УДК 629.78

А. И. МАСЛОВА

КОЛЕБАНИЯ МАЛОЙ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Рассматриваются колебания гравитационно стабилизированной космической тросовой системы (КТС) при воздействии аэродинамического момента на низких околоземных почти круговых орбитах. Основное внимание сосредоточено на исследовании динамики класса малых КТС, создаваемых на основе тройного CubeSat. Такой выбор обоснован необходимостью подготовки натурного эксперимента электродинамической КТС. Показано, что аэродинамический момент может существенно влиять на динамику рассматриваемого класса КТС и вызывать резонансы в колебаниях КТС, перпендикулярных плоскости орбиты. Для соблюдения режима гравитационной стабилизации необходимо, чтобы параметры КТС соответствовали ожидаемый расчетным значениям плотности атмосферы на предполагаемой орбите движения центра масс. Получены простые аналитические выражения, позволяющие оценить амплитуду колебаний КТС относительно центра масс. Результаты работы могут быть использованы при выборе параметров экспериментальной КТС и орбиты ее движения или для оценки аэродинамического воздействия на колебания КТС с выбранными параметрами.

Розглядаються коливання гравітаційно стабілізованої космічної тросової системи (КТС) при впливі аеродинамічного моменту на низьких навколоземних майже колових орбітах. Основна увага зосереджена на дослідженні динаміки класу малих КТС, побудованих на основі потрійного CubeSat. Такий вибір обумовлено необхідністю підготовки натурного експерименту електродинамічної КТС. Показано, що аеродинамічний момент може істотно впливати на динаміку даного класу КТС і викликати резонанси в коливаннях КТС, що перпендикулярні площині орбіти. Для дотримання режиму гравітаційної стабілізації необхідно, щоб параметри КТС відповідали очікуваним розрахунковим значенням щільності атмосфери на заданій орбіті руху центру мас. Отримано прості аналітичні вирази, що дозволяють оцінити амплітуду коливань КТС відносно центру мас. Результати роботи можуть бути використані при виборі параметрів експериментальної КТС та її орбіти або для оцінки аеродинамічного впливу на коливання КТС з вибраними параметрами.

Oscillations of the gravity-stabilized tethered space system exposed to an aerodynamic moment in low Earth near-circular orbits are examined. The emphasis is on the study of the dynamics of small tethered space systems based on a triple CubeSat. This approach is validated by a need for the preparation of a full-scale experiment with an electrodynamic tethered space system. It is demonstrated that an aerodynamic moment can affect significantly the dynamics of the tethered space systems under consideration and result in resonances in oscillations of the space tethered systems, which are perpendicular to the orbit plane. To attain the gravitational stabilization, it is necessary that the parameters of the tethered space system should be corresponded to the desired computational values of an atmospheric density in an assumed orbit of a mass-center motion. The simple analytical expressions for estimating an amplitude of oscillations of the tethered space system relative to the mass center are derived. The study results can be employed to choose the parameters of an experimental tethered space system and the orbit of its motion or to estimate the aerodynamic effects on oscillations of the tethered space system with the selected parameters

Ключевые слова: *космическая тросовая система, аэродинамический момент, колебания относительно центра масс, резонансы.*

Введение. В статье рассматриваются колебания гравитационно стабилизированной малой космической тросовой системы (КТС) при воздействии аэродинамического момента на низких околоземных почти круговых орбитах. Статья продолжает исследования работы [1], где обоснованы актуальность и новизна исследований динамики электродинамической космической тросовой системы (ЭДКТС), которая представляется на данный момент одним из наиболее перспективных способов увода космического мусора [2 – 6]. Там же указана необходимость дополнительных исследований динамики ЭДКТС, в том числе исследований возможных резонансных режимов движения КТС, обусловленных аэродинамическим воздействием.

Постановка задачи. Рассматривается движение КТС относительно центра масс под действием гравитационного и аэродинамического момента. Как и в [1], рассматривается КТС, состоящая из двух концевых тел; масса тел и троса равномерно распределены по их объему; протяженность троса 1 км;

начальный размер КТС (в неразвернутом виде) представляет собой CubSat размером 10 см×10 см×30 см; диапазон высот рассматриваемых орбит 550 – 750 км; движение КТС относительно центра масс рассматривается как движение гантели со сферическими концевыми телами и цилиндрической штангой. Примем, что масса всей КТС m_{KTC} составляет 3 кг; масса троса m_T =0,8 кг; а отношение массы первого концевого тела m_1 к массе второго концевого тела m_2 может меняться в диапазоне $1 \le m_1/m_2 \le 45$ (т. е. могут меняться от равных по массе $m_1 = m_2 = 1{,}1$ кг до $m_2 \approx 48$ грамм, $m_1 \approx 2{,}152$ кг). Диаметр троса D может изменяться от 1 мм до 20 мм. Диаметры сфер d_i (i =1, 2), моделирующих концевые тела, определяются из равенства

$$V_i = \frac{1}{12}\pi d_i^3 = \frac{m_i}{\rho_{KTC}},\ i=1,2,\quad \text{тогда}\ \frac{d_1}{d_2} = \sqrt[3]{\frac{m_1}{m_2}},$$

где V_i – обьемы сфер, моделирующих соответствующие концевые тела; $\rho_{KTS} = \dfrac{m_{KTC}}{V_{KTC}} = \dfrac{3}{0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3} = 10^3$ кг/м^3 – «средняя» плотность КТС (V_{KTC} обьем CubSat в неразвернутом виде). Тогда диаметры сфер, моделирующих концевые тела, могут изменяться от $d_1 = d_2 \approx 16$ см до $d_1 \approx 20$ см, а $d_2 \approx 6$ см.

Исследуется модельная задача малых колебаний КТС относительно местной вертикали на Кеплеровой круговой орбите. Исходными для исследований являются уравнения изменения ориентации КТС относительно орбитальной системы координат, описывающие изменения угла отклонения троса от местной вертикали в плоскости орбиты – угла φ, и изменения угла отклонения троса от плоскости орбиты – угла θ (углы тангажа и крена соответственно). Уравнения имеют вид [1]

$$\begin{cases} \ddot\theta + (\dot\varphi+\omega_0)^2 \sin\theta\cos\theta = -3\omega_0^2 I\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta + \dfrac{a_1}{A}\dfrac{\rho V^2}{2}\times \\ \times\left(\tilde V\sin\varphi\sin\theta + \varepsilon_V\cos\theta\cos u\right)\left(\sigma_a + \sqrt{1-\left(\tilde V\sin\varphi\cos\theta - \varepsilon_V\sin\theta\cos u\right)^2}\right), \\ \ddot\varphi\cos\theta - 2(\dot\varphi+\omega_0)\dot\theta\sin\theta = -3\omega_0^2 I\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta - \dfrac{a_1}{A}\dfrac{\rho V^2}{2}\times \\ \times\tilde V\cos\varphi\left(\sigma_a + \sqrt{1-\left(\tilde V\sin\varphi\cos\theta - \varepsilon_V\sin\theta\cos u\right)^2}\right), \end{cases} \qquad (1)$$

где ω_0 – угловая скорость орбитального движения; $I = (A-C)/B$ – соотношение моментов инерции (A, B, C – главные центральные моменты инерции КТС); a_0, a_1, $\sigma_a = a_0/a_1$ – постоянные для заданных характеристик КТС коэффициенты, описывающие аэродинамическое воздействие в зависимости от ориентации КТС к набегающему потоку; ρ – плотность атмосферы; $V = |\vec V|$, $\vec V$ – скорость КТС относительно потока; $\tilde V = (\omega_0 R - \omega_3 R\cos i)/V$ – постоянная для рассматриваемой орбиты величина, близкая к единице; ω_3 –

угловая скорость вращения Земли; i – наклонение орбиты; $R = \left|\vec{R}\right|$, $\vec{R}$ – радиус-вектор центра масс КТС относительно ньютоновского притягивающего центра (центра силы), $\varepsilon_V = (\omega_З / \omega_0)\sin i$ – малая величина; u – аргумент широты орбиты.

Используемая для анализа модель плотности атмосферы учитывает ее изменение вдоль орбиты (в частности, обусловленное вздутием атмосферы на солнечной стороне Земли [7, 8]) и задается в виде [9, 10]

$$\rho = b_0 + \sum_{n=1}^{4} b_n \cos(n\tau + f_n),$$

где b_0, b_n и f_n – постоянные для фиксированной орбиты и заданного уровня солнечной активности коэффициенты, которые находятся путем разложения в ряд Фурье изменений плотности атмосферы, рассчитанных по ГОСТу [11], при численном моделировании орбитального движения; $\tau = \omega_0 t$ – безразмерное время.

Главная особенность КТС заключается в ее большой одноосной протяженности и практическом равенстве единице параметра I, что обуславливает близость частоты собственных колебаний гравитационно стабилизированной КТС в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты, к удвоенной частоте орбитального движения, и в системе становятся возможны различные резонансные взаимодействия.

Квазистатическое решение. Движение КТС будем рассматривать как колебания относительно некоторого положения продольной оси КТС, смещенного относительно местной вертикали, т. е. $\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}(t)$, $\theta = \theta_0 + \tilde{\theta}(t)$, где φ_0, θ_0 – определяют "косое" положение КТС относительно местной вертикали; $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{\theta}(t)$ описывают колебания относительно φ_0, θ_0. Значение углов φ_0, θ_0 определяется равенством гравитационного и аэродинамического моментов при постоянной, равной средней плотности атмосферы. Приравнивая нулю периодические составляющие в (1), получим уравнения для определения квазистатического решения

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\omega_0^2 \sin 2\theta_0 = -\frac{3}{2}\omega_0^2 I \cos^2\varphi_0 \sin 2\theta_0 + \\ + \frac{a_1}{A}\tilde{V}\sin\varphi_0 \sin\theta_0\left(\sigma_a + \sqrt{1 - \tilde{V}^2 \sin^2\varphi_0 \cos^2\theta_0}\right)\frac{b_0 V^2}{2}, \\ 0 = -\frac{3}{2}\omega_0^2 I \sin 2\varphi_0 \cos\theta_0 - \\ -\frac{a_1}{A}\tilde{V}\cos\varphi_0\left(\sigma_a + \sqrt{1 - \tilde{V}^2 \sin^2\varphi_0 \cos^2\theta_0}\right)\frac{b_0 V^2}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Из первого уравнения в (2) видно, что одним из его решений является $\theta_0 = 0$. Причем, как нетрудно видеть, для режима гравитационной стабилизации ($\varphi_0 \approx 0$, $\theta_0 \approx 0$) других решений нет. Задача о нахождении каких-либо других положений равновесия $\theta_0 \neq 0$ выходит за рамки проводимых исследований.

Учитывая, что $\theta_0 = 0$ и $1 - \tilde{V}^2 \sin^2 \varphi_0 \approx \tilde{V}^2 \cos^2 \varphi_0$ (с точностью до ε_V^2), второе уравнение (2) для определения φ_0 принимает вид

$$\sin \varphi_0 = \left(\sigma_a + \tilde{V} \cos \varphi_0\right)\tilde{V}s\,, \qquad (3)$$

где $s = -\dfrac{a_1 b_0 R^2}{6IA}$.

Как видим, в рассматриваемой постановке задач квазистатическое смещение КТС зависит от трех параметров:

$\sigma_a = \dfrac{a_0}{a_1}$ – характеризует аэродинамическое воздействие на КТС;

$\tilde{V} = \dfrac{1 - (\omega_З/\omega_0)\cos i}{\sqrt{1 - 2(\omega_З/\omega_0)\cos i}}$ – зависит только от орбиты движения КТС;

s – зависит как от аэродинамических и массово-геометрических характеристик КТС, так и от орбиты движения КТС.

Поскольку для рассматриваемых высот угловая скорость орбитального движения значительно превосходит угловую скорость вращения Земли ($\omega_З/\omega_0 < 0{,}07$), то $\tilde{V}$ с точностью не менее, чем 0,005, можно считать равным единице.

Расчеты показали, что для рассматриваемых КТС при средних значениях температуры поверхности КТС T_r =300 К и температуры набегающего потока T_∞ =1000 К параметр σ_a не превышает 0,18; для КТС с соотношением масс концевых тел $m_1/m_2 > 5$ параметр σ_a не превышает 0,08. Значение параметра σ_a будет уменьшаться с увеличением доли молекул, отражающихся от поверхности КТС зеркально и расти с увеличением температуры поверхности КТС T_r. При увеличении температуры поверхности КТС до $T_r = T_\infty$ =1000 К для полностью диффузной схемы взаимодействия молекул с поверхностью [7, 12] КТС параметр σ_a не превышает 0,25.

На основании расчетов средней плотности на рассматриваемых орбитах получено, что величина $b_0 R^2$ (характеризует усредненный по орбите приведенный к квадрату угловой скорости скоростной напор) для низкой солнечной активности $F_0 = 75 \cdot 10^{-22}$ Вт/м^{2}Гц может меняться приблизительно от 0,4 кг/м до 4,2 кг/м, для высокой солнечной активности $F_0 = 250 \cdot 10^{-22}$ Вт/м^{2}Гц – от 8 кг/м до 108 кг/м. Т. е. можно считать, что 0,4 кг/м $\leq b_0 R^2 \leq$ 110 кг/м.

Расчеты показали, что для рассматриваемого класса КТС влияние параметров орбиты движения очень значительно, т. к. даже в рассматриваемом узком диапазоне высот для одних и тех же КТС угол отклонения φ_0 может составлять как десятые доли градуса (см. рис. 1), так и десятки градусов (см. рис. 2).

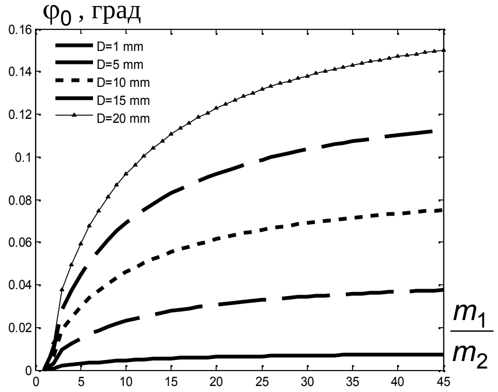

Рис. 1

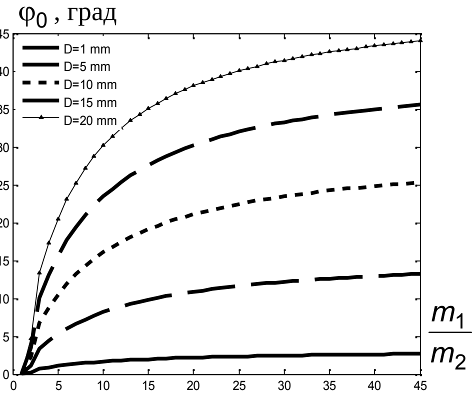

Рис. 2

На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов угла смещения φ_0 для рассматриваемых параметров КТС в случае полностью диффузного взаимодействия молекул с поверхностью КТС, температурами $T_r = 300$ К и $T_\infty = 1000$ К соответственно, для круговых кеплеровых орбит с малым аэродинамическим воздействием (высота орбиты 750 км, плоскость орбиты перпендикулярна оси симметрии «горба» атмосферного вздутия, низкая солнечная активность $F_0 = 75*10^{-22}$ Вт/м^{2}Гц) и большим аэродинамическим воздействием (высота орбиты 550 км, плоскость орбиты проходит через ось симметрии «горба» атмосферного вздутия, высокая солнечная активность $F_0 = 250*10^{-22}$ Вт/м^{2}Гц).

Как видим, угол смещения может существенно изменяться в зависимости от конструкции КТС и орбиты. Поэтому при выборе массово-геометрических параметров КТС необходимо учитывать их соответствие предполагаемым условиям движения (средней плотности). Далее будем рассматривать только такие параметры системы и орбиты, при которых угол отклонения φ_0 остается малым. Для определенности примем, что $s < 0{,}1$, тогда φ_0 не превысит 7,5° (см. рис. 3). Малости параметра s можно добиться как изменением массово-геометрических параметров КТС, так и выбором орбиты движения.

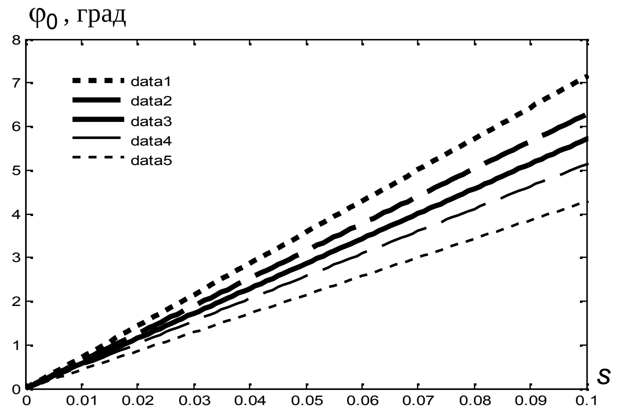

Рис. 3

Легко видеть, что для малых s угол отклонения φ_0 имеет практически линейную зависимость от s. Используя малость угла φ_0 решение (3) с погрешностью не более 0,25 % можно записать в виде

$$\varphi_0 = arctg\left(s\tilde{V}^2\right) + \arcsin\left(s\sigma_a\tilde{V}\right) + 2\pi n\,, \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots\,.$$

На следующем рисунке представлено изменение параметра s в зависимости от соотношения масс концевых тел в случае движения КТС по полярной орбите высотой 600 км при средней солнечной активности $F_0 = 150{*}10^{-22}$ Вт/м^2 Гц, плоскость орбиты проходит через «горб» атмосферного вздутия.

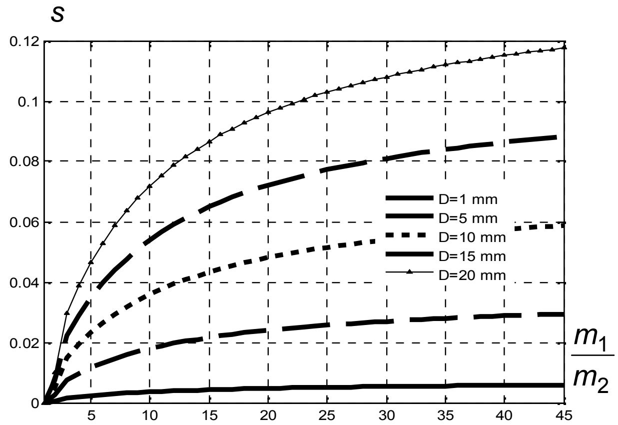

Рис. 4

Как видим из рис. 4 (и выражения (3)), почти для всех рассматриваемых КТС на данной орбите s мало и отклонения φ_0 будут небольшие.

Уравнения малых колебаний. Вынужденные колебания КТС вне плоскости орбиты вызваны вращением атмосферы, поэтому можно предположить, что эти колебания имеют порядок ε_V. Тогда $\varepsilon_V\tilde{\theta} \sim \varepsilon_V^2$ и членами уравнений (1), содержащими такие произведения, можно пренебречь. Линеаризуя уравнения (1) возле положения равновесия φ_0, $\theta_0 = 0$ и считая, что $1 - \tilde{V}^2\sin^2\varphi \approx \tilde{V}^2\cos^2\varphi$, получим

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{\theta}} + \omega_0^2\tilde{\theta} = -3\omega_0^2 I\,\tilde{\theta}\cos^2\varphi_0 + \dfrac{a_1\sigma_a}{A}\left(\tilde{V}\sin\varphi_0\tilde{\theta} + \varepsilon_V\cos u\right)q + \\ \qquad + \dfrac{a_1\tilde{V}\varepsilon_V}{A}\cos u\left(\cos\varphi_0 - \tilde{\varphi}\sin\varphi_0\right)q + \dfrac{a_1\tilde{V}^2}{A}\tilde{\theta}\sin\varphi_0\cos\varphi_0 q, \\ \ddot{\tilde{\varphi}} = -3\omega_0^2 I\left(\sin\varphi_0\cos\varphi_0 + \tilde{\varphi}\cos 2\varphi_0\right) - \dfrac{a_1\tilde{V}}{A}\cos\varphi_0\left(\sigma_a + \tilde{V}\cos\varphi_0\right)q + \\ \qquad + \dfrac{a_1\tilde{V}}{A}\tilde{\varphi}\sin\varphi_0\left(\sigma_a + 2\tilde{V}\cos\varphi_0\right)q. \end{cases} \qquad (4)$$

Учитывая уравнение для определения φ_0 и переходя к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, (4) можно записать в виде

$$\begin{cases} \tilde{\theta}'' + \left(k_\theta^2 + \delta_\theta\tilde{\rho}\right)\tilde{\theta} = -\varepsilon_V\cos u\left(1 + \tilde{\rho}\right)\left(c_1 - c_2\tilde{\varphi}\right), \\ \tilde{\varphi}'' + \left(k_\varphi^2 + \delta_\varphi\tilde{\rho}\right)\tilde{\varphi} = d_\varphi\tilde{\rho}, \end{cases} \qquad (5)$$

где $k_\theta^2 = 1 + 3l\cos^2\varphi_0 + \delta_\theta$, $\delta_\theta = d_\varphi tg\varphi_0$, $d_\varphi = 3ls\tilde{V}\cos\varphi_0\left(\sigma_a + \tilde{V}\cos\varphi_0\right)$,

$c_1 = \dfrac{d_\varphi}{\tilde{V}\cos\varphi_0}$, $c_2 = 3ls\tilde{V}\sin\varphi_0$, $k_\varphi^2 = 3l\cos 2\varphi_0 + \delta_\varphi$,

$\delta_\varphi = 3ls\tilde{V}\sin\varphi_0\left(\sigma_a + 2\tilde{V}\cos\varphi_0\right)$, $\tilde{\rho} = \sum_{n=1}^{4}\bar{b}_n\cos(n\tau + f_n)$.

Система (5) представляет собой систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и переменной правой частью (уравнения типа Хилла). Из (5) видно, что в линейном приближении колебания в плоскости орбиты не зависят от поперечных колебаний КТС.

Частота собственных колебаний КТС и возможные резонансы. Учитывая уравнение (3), можно записать, что $d_\varphi = 3l\cos\varphi_0\sin\varphi_0$, $\delta_\theta = 3l\sin^2\varphi_0$, $c_1 = 3\dfrac{l}{\tilde{V}}\sin\varphi_0$, $\delta_\varphi = 3l\sin^2\varphi_0 + 3ls\tilde{V}^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0$, тогда

$$k_\varphi^2 = 3l\cos^2\varphi_0 + 3ls\tilde{V}^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0, \quad k_\theta^2 = 1 + 3l, \qquad (6)$$

т. е. в линейном приближении для рассматриваемых КТС аэродинамика не оказывает влияния на частоту поперечных колебаний КТС (колебаний по углу крена) и всегда k_θ очень близка к 2. В этом случае в колебаниях вне плоскости орбиты (по углу крена) всегда возникает линейный резонанс (см., например [13]), а, если учесть в разложении плотности атмосферы четвертую гармонику, и главный параметрический резонанс (см., например [14, 15]).

Для малых φ_0 частота колебаний в плоскости орбиты $k_\varphi \approx \sqrt{3} \approx 1{,}73$ и в колебаниях в плоскости орбиты (по углу тангажа) не возможны резонансы (рис. 5). С ростом угла φ_0 (увеличении аэродинамического влияния) частота колебаний по углу тангажа слабо изменяется и не приводит к возникновению новых эффектов в движении.

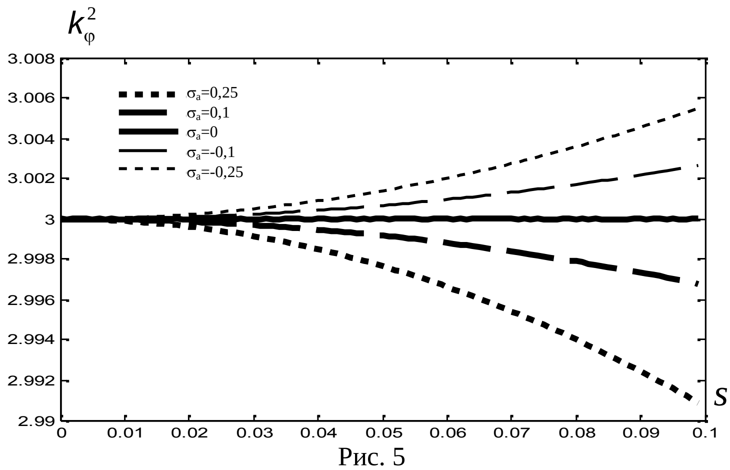

Рис. 5

Оценки амплитуд колебаний. Уравнения колебаний в плоскости орбиты относятся к классу уравнений, для которых показано (см., например [16]), что, при удаленности системы от линейного и главного параметрического резонанса, с точностью порядка $\delta_\varphi \bar{b}_1$ вынужденные колебания $\tilde{\varphi}^B$ равны

$$\tilde{\varphi}^B = \sum_{n=1}^{4} \frac{d_\varphi \bar{b}_n}{k_\varphi^2 - n^2} \cos(n\tau + f_n).$$

Учитывая, что $\bar{b}_1 > \bar{b}_2 > \bar{b}_3$ (для рассматриваемых круговых орбит $\bar{b}_1 \le 0{,}83$; $\bar{b}_2 \le 0{,}23$; $\bar{b}_3 \le 0{,}02$ [16]), для $\varphi_0 = 0^\circ$ и $k_\varphi^2 = 3$ можно получить простую оценку амплитуды A_φ вынужденных колебаний КТС вдоль плоскости орбиты (в предположении, что $I = 1$ и $\tilde{V} = 1$)

$$A_\varphi \approx 3s\left(\frac{\bar{b}_1}{2} + \bar{b}_2\right)(1 + \sigma_a). \qquad (7)$$

Тогда для рассматриваемого класса КТС при малых φ_0 ($s < 0{,}1$) амплитуда вынужденных колебаний КТС вдоль плоскости орбиты, вызванных аэродинамическим воздействием, не будет превышать 14°.

В колебаниях перпендикулярных плоскости орбиты имеют место как линейный, так и параметрический резонансы. Расчеты показывают, что при рассматриваемых параметрах влияние параметрического резонанса весьма незначительно в сравнении с влиянием линейного резонанса.

Оценим влияние линейного резонанса на рост амплитуды колебаний перпендикулярно плоскости орбиты. Рассмотрим правую часть первого уравнения (5), которую можно записать в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_V \cos u(1+\tilde{\rho})(c_1 + c_2\tilde{\varphi}) = \Phi(\tau) + \frac{1}{2}\varepsilon_V \Big[(c_1\bar{b}_1 + c_2 A_1)\cos(2\tau + u_0 + f_1) + \\ + (c_1\bar{b}_3 + c_2 A_3)\cos(2\tau - u_0 + f_3) + \frac{1}{2}(\bar{b}_1 A_2 + \bar{b}_2 A_1)\cos(2\tau - u_0 + f_1 + f_2) + \\ + \frac{1}{2}\bar{b}_2 A_1 \cos(2\tau + u_0 + f_2 - f_1) + \frac{1}{2}(\bar{b}_3 A_2 + \bar{b}_2 A_3)\cos(2\tau + u_0 + f_3 - f_2)\Big],\end{aligned} \qquad (8)$$

где $A_n = d_\varphi \bar{b}_n \big/ (k_\varphi^2 - n^2)$, $n = 1, 2, 3$ – амплитуда вынужденных колебаний КТС в плоскости орбиты с частотой, приведенной к частоте орбитального движения, n; $\Phi(\tau)$ – периодическая функция, содержащая гармонические составляющие правой части первого уравнения (5) с частотами, отличными от 2τ. Как видим, правая часть уравнения колебаний КТС перпендикулярных плоскости орбиты, содержит множество гармоник с резонансной частотой 2τ. Следует отметить, что поскольку ε_V зависит от $\sin i$, то на экваториальной орбите вынужденные колебания, перпендикулярные плоскости орбиты, отсутствуют.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения вида $y'' + a^2 y = A\cos(\omega\tau)$, где y – переменная; a – частота свободных колебаний; A и ω – амплитуда и частота возмущающей правой части, при линейном резонансе ($a = \omega$) имеет вид (см., например [17])

$$y = \frac{A}{2\omega}\sin(\omega\tau)\cdot\tau .$$

Расчеты показывают, что наибольшая амплитуда в (8) при гармониках с частотой 2τ, дает удовлетворительную оценку роста амплитуды поперечных колебаний при линейном резонансе

$$A_{\theta\_rez} \approx \frac{1}{2}\varepsilon_V c_1 \bar{b}_1 \cdot \frac{1}{2k_\theta} \approx \frac{3}{8}\varepsilon_V s\bar{b}_1(1+\sigma_a)\tau . \qquad (9)$$

Отметим, что этот рост поперечных колебаний связан с периодическим изменением (с орбитальной частотой) плотности атмосферы при движении по орбите.

Для рассматриваемых высот угловая скорость орбитального движения значительно превосходит угловую скорость вращения Земли ($\omega_З/\omega_0 < 0{,}07$). Тогда для максимального значения ε_V =0,07 и рассматриваемого класса КТС скорость изменения амплитуды для s=0,1 и σ_a =0,25 не будет превышать 2,7*10^{-3} рад, что соответствует максимальному увеличению амплитуды порядка 1^o за виток по орбите.

Для КТС с диаметром троса 20 мм, массами первого концевого тела и второго концевого тела – 2,1083 кг, 0,0917 кг соответственно ($m_1/m_2 = 23$), движущейся по орбите с теми же параметрами, что использовались для расчетов, представленных на рис. 4, изменение амплитуды поперечных колебаний будет составлять порядка 1^o за 10 витков по орбите (для такой орбиты и КТС $\varepsilon_V \approx 0{,}0107$, $\bar{b}_1 \approx 0{,}6695$, $s \approx 0{,}1005$, $\sigma_a \approx 0{,}0761$, $k_\varphi^2 \approx 2{,}9975$, $\varphi_0 \approx 6{,}18^o$, $A_\varphi \approx 9{,}5^o$, т. е. $\max(\varphi) \approx 15{,}7^o$).

Численный анализ. Расчеты показали, что для малых аэродинамических возмущений (малых углов тангажа и крена) результаты расчета динамики КТС по исходным (1) и линеаризованным (4) уравнениям движения хорошо совпадают (рис. 6). При бóльших аэродинамических возмущениях характер колебаний в плоскости орбиты не меняется; амплитуда колебаний вне плоскости орбиты линейно растет только на начальном этапе времени, далее изменение амплитуды носит долгопериодический характер колебаний и решения уравнений (1) и (4) расходятся (рис. 7).

На рисунках представлено изменение угла тангажа и крена для КТС с диаметром троса 10 мм, массами первого концевого тела и второго концевого тела – 2 кг, 0,2 кг соответственно ($m_1/m_2 = 10$) при движении по орбите с теми же параметрами, что использовались для расчетов, представленных на рис. 4, (для такой орбиты и КТС $s \approx 0{,}0359$, $\sigma_a \approx 0{,}0761$, $k_\varphi^2 \approx 2{,}9997$, $\varphi_0 \approx 2{,}22^o$, $A_\varphi \approx 3{,}4^o$, т.е. $\max(\varphi) \approx 5{,}66^o$); N – количество витков по орбите; 1 – изменение углов при расчете по полным уравнениям (1); 2 – изменение углов при расчете по линеаризованным уравнениям (4); 3 – оценки изменения углов, определяемые при помощи выражений (7) и (9) соответственно. Аэродинамические коэффициенты рассчитываются для T_r =300 К, T_∞ =1000 К и диффузной схемы взаимодействия молекул с поверхностью КТС (σ=0); начальные условия берутся следующими такими, чтобы наблюдать только вынужденные колебания – $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$.

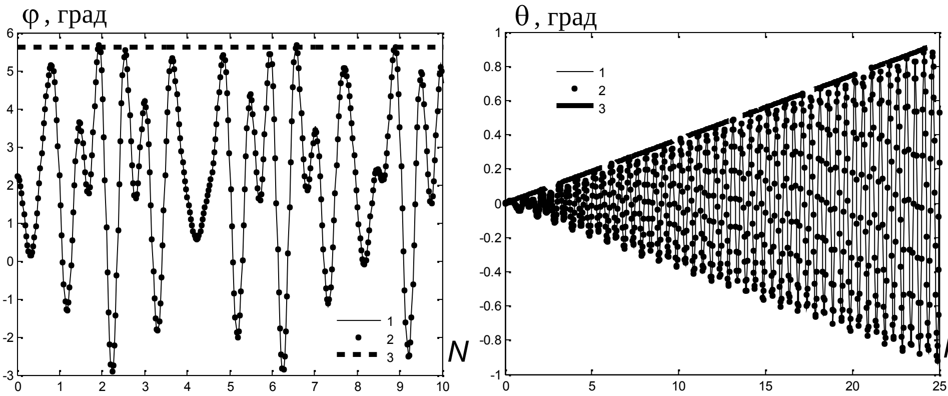

Рис. 6

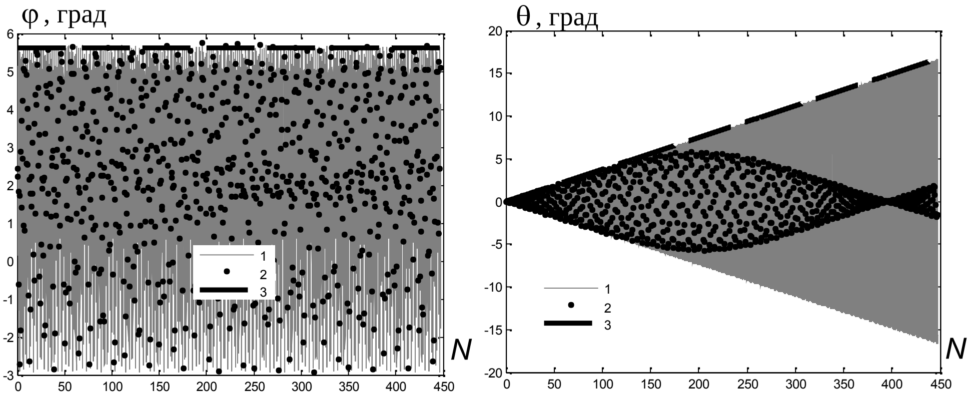

Рис. 7

Изменение угла тангажа происходит с постоянной амплитудой и максимальное отклонение троса от местной вертикали в плоскости орбиты можно оценить выражением $\max(\varphi) = \varphi_0 + A_\varphi$, где φ_0 и A_φ определяются по (3) и (7) соответственно. Амплитуда колебаний по углу крена растет линейно до значений порядка 3° и этот рост хорошо описывается выражением (9), т. е. зная параметры орбиты и КТС ε_V, s, $\bar{b}_1$, σ_a на этапе линейного роста амплитуды можно оценить за сколько витков орбитального движения N амплитуда колебаний по углу крена вырастет, например, до $A_\theta = 1^\circ$

$$N = \frac{8 \cdot A_\theta}{360 \cdot 3 \cdot \varepsilon_V s \bar{b}_1 (1 + \sigma_a)} = \frac{1}{135 \cdot \varepsilon_V s \bar{b}_1 (1 + \sigma_a)}.$$

Тогда амплитуда колебаний по углу крена для рассматриваемого класса КТС (максимальных значений параметров ε_V =0,07, s =0,1, σ_a =0,25, $\bar{b}_1$ = 0,83) вырастет на 1° не быстрее, чем за 1 виток орбитального движения; для рассмотренного выше случая – за 27 витков орбитального движения.

Выводы. Влияние аэродинамического момента на движение ЭДКТС может быть очень существенным, и при планировании эксперимента аэродинамические воздействия должны учитываться на ряду с электродинамическими.

Для рассмотренного в статье класса КТС, создаваемых на основе Cubesat, и рассмотренных орбит аэродинамическое влияние может приводить к нарушению гравитационной стабилизации движения системы. Так, угол квазистатического отклонения троса от местной вертикали в плоскости орбиты может составлять десятки градусов. Для соблюдения режима гравитационной стабилизации системы необходимо соответствие (согласование) параметров КТС предполагаемой орбите ее движения.

При движении в режиме гравитационной стабилизации (малых отклонениях от местной вертикали) периодические изменения плотности атмосферы при движении КТС по орбите приводят к резонансным колебаниям КТС перпендикулярно плоскости орбиты. Это обуславливает почти линейный рост амплитуды колебаний на начальном этапе движения.

Получены упрощенные линеаризованные уравнения движения КТС, позволяющие понять физику процессов, и получены простые аналитические выражения для оценки амплитуд колебаний в плоскости и перпендикулярно плоскости орбиты, позволяющие выбирать параметры КТС и орбит для успешного проведения экспериментов.

Работа выполнена при поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по научным космическим исследованиям на 2012–2016 гг., договор № II-16-13-4.

1. *Маслова А. И.* Модель движения малой радиальной космической тросовой системы под действием аэродинамического момента / *А. И. Малова* // Техническая механика. – 2015. – №. 1. – С. 55 – 64.
2. *Ahedo E.* Analysis of Bare-Tether Systems for Deorbiting Low-Earth-Orbit Satellites / *E. Ahedo, J. R. Sanmartin* // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2002. – V. 39, N 2. – P. 198 – 205.
3. *Hoyt R. P.* The Terminator Tape™: A Cost-Effective De-Orbit Module for End-of-Life Disposal of LEO Satellites / *R. P. Hoyt, I. M. Barnes, N. R. Voronka, J. T. Slostad* // Space 2009 Conference, Sept 2009. – 2009. – AIAA Paper 2009-6733. – P. 1 – 9.
4. *Bombardelli C.* Deorbiting Performance of Bare Electrodynamic Tethers in Inclined Orbits / *C. Bombardelli, D. Zanutto, E. Lorenzini* // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 2013. – V. 36, N 5. – P. 1550 – 1556.
5 *Sanmartin J. R.* Electrodynamic Tether Applications and Constraints / *J. R. Sanmartin, E. C. Lorenzini, M. Martinez-Sanchez* // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2010. – Vol. 47, N 3. – P. 442 – 456.
6. *Levin E. M.* Dynamic analysis of space tether missions / *E. M. Levin*. – San Diego : American Astronautical Society, 2007. – 453 p.
7. *Белецкий В. В.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников / *В. В. Белецкий, А. М. Яншин*. – Киев : Наукова думка, 1984. – 188 с.
8. *Данилов А. Д.* Популярная аэрономия / *А. Д. Данилов.* – Ленинград : Гидрометеоиздат, 1989. – 234 с.
9. *Маслова А. И.* Изменения плотности атмосферы при движении космических аппаратов на низких околоземных орбитах / *А. И. Маслова, А. В. Пироженко* // Космічна наука і технологія. – 2009. – Т. 15, № 1. – С. 13 – 18.
10. Маслова А. И. К моделированию аэродинамического момента, действующего на спутник / *А. И. Маслова, А. В. Пироженко* // Космические исследования. – 2010. – Т. 48, № 4. – С. 371 – 379.
11. ГОСТ Р 25645.166 – 2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли. – Принят 2004-03-09. – М. : ИПК Изд-во стандартов, 2004. – 24 с.
12. *Басс В. П.* Молекулярная газовая динамика и ее приложения в ракетно-еосмической технике / *В. П. Басс*. – Киев : Наукова думка, 2008. – 270 с.
13. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / *Л. Чезари.* – Москва : Мир, 1964. – 477 с.
14. *Маслова А. И.* Параметрический резонанс в колебаниях космического аппарата при воздействии переменного аэродинамического момента / *А. И. Маслова, А. В. Пироженко* // Механика твердого тела. – 2010. – Т. 40. – С. 144 – 155.
15. *Якубович В. А.* Параметрический резонанс в линейных системах / *В. А. Якубович, В. М. Старжинский*. – М. : Наука, 1987. – 328 с.
16. *Маслова А. И.* Влияние переменности аэродинамического момента на динамику гравитационно-стабилизированного КА в плоскости круговой орбиты / *А. И. Маслова, А. В. Пироженко* // Техническая механика. – 2009. – №. 3. – С. 87 – 97.
17. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний / *Я. Г. Пановко*. – М. : Наука, 1991. – 256 с.

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и
Государственного космического агентства Украины,
Днепр

Получено 14.09.2016,
в окончательном варианте 19.09.2016