Н.В.Никитина [1], **В.Н.Сидорец** [2]

БИФУРКАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОДНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

[1] *Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,*
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua
[2] *Институт электросварки им. Е.О. Патона НАНУ,*
ул. Боженко, 11, 03680, Киев Украина; e-mail:sidvn@ua.fm

Abstract. The bifurcations are studied for the three-dimensional system, that model the electric circuit with arc. A qualitative analysis includes the limit cycles, strange attractor, and fixed point, to which tends the describable point.

Key words: bifurcation, limit cycle, chaos.

1. Введение. Постановка задачи.

Проблема рождения аттракторов в трехмерных системах обсуждалась в работах [2, 5 – 12]. В динамических трехмерных системах существование аттрактора свидетельствует о присутствии в системе движений со сложными траекториями. Вопрос сосуществования гомоклиничесих и периодических траекторий исследован в работе [4]. Траекторию динамической системы, отличную от периодической, называют гомоклинической, если α-предельное и ω-предельное множества траектории совпадают и представляют собой седловой цикл [4]. Трехмерные аттракторы играют важную роль в теории бифуркаций.

Данная работа связана с результатами монографии [3], в которой изложены математические модели электрической цепи с дугой и качественный анализ уравнений движения. Цель данной работы состоит в разработке методики качественного анализа бифуркационных процессов и приложении её для изучения электрической цепи с дугой.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = F(x),\ x(t) \in R^m, \tag{1}$$

где $F(x)$ – гладкая функция, $m = 3$. Введем в рассмотрение малое отклонение $\delta x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ в окрестности частных решений $\bar{x}_i(t)$ уравнений (1) $\delta x_i = x_i(t) - \bar{x}_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Примем δx_i в качестве новых координат. Линейную систему, соответствующую системе (1) в координатах δx_i

$$d\delta x / dt = A(\bar{x})\,\delta x,\ \delta x \in R^m, \tag{2}$$

где $A(\bar{x}) = \partial F / \partial x\,|_{x=\bar{x}}$, называем *системой уравнений в вариациях* [11]. При помощи анализа корней характеристического уравнения матрицы $A(\bar{x})$ можно изучить механизм образования аттрактора. Также можно установить причины появления в регулярном аттракторе кратного периода и процесс преобразования регулярного аттрактора в странный в терминах бифуркационного процесса.

Сделаем для системы (1) следующие предположения.

Предположение 1. *Система (1) имеет две особые точки. Особая точка седлофокус имеет характеристические показатели* $Re\lambda_1 > 0, Re\lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ *с отрицательной седловой величиной* $\sigma = Re\lambda_1 + Re\lambda_2 + \lambda_3 < 0$. *Особая точка седлоузел имеет характеристические показатели* $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$, *причем* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$.

Предположение 2. *На одной координатной плоскости и плоскостях, параллельных этой плоскости, система (1) относительно особой точки имеет круговую траекторию, которой соответствуют затухающие колебания. На двух других плоскостях и плоскостях, параллельных этим двум, траектория не уходит на* ∞.

Утверждение. *Пусть для дифференциальной системы (1) выполняются условия Предположений 1, 2. Тогда в окрестности особой точки (седлофокус) образуется аттрактор.*

Доказательство. Согласно Предположению 1 круговая траектория системы (1) относительно особой точки вида седлофокус неустойчива. Согласно Предположению 2 существование круговой траектории с затуханием на одной из координатных плоскостей указывает на диссипативный характер движения. Предположение 2 указывает на то, что траектория не уходит на бесконечность, но остается в некоторой окрестности особой точки вида седлофокус. Влияние особой точки седлоузел на траекторию системы (1) может выражаться в виде несимметрии проекций на координатные плоскости. Таким образом, в системе (1) существует притягивающая траектория, которая не уходит на ∞ и может образовать аттрактор в окрестности седлофокуса.

2. Уравнения RLC-цепи с дугой.

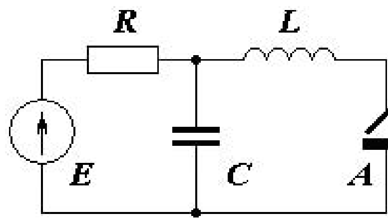


Рис. 1

Модель электрической цепи с дугой создана авторами в качестве обобщающей при анализе нескольких моделей [3]. Цепь состоит из источника питания постоянного напряжения E, резистора R, реактора L, конденсатора C и дуги A (рис. 1). Дифференциальные уравнения RLC – дуги в безразмерном виде имеют следующий вид:

$$\begin{cases} dx/dt = \dfrac{1}{L}(y - xz^{(n-1)/2}), \\ dy/dt = \dfrac{1}{RC}(1 + R - y - Rx), \\ dz/dt = x^2 - z. \end{cases} \tag{3}$$

Независимые переменные и время имеют вид $x = i/I_0$, $y = u/U_0$, $z = i_\theta^2/I_0^2$; $t = \tau/\theta$ (n – показатель степени в степенной аппроксимации статической вольтамперной характеристики (ВАХ) дуги), где u, i – напряжение на конденсаторе и ток реактора; i_θ – ток состояния дуги; τ – время. U_0, I_0 – постоянные, которые трактуются как координаты одной из точек на статической ВАХ дуги; θ – постоянная времени дуги; R, L, C – сопротивление, индуктивность и емкость электрической цепи. Особые точки системы (3) определяются из уравнения [3]

$$1 + R - Rx = x^n. \tag{4}$$

Рассмотрим два действительных положительных решения уравнения (4). Это соответствует особой точке S с координатами $(1, 1, 1)$, особой точке N с координатами (x_N, x_N^n, x_N^2), где x_N определяется корнем уравнения (4), отличным от единицы.

При составлении системы в вариациях представим выражение $(\overline{z}+\delta z)^{(n-1)/2}$, согласно первого уравнения системы (3), в виде степенного ряда

$$(\overline{z}+\delta z)^{(n-1)/2}=\overline{z}^{(n-1)/2}\left(1+\frac{\delta z}{\overline{z}}\right)^{(n-1)/2}=\overline{z}^{(n-1)/2}\left(1+\frac{(n-1)}{2}\frac{\delta z}{\overline{z}}+\ldots\right)=$$

$$=\overline{z}^{(n-1)/2}+\frac{(n-1)}{2}\overline{z}^{(n-3)/2}\delta z+\ldots\ .$$

Уравнения в вариациях (2) системы (3) запишем так:

$$\begin{cases}\delta\dot{x}=\dfrac{1}{L}\left(-\overline{z}^{(n-1)/2}\delta x+\delta y-\dfrac{n-1}{2}\overline{x}\overline{z}^{(n-3)/2}\delta z\right),\\ \delta\dot{y}=\dfrac{1}{RC}(-\delta y-R\delta x),\\ \delta\dot{z}=2\overline{x}\delta x-\delta z.\end{cases}\tag{5}$$

Составим характеристическое уравнение системы (5)

$$CLR\lambda^3+(CLR+CR\overline{z}^{(n-1)/2}+L)\lambda^2+(\overline{z}^{(n-1)/2}+CR(\overline{z}^{(n-1)/2}-\overline{x}^2\overline{z}^{(n-3)/2})+$$

$$+CRn\overline{x}^2\overline{z}^{(n-3)/2}+L+R)\lambda+\overline{z}^{(n-1)/2}+(n-1)\overline{x}^2\overline{z}^{(n-3)/2}+R=0.\tag{6}$$

С помощью уравнения (6) можно получить характеристические показатели любой точки трехмерного пространства системы (3). Подставляя координаты особых точек системы (3) $S(1,1,1)$, $N(x_N,x_N^n,x_N^2)$ в уравнение (6), получим характеристические уравнения особых точек

$$CLR\lambda^3+(CLR+CR+L)\lambda^2+(L+R+1+CRn)\lambda+R+n=0,\tag{7}$$

$$CLR\lambda^3+(CLR+CRx_N^{n-1}+L)\lambda^2+(L+R+x_N^{n-1}+CRnx_N^{n-1})\lambda+R+nx_N^{n-1}=0.$$

Уравнения (7) совпадают с приведенными в [3] уравнениями (3.25), (3.16).

3. Предельный цикл, цикл кратного периода, странный аттрактор.

Выберем значения параметров системы (3) из численного анализа бифуркации Хопфа в [3, с. 76]

$$(C,L,R,n)=(2{,}25;\ 1;\ 15;\ -0{,}4).\tag{8}$$

Система (3) имеет две особых точки: S – седлофокус и N – седлоузел (в соответствии с Предположением 1). Проанализируем выполнение Предположения 2. Рассмотрим координатную плоскость xy, на которой уравнения движения в соответствие с системой (3) имеют вид

$$\begin{cases}dx/dt=-\dfrac{1}{L}y;\\ dy/dt=\dfrac{1}{RC}(1+R-y-Rx).\end{cases}$$

Этой системе соответствует диссипативный осциллятор

$$C\ddot{y}+\dot{y}/R+y/L=0.\tag{9}$$

Уравнения движения на плоскости xz представим так:

$$\begin{cases} dx/dt = -\dfrac{1}{L} x z^{(n-1)/2}; \\ dz/dt = x^2 - z. \end{cases} \tag{10}$$

Характеристические показатели особой точки на плоскости xz системы (10): $\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = -1$. Уравнения в вариациях и характеристическое уравнение системы (10) имеют вид

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = \dfrac{1}{L}(-\overline{z}^{(n-1)/2}\delta x - \dfrac{n-1}{2}\overline{x}\,\overline{z}^{(n-3)/2}\delta z); \\ \delta \dot{z} = 2\overline{x}\delta x - \delta z; \end{cases}$$

$$\overline{\lambda}^{\,2} + \overline{\lambda}\left(1 + \frac{\overline{z}^{(n-1)/2}}{L}\right) + \frac{\overline{z}^{(n-1)/2}}{L} + \frac{(n-1)\,\overline{x}^{2}\overline{z}^{(n-3)/2}}{L} = 0.$$

Запишем корни характеристического уравнения системы в вариациях:

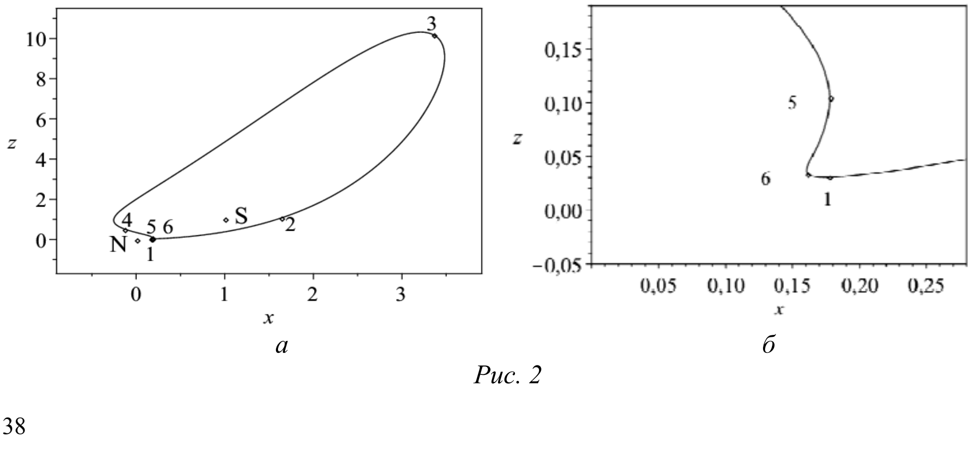
$$\overline{\lambda}_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\overline{z}^{\,(n-1)/2}}{L}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{\overline{z}^{\,(n-1)/2}}{L}\right)^2 - \frac{\overline{z}^{(n-1)/2}}{L} - \frac{(n-1)\overline{x}^{\,2}\overline{z}^{\,(n-)3/2}}{L}}\,. \tag{11}$$

На границе области из (11) имеет место неравенство $\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2 < 0.$ Уравнения движения по плоскости yz представлены несвязанными уравнениями

$$dy/dt = \frac{(1 + R - y)}{RC}; \quad dz/dt = -z.$$

В системе (3) выполняются Предположение 1, Предположение 2 и Утверждение о существовании аттрактора.

Аттрактор может быть регулярным, странным, и может быть притягивающей неподвижной точкой в трехмерном пространстве, к которой стремится траектория системы (3). Для динамических систем с симметрией можно доказать теорему о существовании регулярного аттрактора [2] (предельного цикла с симметрией). В окрестности пространства параметров, вызывающих симметрию, также существуют замкнутые траектории. Здесь симметричный аттрактор не образуется, т.к. особая точка N нарушает симметрию. Примем из опыта работы [3], что в системе (3) существует регулярный аттрактор (значения параметров (8)). На рис. 2, *а, б* изображен аттрактор (трехмерный предельный цикл) в виде проекции на координатную плоскость xz. Ниже приводится анализ бифуркаций согласно характеристическому уравнению (6) и численному решению $(\overline{x},\ \overline{z})$.



а *б*

Рис. 2

В табл. 1 приведена бифуркационная картина предельного цикла со значениями параметров (8). В первом столбце таблицы – номера точек (№) согласно обозначениям на проекции $x\,z$ (рис. 2, *а*). Во втором столбце приведено название и характеристические показатели (ХП) точки. В третьем столбце – название бифуркации рождения новой точки взамен существующей; ХП этой точки приведено в четвертом столбце. Например, в точке 1 происходит переход седлофокуса ($Re\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 < 0$) в седлоузел ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$). Бифуркация в точке 1 – рождение седлоузла из седлофокуса. *Во всех точках замкнутой траектории седловая величина* < 0. Точки бифуркаций $1, 5, 6$ близки друг к другу и в масштабе рисунка 2, *а* совпадают (см. рис. 2, *б*). Процессы качественного изменения траектории вблизи точек $1, 4, 5, 6$ созданы влиянием особой точки N. Бифуркации точек $1, 4, 5, 6$ поглощают больше времени, чем прохождение изображающей точки на участках $2-3$, $3-4$. На участке $4-6$ изображающая точка перемещается гораздо медленнее. Это вызывает неравномерность движения в целом.

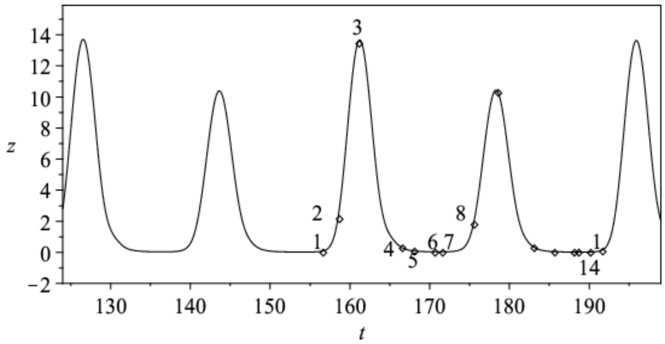
Таблица 1

№	Название и ХП точки	Бифуркации	ХП точки
1	седлофокус ($Re\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 < 0$)	рождение седлоузла	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$
2	седлоузел ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$)	рождение седлофокуса	$Re\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 < 0$
3	седлофокус ($Re\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 < 0$)	рождение узлофокуса	$Re\lambda_{1,2} < 0$, $\lambda_3 < 0$
4	узлофокус ($Re\lambda_{1,2} < 0$, $\lambda_3 < 0$)	рождение узла	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$
5	узел ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$)	рождение узлофокуса	$Re\lambda_{1,2} < 0$, $\lambda_3 < 0$
6	узлофокус ($Re\lambda_{1,2} < 0$, $\lambda_3 < 0$)	рождение седлофокуса	$Re\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 < 0$

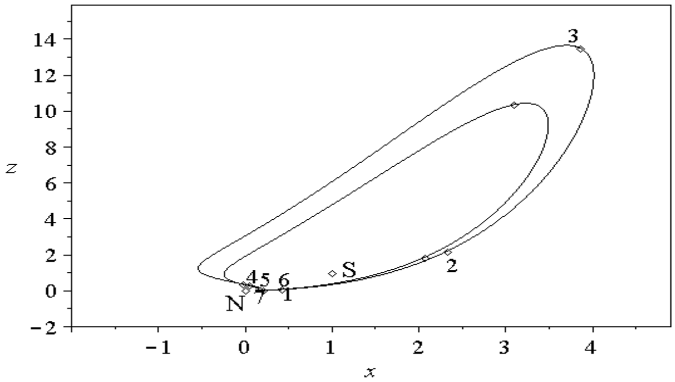
В работе [2] указано, что кратность периода появляется в результате неравномерного движения изображающей точки. Например, при качественном анализе системы Чуа изображающая точка попадает в область, где её скорость становится близкой к нулю. При увеличении параметра C электрической цепи с дугой уменьшается модуль седловой величины точки S. Следует ожидать увеличение области, в которой присутствует траектория, образуя аттрактор.

На рис. 3, *а*, приведен аттрактор удвоенного периода при следующих значениях параметров $(C, L, R, n) = (2{,}4; 1; 15; -0{,}4)$ Отмечены точки, в которых происходит бифуркация решения. *Во всех точках замкнутой траектории седловая величина* < 0. *Результаты сведены в виде табл. 2. Неравномерность движения существует здесь еще в большей мере. Она имеет место в области точек 4 – 7 и проявляется в виде удвоения периода.* В системе (3) процесс удвоения периода можно рассмотреть более подробно.

На рис. 3, *а* будем отмерять период цикла по точкам бифуркации. Начнем с точки под номером 1, которая находится слева рисунка 3, *а* . Если бы траектория замыкалась за один оборот, точка замыкания 1 должна появиться справа между точками 7 и 8. Однако, точка бифуркации 1 между точками 7 и 8 отсутствует. *Это означает, что траектория делает один оборот и не замыкается.* На первом витке траектория неустойчива. Траектория делает еще один оборот и тогда после точки под номером 14 появляется точка 1. Траектория замыкается.



а



б

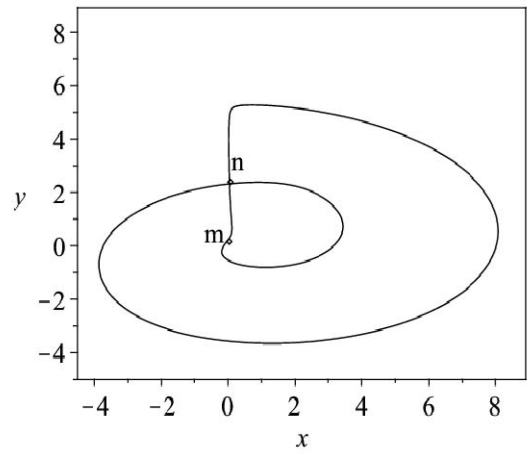
Рис. 3

Таблица 2

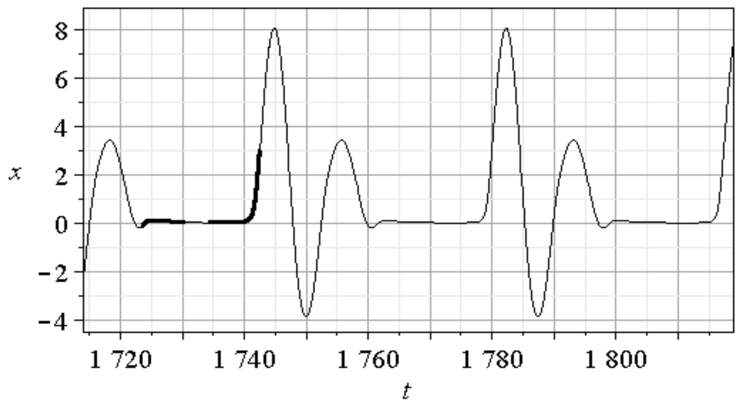
№	Название и ХП точки	Бифуркации	ХП точки
1	седлоузел($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$)	рождение седлоузла	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$
2	седлоузел ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$)	рождение седлофокуса	$Re\lambda_{1,2} > 0,\ \lambda_3 < 0$
3	седлофокус ($Re\lambda_{1,2} > 0,\ \lambda_3 < 0$)	рождение узлофокуса	$Re\lambda_{1,2} < 0,\ \lambda_3 < 0$
4	узлофокус ($Re\lambda_{1,2} < 0,\ \lambda_3 < 0$)	рождение узла	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$
5	узел ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$)	рождение узлофокуса	$Re\lambda_{1,2} < 0,\ \lambda_3 < 0$
6	узлофокус ($Re\lambda_{1,2} < 0,\ \lambda_3 < 0$)	рождение седлофокуса	$Re\lambda_{1,2} > 0,\ \lambda_3 < 0$
7	седлофокус ($Re\lambda_{1,2} > 0,\ \lambda_3 < 0$)	рождение седлоузла	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$
8	седлоузел ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$)	рождение седлофокуса	$Re\lambda_{1,2} > 0,\ \lambda_3 < 0$

Увеличивая параметр C, получим каскад предельных циклов с кратными периодами.

Приведем предельный цикл (рис. 4, *а, б)* с увеличением периода в три раза ($(C, L, R, n) = (2{,}8; 1; 15; -0{,}4)$). Здесь имеет место длительный период времени установления периодического движения. На отмеченном участке $m - n$ (рис. 4), *а* все точки имеют характер узла с характеристическими показателями $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$.



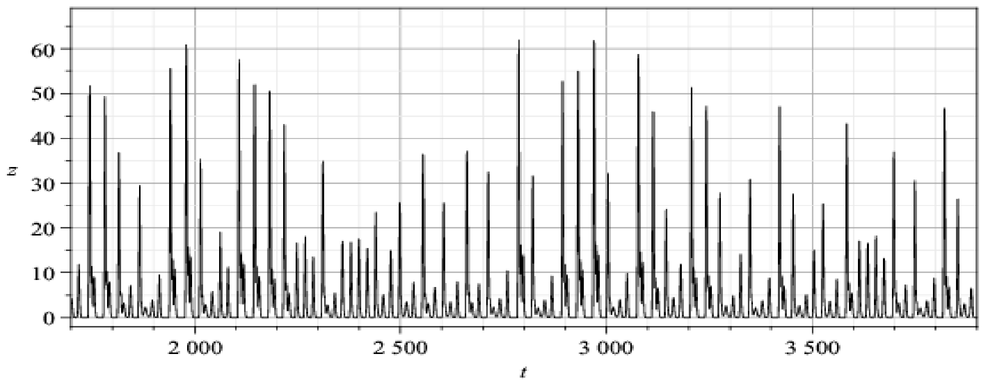
а



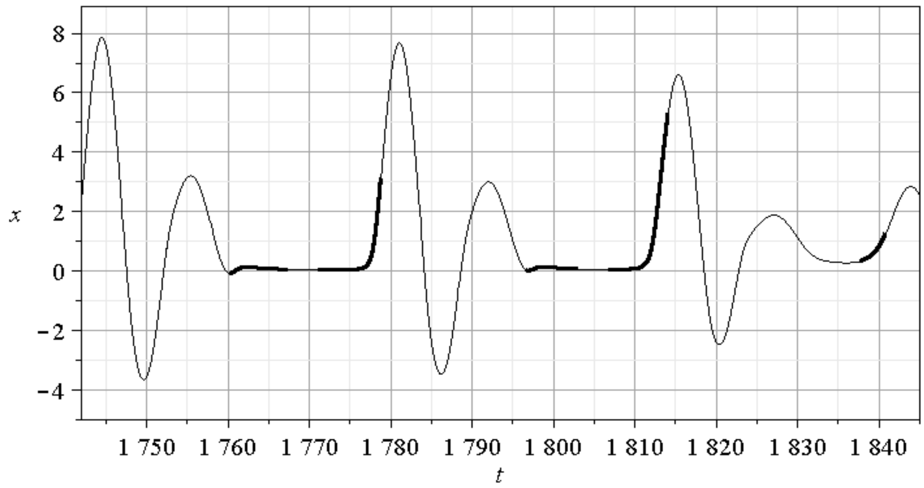
б

Рис. 4

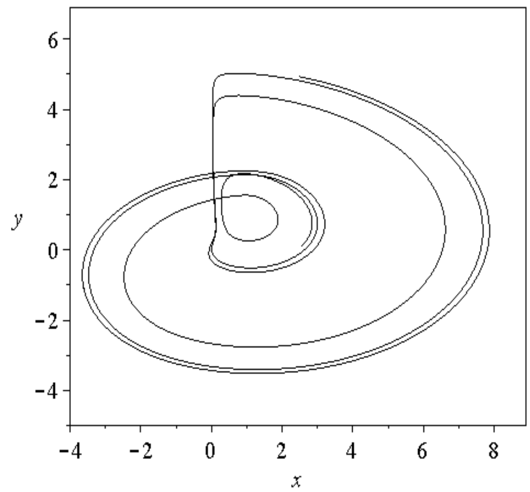
На рис. 4, *б* отмечены жирной линией два участка, которым соответствуют узловые точки (характеристические показателями $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$) и седлоузловые точки. Тонкими линиями обозначены узлофокусные и седлофокусные точки. Здесь также величина $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$ для всех точек аттрактора.



а



б



в

Рис. 5

Процесс образования регулярных аттракторов заканчивается при некотором значении параметра, при котором траектория не замыкается и образует странный аттрактор (рис. 5, *а, б, в*) $(C, L, R, n) = (2{,}81; 1; 15; -0{,}4)$. Периодичность процесса сохраняется. Орбитальная неустойчивость вызвана неповторяемой бифуркационной картиной за период. На рис. 5, *б* жирными линиями обозначены точки с узловыми ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$) и седлоузловыми характеристическими показателями. Тонкими линиями обозначены узлофокусные и седлофокусные точки. На каждом витке траектория орбитально неустойчива, однако величина $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$ для всех точек траектории фрагмента на рис. 5, *б, в*.

4. Бифуркация, порождающая притягивающую неподвижную точку.

Это состояние динамической системы (3) соответствует гашению дуги. Выясним физические причины этого явления. Заметим, что предельный цикл (рис. 2, *а, б*), циклы кратного увеличения периода (рис. 3, *а, б*, рис.4, *а, б*) имеют участки узловых точек на установившейся траектории, где $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$. Это точки $4-5$, согласно таблиц 1, 2 и отрезок $m-n$ (рис. 4). Обозначим $|\sigma| = |\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3|$. Для случаев, перечисленных выше, $|\sigma|>1$, но не намного превышает единицу. В этом случае траектория минует участки узловых точек.

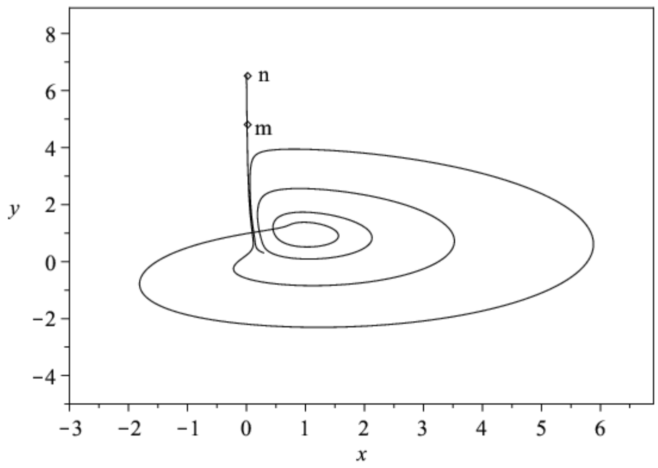


Рис. 6

Введем параметры $(C, L, R, n) = (2{,}814; 1; 15; -0{,}4)$ и приведем фазовый портрет для этих значений параметров (рис. 6). Здесь на отрезке $m-n$ величина $|\sigma|>>1$ и дорастает до высокого порядка, что превышает существующий в тысячу и более раз. Именно это обстоятельство воспринимается как существование притягивающей неподвижной точки.

Заключение.

В работе рассмотрены три вида аттракторов: предельный цикл, странный аттрактор и неподвижная точка, к которой стремится изображающая точка. С помощью характеристического уравнения (6) системы в вариациях изучены бифуркации точек траектории и указана физическая причина появления предельного цикла кратного периода и странного аттрактора. Одна особая точка – седлофокус формирует круговую траекторию. Вторая особая точка системы (3) – седлоузел. Эта точка влияет на конфигурацию кривой, но относительно этой точки не возникает круговой траектории. Странный аттрактор рождается в процессе потери устойчивости орбиты системы относительно одной особой точкой S и обусловлен неповторяющейся качественной картиной бифуркационного процесса.

Вычисление характеристических показателей Ляпунова системы (1) связано с применением технического подхода идентификации аттрактора, который имеет смысл в системе (1) при $m > 3$. Вычислительные алгоритмы относятся к трудам итальянской вычислительной школы семидесятых годов прошлого века (результаты изложены в монографии [1]). В данной работе анализ бифуркаций и качественный анализ дают ответы на следующие вопросы: как возникает регулярный аттрактор; как влияет изменение качества бифуркаций на орбитальную устойчивость и появление странного аттрактора. Практический интерес представляет нахождение и качественный анализ режима, который вызывает гашение дуги.

Альтернативой этому случаю является система Лоренца, в которой странный аттрактор возникает при перескоке изображающей точки из области притяжения одной особой точки в область притяжения другой. В системе Лоренца существуют две равноценные особые точки (два седлофокуса), относительно которых могут возникать орбиты движения с потерей устойчивости.

РЕЗЮМЕ. Досліджено біфуркації у тривимірній системі, яка моделює електричне коло з дугою. Якісний аналіз відноситься до граничних циклів, дивного аттрактора та нерухомої точки, до якої прямує зображувана точка.

1. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.
2. *Мартинюк А.А.,Никитина Н.В.* О периодическом движении и бифуркациях в трехмерных нелинейных системах // Нелінійні коливання. – 2014 – **17**, № 2 – С. 268 – 280.
3. *Сидорец В.Н., Пентегов И.В.* Детерминированный хаос в нелинейных цепях с электрической дугой. – К.: Сварка, 2013. – 272 с.
4. *Федоренко В.В., Шарковский А.Н.* О сосуществовании гомоклинических и периодических траекторий // Нелинейная динамика. – 2010. – **6**, № 1. – С. 207 – 217.
5. *Anishchenko V.S., Astakhov S.V., Vadivasova T.E.* Diagnostics of the Degree of Noise Influence on a Nonlinear System Using Relative Metric Entropy // Regular and Chaotic Dynamics. – 2010. – **15**, № 2 – 3. – P. 263 -–276.
6. *Krys'ko V.A.,Yakovleva T.V., Dobriyan V.V., Papkova I.V.* Chaotic Synchronization of Vibration of the Multilayer Mechanical Systems // Int.Appl.Mech. – 2014. – **50**, N 6. – P. 410 – 420.
7. *Leonov G.A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St. Peterburg: University Press, 2008. – 160 p.
8. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* Bifurcations and Multistability of a Three-Dimensional System // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 223 – 231.
9. *Martynyuk A.A. , Nikitina N.V.* On Periodic Motions in Three-Dimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 369 – 379.
10. *Neimark, Yu.I. and Landa, P.S.* Stochastic and Chaotic Oscillations.– Dordrecht: Kluwer, 1992. – 424 p.
11. *Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. – Singapore:World Scientific, 1998. – 416 p.
12. *Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. – Singapore:World Scientific, 2001. – 592 p.

Поступила 30.12.2014 Утверждена в печать 31.03.2016