,\,i}+h^*_{15}E_{i,\,3})-\nu^2[(h^*_{11}-h^*_{12})(E_iE_j)_{,\,j}+h^*_{12}(E_kE_k)_{,\,i}+$$

$$+h^*_{31}(E_3^2)_{,\,i}+2h^*_{55}(E_iE_3)_{,\,3}]+F_i,$$

$$\rho\ddot{u}_3 - \nu\rho'\ddot{E}_3 = \lambda^*_{44}u_{3,kk} + (\lambda^*_{13} + \lambda^*_{44})u_{k,k3} + \lambda^*_{33}u_{3,33} - \nu(h^*_{15}E_{k,k} + h^*_{33}E_{3,3}) -$$

$$-\nu^2[2h^*_{55}(E_{k,k}E_3 + E_iE_{3,i}) + h^*_{31}(E_kE_k)_{,3} + h^*_{33}(E_3^2)_{,3}] + F_3,$$

$$\rho'\ddot{u}_i - \nu\rho\ddot{E}_i = -h^*_{15}(u_{i,3} + u_{3,i}) - \nu[\frac{1}{2}(\lambda_{11} - \lambda_{12})E_{i,kk} + \frac{1}{2}(\lambda_{11} + \lambda_{12})E_{k,ki} +$$

$$+(\lambda_{13} + \lambda_{44})E_{3,3i} + \lambda_{44}E_{i,33} - 4\kappa^*_{11}E_i + (h^*_{11} - h^*_{12})(u_{i,j} + u_{j,i})E_j +$$

$$+2(h^*_{12}u_{k,k} + h^*_{13}u_{3,3})E_i] + 2NqkE_i^{\text{в}},$$

$$\rho'\ddot{u}_3 - \nu\rho\ddot{E}_3 = -h^*_{31}u_{k,k} - h^*_{33}u_{3,3} - \nu[\lambda_{44}E_{3,kk} + (\lambda_{13} + \lambda_{44})E_{k,k3} +$$

$$+\lambda_{33}E_{3,33} - 4\kappa^*_{33}E_3 + 2h^*_{55}(u_{i,3} + u_{3,i})E_i + 2h^*_{31}u_{k,k}E_3 + 2h^*_{33}u_{3,3}E_3] + 2NqkE_3^{\text{в}}. \qquad (45)$$

Уравнения (45) инвариантны относительно преобразований Галилея. Если же пренебречь нелинейными инерционными слагаемыми, т.е. вместо (42) принять

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \ddot{E}_i = \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}$$

в левых частях уравнений (45), то они теряют инвариантность относительно преобразований Галилея. В случае изотропных диэлектриков из (40), (41) как частный случай следуют уравнения Максвелла.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Электроупругость. Т.5. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.
2. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
3. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. Москва: Физматиз, 1963. 432 с.
4. Khoroshun L.P. General Dynamic Equations of Electromagnetomechanics for Dielectrics and Piezoelectrics. *Int. Appl. Mech.* 2006. **42**, № 4. P.407—420.
5. Wen C.-W., Weng G.J. Theoretical approach to effective electrostriction in inhomogeneous materials. *Phys. Rev. B*. 2000. **61**, № 1. P. 258—265.
6. Тамм И.Е. Основы теории электричества. Москва: Наука, 1976. 616 с.
7. Хорошун Л.П., Солтанов Н.С. Термоупругость двухкомпонентных смесей. — Киев: Наук. думка, 1984. — 112с.
8. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. — 872 с.

Поступило в редакцию 06.11.2017

REFERENCES

1. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. & Shulga, N. A. (1989). Mechanika Sviazannykh Polej v Elementakh Konstruktsij. Electrouprugost. 5, Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
2. Khoroshun, L. P., Maslov, B. P. & Leschenco, P. V. (1989). Prognozirovanie Effektivnykh Svojstv Piezoactivnykh Kompozitnykh Materialov. Kiev: Naukova Dumka, (in Russian).
3. Panovskiy, V. & Filips, M. (1963). Klassicheskaja Electrodinamika. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
4. Khorohun, L. P. (2006). General Dynamic Equations of Electromagnetomechanics for Dielectrics and Piezoelectrics. Int. Appl. Mech., 42, No. 4, pp. 407-420.

5. Wen, C.-W. & Weng, G. J. (2000). Theoretical approach to effective electrostriction in inhomogeneous materials. Phys. Rev. B., 61, No. 1, pp. 258-265.
6. Tamm, I. E. (1976). Osnovy Teorii Elektrichestva. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Khoroshun, L. P. & Soltanov, N. S. (1984). Termouprugost Dvukhkomponentnykh Smesej. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
8. Novatskiy, V. (1975). Teorija Uprugosti. Moscow: Mir (in Russian).

Received 06.11.2017

Л.П. Хорошун, О.І. Левчук

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: lkhoroshun@ukr.net

ДО ОСНОВ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ

Запропоновано новий принцип побудови нелінійної теорії зв'язаних динамічних процесів електропружності. Теорія базується на рівняннях двоконтинуумної механіки діелектриків як суміші позитивних і негативних зарядів, попарно зв'язаних у нейтральні молекули чи елементарні комірки. Приймається існування пружного потенціалу і лінійно-квадратичної залежності парціальних напружень від різниці переміщень зарядів. Виходячи з визначення вектора поляризації і породжуваного ним електричного поля, нелінійні рівняння двоконтинуумної механіки перетворюються в рівняння електропружності, які описують ефекти п'єзоелектрики і електрострикції.

Ключові слова: *діелектрик, елекропружність, двоконтинуумна механіка, п'єзоелектрик, електрострикція, вектор поляризації.*

L.P. Khoroshun, O.I. Levchuk

S.P. Timoshenko Insititute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: lkhoroshun@ukr.net

TO THE BASES OF THE NONLINEAR THEORY OF ELECTROELASTICITY

A new principle is proposed for constructing a nonlinear theory of coupled dynamical processes of electroelasticity. The theory is based on the equations of the two-continuum mechanics of dielectrics as a mixture of positive and negative charges in pairs, which form neutral molecules or elementary cells. The existence of an elastic potential and the linear-quadratic dependence of partial stresses on the difference of displacements of charges is accepted. Based on the definitions of a polarization vector and an associated electric field, the equations of the two-continuum mechanics are transformed into equations of electroelasticity, which describe the piezoelectric and electrostriction effects.

Keywords: *dielectric, electroelasticity, two-continuum mechanics, piezoelectric, electrostriction, polarization vector.*