

А. Д. Погребняк

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УСТАЛОСТИ ПРИ ДВУХОСНОМ
КОМБИНИРОВАННОМ СИММЕТРИЧНОМ И АСИММЕТРИЧНОМ
ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИЯХ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина; creep@inmtech.kiev.ua*

Abstract. One of the possible approaches to analysis of the ultimate state and the fatigue life-time is considered for the simplest structural members within the condition of syn-phase loading by the cyclic tension-compression and cyclic torsion as well as the cyclic bending and cyclic torsion. The solution is constructed basing on the model of ultimate state, that gives the dependence between amplitudes of ultimate stresses in the form of power transcendental function. The results of analysis are approved experimentally on an example of fatigue fracture of solid prismatic and thin-wall tubular specimens.

Key words: high-cycle fatigue, fatigue life-time, solid prismatic bar, thin-wall tube, combined loading, cyclic tension-compression, cyclic torsion, cyclic bending.

Введение.

Проблема усталостных разрушений материалов и элементов конструкций, несмотря на огромное число выполненных в этом направлении работ, всё ещё остается актуальной как с теоретической, так и с прикладной точек зрения [4, 6, 13]. Особенно актуальными представляются задачи усталостного разрушения при различных видах комбинированного нагружения статическими и циклическими нагрузками, характерными, например, для большинства вращающихся валов, лопаток газовых турбин, колленчатых валов двигателей автомобилей, фюзеляжа и крыльев самолета.

Решение задач усталости при комбинированных режимах нагружения строится или на основе критериев усталостного разрушения, сформулированных для сложного напряженного состояния [1, 13, 16], или с использованием эмпирических соотношений, полученных путем аппроксимации экспериментальных диаграмм предельных напряжений [4, 12, 13]. В качестве критериев усталостного разрушения, чаще всего, используются: критерий максимальных нормальных напряжений, критерий максимальных касательных напряжений и критерий удельной энергии формоизменения. Для аппроксимации диаграмм предельных напряжений и формулировки эмпирических соотношений, чаще всего, привлекаются зависимости эллиптического вида.

Классические критерии усталостного разрушения удовлетворяют некоторым научным концепциям, однако их приложение к решению практических задач всё ещё остается ограниченным. В частности, эти критерии оказываются справедливыми только тогда, когда выполняются определенные соотношения между характеристиками усталостной прочности на сдвиг и на растяжение. Для реальных материалов эти соотношения могут быть зависимы от долговечности работы конструкции, в ходе которой вероятны изменения физических и механических свойств материалов [15], так что ни один из выделенных критериев не является общим. Ещё большие ограничения накладываются на эмпирические соотношения, которые для большинства конструкционных материалов оказались непригодными.

В работах [9 – 11] построена модель предельного состояния для условий одноосного асимметричного нагружения в форме степенной трансцендентной функции и показана возможность обобщения структуры модели на сложное напряженное состояние и учета концентрации напряжений. Модель позволяет охватить практически все формы диаграмм предельных напряжений, характерных для большинства конструкционных материалов и включающих выпуклые, вогнутые и близкие к линейным. Предложенная модель отражает усталостное разрушение материала при различных видах одноосного нагружения, не вычлняя этапов зарождения и развития трещин. Кинетика усталостного разрушения при циклическом нагружении рассматривается в работе [14].

В данной работе степенная трансцендентная функция используется для построения моделей предельного состояния и решения на этой основе задач усталости при двухосном комбинированном симметричном и асимметричном циклическом нагружении.

§1. Постановка задачи.

Рассматривается усталостное разрушение сплошных призматических стержней и тонкостенных трубчатых элементов (рис. 1) из изотропных металлических материалов при комбинированном синфазном нагружении симметричным и асимметричным циклическим растяжением-сжатием и циклическим кручением, симметричным и асимметричным циклическим изгибом и циклическим кручением.

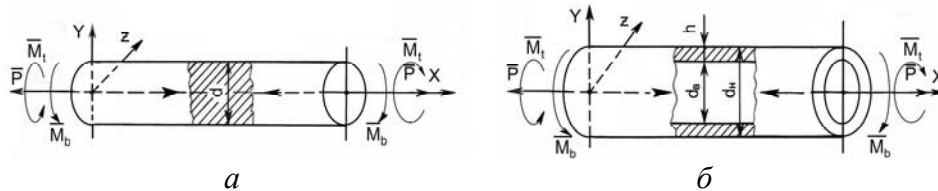


Рис. 1

Компоненты нормальных $\sigma(t)$ и касательных $\tau(t)$ напряжений двухосного переменного напряженного состояния заданы соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= \sigma_{xm} + \sigma_{xa}g(t); & \sigma_y(t) &= 0; & \sigma_z(t) &= 0; \\ \tau_{xz}(t) &= \tau_{xzm} + \tau_{xza}g(t); & \tau_{yx}(t) &= 0; & \tau_{zy}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где σ_{xm} , τ_{xym} – постоянные составляющие нормальных и касательных компонент; σ_{xa} , τ_{xza} – амплитудные значения циклических составляющих нормальных и касательных компонент; $g(t)$ – некоторая периодическая функция времени t , изменяющаяся в пределах от -1 до $+1$.

Компоненты нормальных и касательных напряжений в (1.1) при нагружении сплошных призматических стержней осевой нагрузкой P , изгибающим моментом M_b и крутящим моментом M_τ , которые могут включать как постоянную, так и циклическую составляющую, определяются из уравнений

$$\sigma = \frac{4P}{\pi d^2}; \quad \sigma_b = \frac{32M_b}{\pi d^3}; \quad \tau = \frac{16M_\tau}{\pi d^3}, \quad (1.2)$$

а при нагружении тонкостенных трубчатых элементов – из уравнений

$$\sigma = \frac{4P}{\pi(d_H^2 - d_B^2)}; \quad \sigma_b = \frac{32M_b d_H}{\pi(d_H^4 - d_B^4)}; \quad \tau = \frac{16M_\tau d_H}{\pi(d_H^4 - d_B^4)}, \quad (1.3)$$

где d – диаметр сплошного призматического стержня; d_H , d_B – наружный и внутренний диаметры тонкостенного трубчатого элемента.

Принимаем далее, что амплитудные значения σ_{xa} и τ_{xza} переменных нормальных и касательных напряжений не зависят от времени (стационарный режим), максимальные напряжения в цикле не превышают пределов текучести материала σ_Y и τ_Y и достаточно быстро (частота нагружения $f \geq 5 \div 10$ Гц) изменяются от цикла к циклу. В этом случае усталостное разрушение реализуется в многоциклового области, где число циклов до разрушения $n_R \geq 10^4$. Кроме того, соотношения (1.1) отражают условия синфазности напряжений, что, согласно теории пластичности, адекватно условию простого нагружения [1].

Зависимость между предельными амплитудами нормальных σ_a и касательных τ_a напряжений и средними нормальным σ_m и касательным τ_m напряжениями одноосного асимметричного циклического нагружения задаётся соотношениями [9]

$$\frac{\sigma_{xa}}{\sigma_n(n_R)} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{xm}}{\sigma_B} \right) \right]^\lambda \quad \text{и} \quad \frac{\tau_{xza}}{\tau_n(n_R)} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau_{xzm}}{\tau_B} \right) \right]^\mu, \quad (1.4)$$

а зависимость между предельными амплитудами нормальных σ_{xa} и касательных τ_{xza} напряжений двухосного комбинированного симметричного циклического нагружения – соотношениями [11]

$$\frac{\tau_{xza}}{\tau_n(n_R)} - \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{xa}}{\sigma_n(n_R)} \right] \right\}^\eta = 0 \rightarrow \frac{\sigma_{xa}}{\sigma_n(n_R)} - \frac{2}{\pi} \arccos \left[\frac{\tau_{xza}}{\tau_n(n_R)} \right]^{1/\eta} = 0, \quad (1.5)$$

в которых граничные условия выполняются точно ($\sigma_{xa} = \sigma_n$ при $\sigma_{xm} = 0$; $\sigma_{xm} = \sigma_B$ при $\sigma_{xa} = 0$; $\tau_{xza} = \tau_n$ при $\tau_{xzm} = 0$; $\tau_{xzm} = \tau_B$ при $\tau_{xza} = 0$ и $\tau_{xza} = \tau_n$ при $\sigma_{xa} = 0$; $\sigma_{xa} = \sigma_n$ при $\tau_{xza} = 0$). Здесь $\sigma_n(n_R)$ и $\tau_n(n_R)$ – пределы ограниченной усталости при чистом растяжении-сжатии или при чистом изгибе и при чистом кручении, так что

$$n_R = \frac{1}{(1 + q_\sigma) D_\sigma \sigma_n^{q_\sigma}} \quad \text{и} \quad n_R = \frac{1}{(1 + q_\tau) D_\tau \tau_n^{q_\tau}}; \quad (1.6)$$

σ_B , τ_B – пределы кратковременной прочности при растяжении или при изгибе и при кручении; n_R – число циклов до разрушения; λ , μ , η , q_σ , D_σ , q_τ , D_τ – экспериментально определяемые коэффициенты.

Задача заключается в обобщении моделей предельного состояния (1.4) и (1.5) на двухосное асимметричное циклическое нагружение и в решении задач по расчету предельных напряжений и усталостной долговечности сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых элементов при комбинированном нагружении циклическим растяжением-сжатием и циклическим кручением, циклическим изгибом и циклическим кручением.

§2. Модели усталостного разрушения.

В качестве моделей усталостного разрушения, используемых для решения задач усталости при двухосном комбинированном асимметричном нагружении, рассматриваются модели предельного состояния, устанавливающие зависимость между разрушающими значениями амплитуд нормальных и касательных напряжений, и построенные на их основе уравнения для расчета усталостной долговечности.

2.1. Модели предельного состояния. Обобщение моделей предельного состояния (1.4) и (1.5) на условия двухосного асимметричного нагружения и учет соответственно влияния статической компоненты цикла напряжений на предельное состояние может быть осуществлен, исходя из гипотезы эквивалентности [1, 4].

Согласно гипотезе эквивалентности считается, что каждому асимметричному циклу напряжений можно поставить в соответствие эквивалентный по числу циклов до разрушения симметричный цикл. В этом случае компоненты двух эквивалентных напряженных состояний в (1.1) будут связаны уравнениями

$$\begin{aligned}\sigma_{x\text{aeqv}}(t) &= \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{xm}}{\sigma_B} \right) \right)^{-\lambda} \sigma_{xa} g(t); \quad \sigma_{y\text{aeqv}}(t) = 0; \quad \sigma_{z\text{aeqv}}(t) = 0; \\ \tau_{xz\text{aeqv}}(t) &= \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau_{xzm}}{\tau_B} \right) \right)^{-\mu} \tau_{xza} g(t); \quad \tau_{y\text{aeqv}}(t) = 0; \quad \tau_{zy\text{aeqv}}(t) = 0,\end{aligned}\quad (2.1)$$

в которых выражения для эквивалентных напряжений $\sigma_{x\text{aeqv}}(t)$ и $\tau_{xz\text{aeqv}}(t)$ получены из (1.4) при условии, что $\sigma_{x\text{aeqv}}(t) = \sigma_n(n_R)$ и $\tau_{xz\text{aeqv}}(t) = \tau_n(n_R)$.

Таким образом, гипотеза эквивалентности позволяет в условия прочности и соответственно в модели предельного состояния при симметричных циклах ввести приведенные к симметричному циклу напряжения, изменяющиеся по асимметричным циклам. Тогда, подставляя (2.1) в первое соотношение в (1.5), модель предельного состояния при двухосном комбинированном асимметричном нагружении записывается в виде

$$\frac{1}{\left[\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B)) \right]^\mu \tau_n(n_R)} - \left\{ \cos \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{1}{\left[\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B)) \right]^\lambda \sigma_n(n_R)} \frac{\sigma_a}{\sigma_n(n_R)} \right\} \right\}^\eta = 0, \quad (2.2)$$

раскладывая в котором функцию $\cos^\eta \{ \}$ в ряд и ограничиваясь тремя членами разложения, получаем уравнение

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{1}{\left[\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B)) \right]^\mu \tau_n(n_R)} \right\}^{1/\eta} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{1}{\left[\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B)) \right]^\lambda \sigma_n(n_R)} \frac{\sigma_a}{\sigma_n(n_R)} \right\}^2 - \\ - \frac{1}{24} \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{1}{\left[\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B)) \right]^\lambda \sigma_n(n_R)} \frac{\sigma_a}{\sigma_n(n_R)} \right\}^4 = 1,\end{aligned}\quad (2.3)$$

где с целью упрощения формы записи принято, что $\sigma_m = \sigma_{xm}$; $\sigma_a = \sigma_{xa}$; $\tau_m = \tau_{xzm}$; $\tau_a = \tau_{xza}$. В (2.2) и (2.3) также принято, что структура моделей предельного состояния не зависит от всех немаксимальных значений переменных напряжений ($g(t) = 1$), а величины σ_B , $\sigma_n(n_R)$, τ_B , $\tau_n(n_R)$ не зависят от направления координатных осей.

Подставляя далее (2.1) во второе соотношение в (1.5), для зависимости между предельными значениями амплитуд нормальных и касательных напряжений получаем уравнение

$$\frac{1}{\left[\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B)) \right]^\lambda \sigma_n(n_R)} - \frac{2}{\pi} \arccos \left\{ \frac{1}{\left[\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B)) \right]^\mu \tau_n(n_R)} \right\}^{1/\eta} = 0, \quad (2.4)$$

раскладывая в котором функцию $\arccos \{ \}$ в ряд и ограничиваясь тремя членами разложения – уравнение

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left[\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B)) \right]^\lambda \sigma_n(n_R)} + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{\left[\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B)) \right]^\mu \tau_n(n_R)} \right\}^{1/\eta} + \\ + \frac{1}{3\pi} \left\{ \frac{1}{\left[\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B)) \right]^\mu \tau_n(n_R)} \right\}^{1/\eta} = 1,\end{aligned}\quad (2.5)$$

где все обозначения совпадают с принятыми в (2.2) и (2.3).

В моделях предельного состояния (2.2) и (2.4) граничные условия, как и в (1.5), удовлетворяются точно по каждой из компонент цикла напряжений. В моделях (2.3) и (2.5) точно удовлетворяются граничные условия только по одной компоненте. Однако, максимальная погрешность по другой компоненте не превышает 2% и в дальнейшем решение задач усталости строится на моделях предельного состояния (2.3) и (2.5), близких по структуре к некоторым известным моделям [4, 12, 13].

Модели предельного состояния (2.3) и (2.5) задают зависимость между предельными амплитудами двухосного комбинированного асимметричного цикла напряжений в нормированной (обобщенной) системе координат, инвариантной по отношению к числу циклов до разрушения n_R . Подставляя в (2.3) и (2.5) соотношения (1.6), разрешенные относительно σ_n и τ_n , получаем модели предельного состояния в форме

$$\left\{ \frac{[(1+q_\tau)D_\tau n_R]^{1/q_\tau}}{[\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B))]^\mu} \tau_a \right\}^{1/\eta} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi [(1+q_\sigma)D_\sigma n_R]^{1/q_\sigma}}{2 [\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B))]^\lambda} \sigma_a \right\}^2 - \frac{1}{24} \left\{ \frac{\pi [(1+q_\sigma)D_\sigma n_R]^{1/q_\sigma}}{2 [\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B))]^\lambda} \sigma_a \right\}^4 = 1 \quad (2.6)$$

и, соответственно, в форме

$$\frac{[(1+q_\sigma)D_\sigma n_R]^{1/q_\sigma}}{[\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B))]^\lambda} \sigma_a + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{[(1+q_\tau)D_\tau n_R]^{1/q_\tau}}{[\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B))]^\mu} \tau_a \right\}^{1/\eta} + \frac{1}{3\pi} \left\{ \frac{[(1+q_\tau)D_\tau n_R]^{1/q_\tau}}{[\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B))]^\mu} \tau_a \right\}^{3/\eta} = 1, \quad (2.7)$$

задающими зависимость между предельными амплитудами двухосного комбинированного асимметричного цикла напряжений по параметру числа циклов до разрушения n_R .

2.2. Уравнения для расчета усталостной долговечности. Уравнения устанавливают зависимость числа циклов до разрушения n_R от одной из компонент цикла напряжений по параметру другой компоненты или по параметру их отношения.

Для зависимости числа циклов до разрушения n_R от амплитуды касательных напряжений τ_a из (2.6) получаем уравнение

$$n_R = [\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B))]^{1/\mu q_\tau} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi [(1+q_\sigma)D_\sigma n_R]^{1/q_\sigma}}{2 [\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B))]^\lambda} \sigma_a \right\}^2 + \frac{1}{24} \left\{ \frac{\pi [(1+q_\sigma)D_\sigma n_R]^{1/q_\sigma}}{2 [\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B))]^\lambda} \sigma_a \right\}^4 \right\}^{n q_\tau} \frac{1}{(1+q_\tau)D_\tau \tau_a^{q_\tau}}, \quad (2.8)$$

заменяя в котором величину σ_a на τ_a/v , имеем уравнение

$$n_R = [\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B))]^{1/\mu q_\tau} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi [(1+q_\sigma)D_\sigma n_R]^{1/q_\sigma} \tau_a}{2 [\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B))]^\lambda v} \right\}^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{24} \left\{ \frac{\pi [(1+q_\sigma)D_\sigma n_R]^{1/q_\sigma} \tau_a}{2 [\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B))]^\lambda v} \right\}^4 \right\}^{nq_\tau} \frac{1}{(1+q_\tau)D_\tau \tau_a^{q_\tau}}, \quad (2.9)$$

задающие зависимость n_R от τ_a по параметру σ_a и по параметру v , соответственно.

Для зависимости числа циклов до разрушения n_R от амплитуды нормальных напряжений σ_a из (2.7) получаем уравнение

$$n_R = [\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B))]^{\lambda q_\sigma} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{[(1+q_\tau)D_\tau n_R]^{1/q_\tau}}{[\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B))]^\mu} \tau_a \right\}^{1/\eta} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3\pi} \left\{ \frac{[(1+q_\tau)D_\tau n_R]^{1/q_\tau}}{[\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B))]^\mu} \tau_a \right\}^{3/\eta} \right\}^{q_\sigma} \frac{1}{(1+q_\sigma)D_\sigma \sigma_a^{q_\sigma}}, \quad (2.10)$$

заменяя в котором величину τ_a на $v\sigma_a$, имеем уравнение

$$n_R = [\cos(\pi/2(\sigma_m/\sigma_B))]^{\lambda q_\sigma} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{[(1+q_\tau)D_\tau n_R]^{1/q_\tau}}{[\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B))]^\mu} v\sigma_a \right\}^{1/\eta} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3\pi} \left\{ \frac{[(1+q_\tau)D_\tau n_R]^{1/q_\tau}}{[\cos(\pi/2(\tau_m/\tau_B))]^\mu} v\sigma_a \right\}^{3/\eta} \right\}^{q_\sigma} \frac{1}{(1+q_\sigma)D_\sigma \sigma_a^{q_\sigma}}, \quad (2.11)$$

задающие зависимость n_R от σ_a по параметру τ_a и по параметру v , соответственно.

Уравнения (2.8) – (2.11) и все построенные на их основе уравнения для расчета усталостной долговечности решаются численно методом итераций.

2.3. Методика определения материальных констант. Модели предельного состояния (2.2) – (2.7) и построенные на их основе модели усталостного разрушения (2.8) – (2.11) содержат в общем случае двухосного комбинированного нагружения 3 группы материальных констант, подлежащих определению из системы базовых экспериментов.

Первая группа включает пределы кратковременной статической прочности на растяжение σ_B , на изгиб σ_B^b и на кручение τ_B . Пределы прочности на растяжение σ_B и на кручение τ_B определяются по результатам испытаний образцов материала на одноосное растяжение и на чистое кручение. Предел прочности при изгибе σ_B^b определяется с использованием соотношений, связывающих величину σ_B^b с пределом прочности на растяжение σ_B .

Вторая группа материальных констант включает коэффициенты q_σ , D_σ и q_τ , D_τ , характеризующие сопротивление усталости при одномерном напряженном со-

стоянии и при симметричном цикле нагружения. Значения коэффициентов q_σ , D_σ и q_τ , D_τ определяются по результатам аппроксимации уравнениями (1.6) экспериментальных данных испытаний образцов материала на усталость при симметричном ($\sigma_m = 0$) циклическом растяжении-сжатии (или изгибе) и симметричном ($\tau_m = 0$) циклическом кручении, соответственно.

Задача определения коэффициентов q_σ , D_σ и q_τ , D_τ в (1.6) сводится в итоге к минимизации функционала

$$\Phi(q_\sigma, D_\sigma) = \sum_{j=1}^s \left\{ n_{Rj}(\sigma_{aj}) - \frac{1}{(1+q_\sigma)D_\sigma(\sigma_a)^{q_\sigma}} \right\}^2 \quad (2.12)$$

и, соответственно, функционала

$$\Phi(q_\tau, D_\tau) = \sum_{j=1}^s \left\{ n_{Rj}(\tau_{aj}) - \frac{1}{(1+q_\tau)D_\tau(\tau_a)^{q_\tau}} \right\}^2, \quad (2.13)$$

где σ_{aj} , τ_{aj} , n_{Rj} – набор дискретных значений амплитуд циклических нормальных и касательных напряжений и соответствующих им чисел циклов до разрушения.

Третья группа материальных констант включает показатели степени λ и μ , характеризующие чувствительность материала к асимметрии цикла напряжений в условиях одномерного напряженного состояния, и показатель степени η , характеризующий чувствительность материала к двухосности нагружения.

Для определения значений коэффициентов λ и μ необходимы экспериментальные данные на усталость при асимметричных циклах нагружения для нескольких комбинаций статических σ_m , τ_m и амплитуд циклических σ_a , τ_a напряжений. Соотношения между значениями σ_a и σ_m , τ_a и τ_m , задаваемые коэффициентом амплитуд A , могут быть выбраны в виде

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\tau_a}{\tau_m} = 0; \frac{1}{2}; 1, 0; \frac{3}{2}; \infty, \quad (2.14)$$

причем значения $A=0$ и $A=\infty$ задают испытания на кратковременную статическую прочность и на усталость при симметричных циклах нагружения.

В этом случае показатели степени λ и μ определяются из условия минимизации функционала

$$\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^k \left\{ \left[\frac{\sigma_{aj}}{\sigma_{nj}(n_{Rj})} \right]_{\text{exp}} - \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{mj}}{\sigma_B} \right) \right]^\lambda \right\}^2 \quad (2.15)$$

и, соответственно, функционала

$$\Phi(\mu) = \sum_{j=1}^k \left\{ \left[\frac{\tau_{aj}}{\tau_{nj}(n_{Rj})} \right]_{\text{exp}} - \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau_{mj}}{\tau_B} \right) \right]^\mu \right\}^2, \quad (2.16)$$

где σ_{aj} , σ_{mj} , τ_{aj} , τ_{mj} и n_{Rj} , σ_{nj} , τ_{nj} – набор дискретных значений амплитуд циклических напряжений и средних напряжений и соответствующих им чисел циклов до разрушения и пределов ограниченной усталости.

Для определения значений коэффициента η необходимо располагать экспериментальными данными на усталость при двухосном нагружении несколькими комбинациями амплитуд нормальных σ_a и касательных τ_a напряжений и симметричных циклах. Соотношения между амплитудами циклических напряжений τ_a и σ_a могут быть выбраны из ряда

$$\nu = \frac{\tau_a}{\sigma_a} = 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}; 1, 0; \sqrt{3}; \infty, \quad (2.17)$$

в который входят соотношения, соответствующие критерию максимальных нормальных напряжений, критерию максимальных касательных напряжений и критерию удельной энергии формоизменения. Значения $\nu = 0$ и $\nu = \infty$ задают испытания на усталость при симметричном чистом растяжении-сжатии или изгибе и симметричном чистом кручении.

Значения показателя степени η определяются из условия минимизации функционала

$$\Phi(\eta) = \sum_{j=1}^k \left\{ \left[\frac{\tau_{aj}}{\tau_{nj}(n_{Rj})} \right]_{\text{exp}} - \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{aj}}{\sigma_{nj}(n_{Rj})} \right) \right]^\eta \right\}^2, \quad (2.18)$$

где σ_{aj} , τ_{aj} и n_{Rj} , σ_{nj} , τ_{nj} – набор дискретных значений амплитуд нормальных и касательных напряжений двухосного симметричного цикла напряжений и соответствующих им чисел циклов до разрушения и ограниченных пределов ограниченной усталости при одноосном нагружении.

§3. Усталостное разрушение сплошных призматических стержней.

Рассмотрена задача расчета предельного состояния и усталостной долговечности сплошных призматических стержней при двухосном комбинированном нагружении симметричным циклическим растяжением-сжатием и симметричным циклическим кручением, симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением.

3.1. Материал стержней. Материальные константы. Рассмотрено усталостное разрушение стержней на примере разрушения сплошных цилиндрических образцов из стали JIS SNCM8 при комбинированном нагружении симметричным циклическим растяжением-сжатием и симметричным циклическим кручением и из стали 38ХНЗМФА, стали SAE 4340, алюминиевого сплава 76S-T61 и титанового сплава ПТ-3В при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением.

Значения коэффициентов q_σ , D_σ и q_τ , D_τ и значения показателя степени η , рассчитанных для исследованных материалов по изложенной в разделе 2.3 методике, приведены в табл. 1. Экспериментальные данные, использованные при определении коэффициентов, заимствованы из [2, 5, 7, 8, 18].

Таблица 1

Материал	q_σ		D_σ , МПа ⁻¹ ·цикл ⁻¹		q_τ	D_τ , МПа ⁻¹ ·цикл ⁻¹	η	
	растяж.–сжатие	изгиб	растяж.–сжатие	изгиб			растяж.–сжатие + кручен.	изгиб + кручен.
JIS SNCM8	15,38		1,10·10 ⁻⁴⁷		12,19	7,75·10 ⁻⁴¹	0,54	
38ХНЗМФА		15,38		4,64·10 ⁻⁴⁷	33,33	1,30·10 ⁻⁸⁸		0,69
SAE 4340		7,63		5,42·10 ⁻²⁷	23,25	2,61·10 ⁻⁶⁵		0,44
76S-T61		12,82		4,27·10 ⁻³⁷	12,19	2,82·10 ⁻³³		0,53
ПТ-3В		7,52		3,68·10 ⁻²⁷	5,68	9,37·10 ⁻²¹		6,98

3.2. Обобщенное предельное состояние. Под обобщенным предельным состоянием понимается состояние, которое задается в нормированной системе координат в форме зависимости между относительными значениями разрушающих амплитуд нормальных и касательных напряжений, инвариантной по отношению к числу циклов до разрушения. В общем случае переменного нагружения (1.1) обобщенное предельное состояние рассчитывается по уравнениям (2.2) и (2.3) или по уравнениям (2.4) и (2.5).

Результаты расчетов обобщенного предельного состояния при комбинированном симметричном циклическом нагружении, выполненные по уравнениям (2.2) и (2.3) при условии $\tau_m = \sigma_m = 0$ с использованием приведенных в табл. 1 значений коэффициентов, сопоставлены на рис. 2 с экспериментальными данными, полученными для различных значений параметра ν . Рассчитано предельное состояние для образцов из стали JIS SNCM8 (а) при комбинированном нагружении симметричным циклическим растяжением-сжатием и симметричным циклическим кручением и значениях $\nu = 0,25$ (\circ), $0,58$ (\bullet), $1,73$ (\bullet) и для образцов из алюминиевого сплава 76S-T61 (б) и из титанового сплава ПТ-3В (в) при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением и значениях $\nu = 0,21$ (\circ), $0,50$ (\bullet), $0,73$ (\bullet), $0,79$ (\bullet), $1,21$ (\bullet).

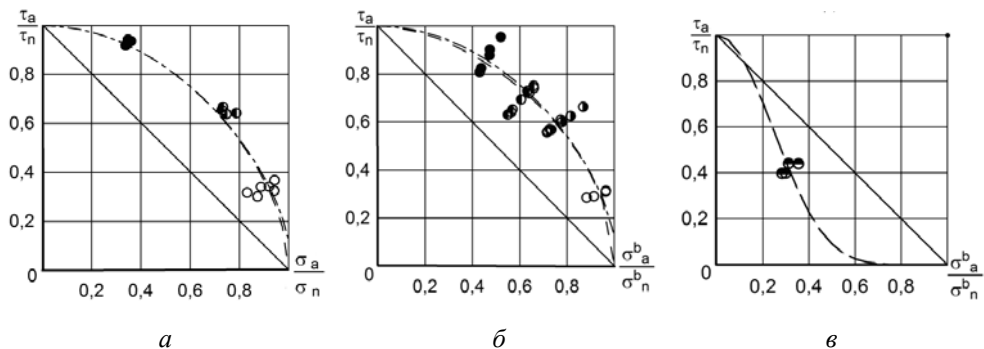


Рис. 2

Здесь и далее результаты расчетов нанесены линиями, а экспериментальные данные – точками. Расчеты по уравнению (2.2) нанесены штриховыми линиями, а по уравнению (2.3) – штрихпунктирными линиями.

3.3. Предельное состояние по параметру числа циклов до разрушения. В качестве предельного состояния рассматривается зависимость между разрушающими значениями амплитуд нормальных σ_a и касательных τ_a напряжений, построенная по параметру числа циклов до разрушения n_R . Эта зависимость, задающая предельное состояние в координатах « $\tau_a - \sigma_a$ », рассчитывается по уравнениям (2.6) или (2.7).

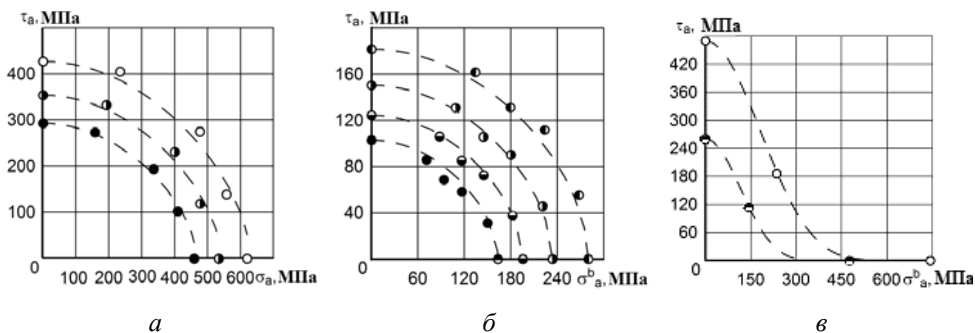


Рис. 3

Результаты расчетов предельного состояния при двухосном симметричном циклическом нагружении, выполненные по уравнению (2.6) с использованием приведенных в табл. 1 коэффициентов, сопоставлены на рис. 3 с экспериментальными данными для различных значений чисел циклов до разрушения n_R . Рассчитано предельное состояние для образцов из стали JIS SNCM8 (а) при комбинированном нагружении симметричным циклическим растяжением-сжатием и симметричным циклическим кручением и значениях $n_R = 10^4$ (○), 10^5 (●), 10^6 (●) циклов и для образцов из алюминиевого сплава 76S-T61 (б) и из титанового сплава ПТ-3В (в) при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением и значениях $n_R = 7 \cdot 10^4$ (○), 10^5 (●), 10^6 (●), $2 \cdot 10^6$ (●), 10^7 (●), 10^8 (●) циклов.

3.4. Усталостная долговечность. В качестве усталостной долговечности рассматривается зависимость числа циклов до разрушения n_R от амплитуды σ_a нормальной компоненты по параметру величины $\nu = \tau_a / \sigma_a$.

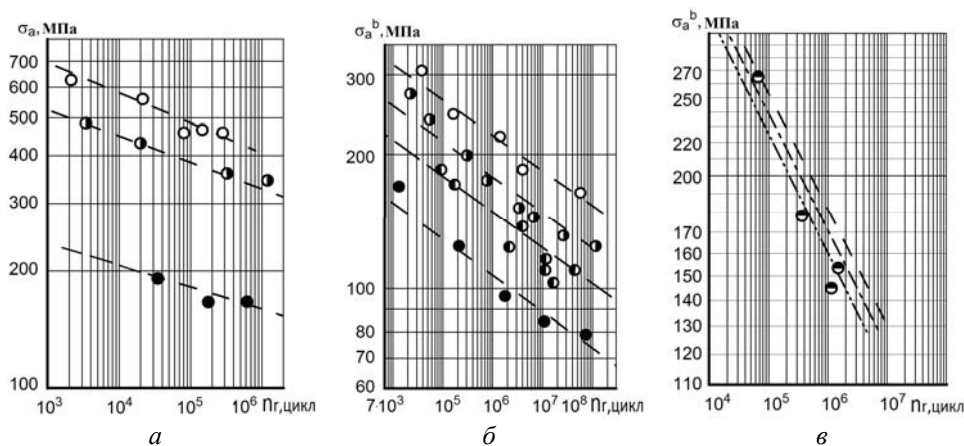


Рис. 4

Результаты расчетов усталостной долговечности сплошных призматических образцов при двухосном комбинированном нагружении, выполненных по уравнению (2.11) при $\sigma_m = \tau_m = 0$ с использованием приведенных в табл. 1 значений коэффициентов, сопоставлены на рис. 4 с экспериментальными данными при варьировании параметра ν . Рассчитана усталостная долговечность образцов стали JIS SNCM8 (а) при комбинированном нагружении симметричным циклическим растяжением-сжатием и симметричным циклическим кручением и значениях $\nu = 0,25$ (○), $0,58$ (●), $1,73$ (●) и образцов из алюминиевого сплава 76S-T61 (б) и из титанового сплава ПТ-3В (в) при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением и значениях $\nu = 0,207$ (○), $0,50$ (●), $0,732$ (●), $0,79$ (●), $1,207$ (●).

§4. Усталостное разрушение тонкостенных трубчатых элементов.

Решается задача расчета предельного состояния и усталостной долговечности тонкостенных трубчатых элементов при двухосном комбинированном нагружении. Как и в случае сплошных призматических стержней, рассматривается комбинированное нагружение симметричным циклическим растяжением-сжатием и симметричным циклическим кручением, симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением.

4.1. Материал трубчатых элементов. Материальные константы. Усталостное разрушение трубчатых элементов рассматривается на примере разрушения тонкостенных трубчатых образцов из стали JIS SNCM8 и стали 45 при комбинированном нагружении симметричным циклическим растяжением-сжатием и симметричным циклическим кручением и трубчатых образцов из стали 20 и стали StE 460 при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением.

Значения коэффициентов q_σ , D_σ , q_τ , D_τ и значения показателя степени η для исследованных материалов, рассчитанные по изложенной в разделе 2.3 методике, приведены в табл. 2. Экспериментальные данные, использованные при определении коэффициентов, заимствованы из [3, 17, 18].

Таблица 2

Материал	q_σ		D_σ , МПа ⁻¹ ·цикл ⁻¹		q_τ	D_τ , МПа ⁻¹ ·цикл ⁻¹	η	
	растяж.-сжатие	изгиб	растяж.-сжатие	изгиб			растяж.-сжатие + кручен.	изгиб + кручен.
JIS SNCM8	12,19		$8,27 \cdot 10^{-39}$		19,23	$9,95 \cdot 10^{-59}$	0,57	
Сталь 45	15,87		$3,77 \cdot 10^{-44}$		16,13	$4,59 \cdot 10^{-42}$	0,48	
Сталь 20		3,10		$1,23 \cdot 10^{-12}$	6,99	$9,39 \cdot 10^{-21}$		0,53
StE 460		5,46		$1,61 \cdot 10^{-18}$	5,24	$2,75 \cdot 10^{-17}$		0,57

4.2. Обобщенное предельное состояние. В общем случае комбинированного нагружения (1.1) обобщенное предельное состояние рассчитывается по уравнениям (2.2) и (2.3) или по уравнениям (2.4) и (2.5).

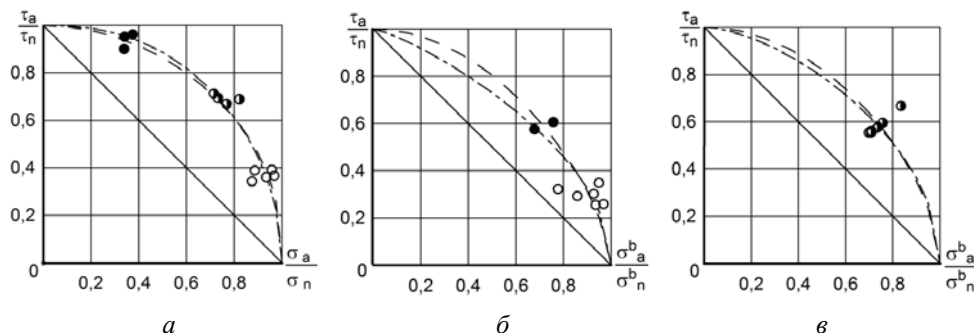


Рис. 5

Результаты расчетов обобщенного предельного состояния образцов стали JIS SNCM8, стали 20 и стали StE 460 при комбинированном симметричном циклическом нагружении, выполненных по уравнениям (2.2) и (2.3) при условии $\tau_m = \sigma_m = 0$, сопоставлены на рис. 5 с экспериментальными данными. Предельное состояние образцов стали JIS SNCM8 (а) рассчитано при комбинированном нагружении симметричным циклическим растяжением-сжатием и симметричным циклическим кручением и значениях параметра $\nu = 0,25$ (○); $0,58$ (●); $1,73$ (●). Предельное состояние образцов стали 20 (б) и стали StE 460 (в) рассчитано при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением и значениях параметра $\nu = 0,435$ (○); $0,58$ (●); $0,91$ (●). Расчеты, выполненные по уравнению (2.2) с использованием приведенных в табл. 2 коэффициентов, нанесены штриховыми линиями, а по уравнению (2.3) – штрихпунктирными линиями. Здесь и далее точками нанесены экспериментальные данные, заимствованные соответственно из [3, 17, 18].

4.3. Предельное состояние по параметру числа циклов до разрушения. В общем случае комбинированного нагружения (1.1) предельное состояние по параметру числа циклов до разрушения n_R рассчитывается по уравнению (2.6) или по уравнению (2.7).

Результаты расчетов предельного состояния в форме зависимости между τ_a и σ_a по параметру n_R для образцов стали JIS SNCM8, стали 20 и стали StE 460 при комбинированном симметричном циклическом нагружении, выполненных по уравнению (2.6) при условии $\tau_m = \sigma_m = 0$, сопоставлены на рис. 6 с экспериментальными данными.

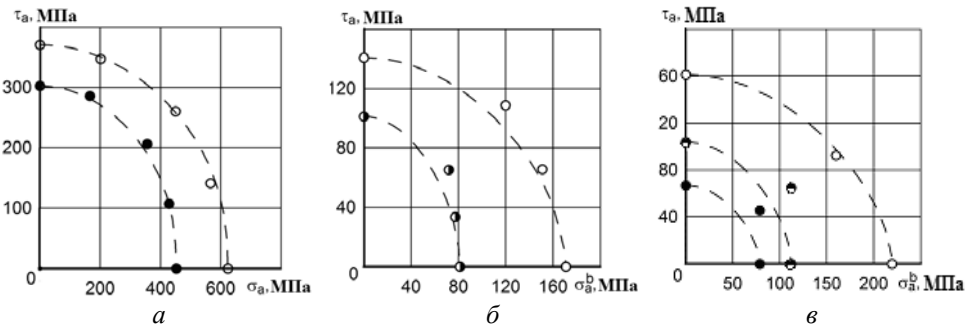


Рис. 6

Предельное состояние образцов стали JIS SNCM8 (а) рассчитано при комбинированном нагружении симметричным циклическим растяжением-сжатием и симметричным циклическим кручением и значениях $n_R = 10^4$ (○), $5 \cdot 10^5$ (●) циклов. Предельное состояние образцов стали 20 (б) и стали StE 460 (в) рассчитано при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением и значениях $n_R = 10^5$ (○), 10^6 (●), 10^7 (●) циклов.

4.4. Усталостная долговечность. Ниже зависимость числа циклов до разрушения n_R тонкостенных трубчатых образцов от амплитуды σ_a нормальной компоненты двухосного комбинированного нагружения рассчитывается по параметру ν . В общем случае комбинированного нагружения (1.1) зависимость n_R от σ_a определена по уравнению (2.11).

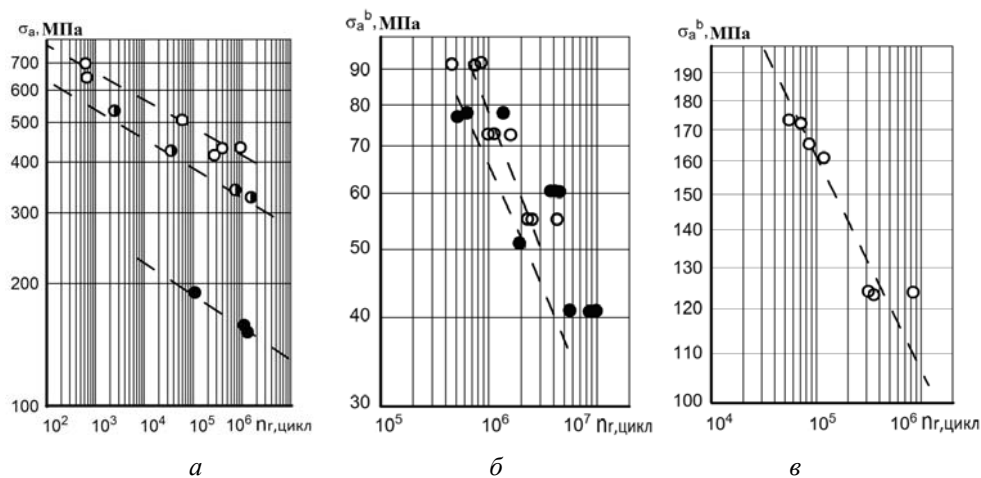


Рис. 7

Результаты расчетов усталостной долговечности образцов стали JIS SNCM8, стали 20 и стали StE 460 при комбинированном симметричном циклическом нагружении, выполненных по уравнению (2.11) при условии $\tau_m = \sigma_m = 0$, сопоставлены на рис. 7 с экспериментальными данными. Усталостная долговечность образцов стали JIS SNCM8 (а) рассчитана при комбинированном нагружении симметричным циклическим растяжением-сжатием и симметричным циклическим кручением и значениях $\nu = 0,25$ (○); $0,58$ (●); $1,73$ (●). Усталостная долговечность образцов стали 20 (б) и стали StE 460 (в) рассчитана при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением и значениях $\nu = 0,435$ (○); $0,58$ (●); $0,91$ (●). Расчеты выполнены с использованием значений коэффициентов, приведенных в табл. 2.

§5. Обсуждение результатов.

Эффективность решения задач усталости при двухосном комбинированном циклическом нагружении, основанного на моделях предельного состояния в форме степенных трансцендентных функций, обосновывается в работе на задачах расчета предельного состояния и усталостной долговечности сплошных призматических и тонкостенных трубчатых образцов. Рассмотрено комбинированное нагружение симметричным циклическим растяжением-сжатием и симметричным циклическим кручением, а также симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением. В качестве материалов образцов выбраны углеродистые и легированные стали, алюминиевый и титановый сплавы. Результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными.

В целом, как это следует из данных, приведенных на рис. 2 – 7, получено вполне удовлетворительное согласование результатов расчета с результатами экспериментов. Максимальная погрешность обобщенных диаграмм предельного состояния не превышает 18% и получена для образцов из алюминиевого сплава 76S-T61 (см. рис. 2, б) при комбинированном нагружении циклическим растяжением-сжатием и циклическим кручением. Характерно, что во всех рассмотренных случаях результаты расчетов обобщенного предельного состояния по приближенной модели (2.3) практически не отличаются от результатов расчетов по точной модели (2.2). Максимальная погрешность при расчетах предельного состояния по параметру числа циклов до разрушения получена для образцов из стали 20 (см. рис. 5, б) при комбинированном нагружении циклическим изгибом и циклическим кручением и составляет 24%. При расчетах усталостной долговечности максимальная погрешность по числу циклов до разрушения получена для образцов из титанового сплава ПТ-3В (см. рис. 4, в) и достигает 60%. Характерно, что показатель степени η в (1.5) для этого материала (см. табл. 1) существенно больше единицы. Во всех остальных случаях величина η меньше единицы и погрешность не превышает 20%. С увеличением числа членов ряда в разложении функции $\arccos(\cdot)$ в (2.4) до 4-х погрешность между результатами расчетов и экспериментальными данными для образцов из титанового сплава ПТ-3В (см. рис. 4, в – штрихпунктирная линия) уменьшается до 30%. В случае использования точной модели (2.4) результаты расчетов (см. рис. 4, в – штриховая линия с двумя точками) практически совпадают с результатами аппроксимации первым уравнением в (1.6). В целом, как видно, максимальные погрешности между результатами расчетов и экспериментальными данными не носят систематического характера и не связаны ни с типом образца, ни с видом комбинированного нагружения.

Заключение.

Один из эффективных подходов к решению задач усталости при двухосном комбинированном нагружении основан на моделях предельного состояния, задающих зависимость между предельными напряжениями в форме степенных трансцендентных функций. Модели позволяют при варьировании показателя степени охватить практически все формы связи между предельными значениями нормальной и касательной компонент двухосного напряженного состояния, а также решать задачи расчета предельных напряжений по параметру числа циклов до разрушения и задачи расчета числа циклов до разрушения при варьировании нормальных и касательных напряжений. В качестве базовых экспериментов при определении параметров модели использованы стандартные испытания образцов материала на усталость при двух одноосных режимах нагружения и ограниченный идентифицирующий эксперимент на усталость при двухосном нагружении.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано один із можливих підходів щодо розрахунку граничного стану та довговічності внаслідок втоми найпростіших елементів конструкцій за умов синфазного навантаження циклічним розтягом–стиском та циклічним скрученням, циклічним згином та циклічним скрученням. Розв'язок побудовано з використанням моделі граничного стану, що встановлює залежність між амплітудами граничних напружень у формі степеневі трансцендентної функції. Результати розрахунків апробовано експериментально на прикладі руйнування суцільних призматичних та тонкостінних трубчастих зразків.

1. *Биргер И.А.* Условия усталостной прочности при сложном напряженном состоянии // Прочность авиадвигателей / Сб. статей под ред. С.В.Серенсена. – М.: Оборонгиз, 1952. – № 7. – С. 130 – 163.
2. *Казенина А.Д., Маневич С.Л., Филимонов Г.Н.* Сопротивление усталости конструкционных сталей при циклическом кручении с изгибом // Прочность материалов и элементов конструкций. – Ленинград: Изд-во Ленинградского кораблестроительного ин-та, 1985. – С. 40 – 46.
3. *Панфилов Ю.А.* Описание предельного состояния при переменной двухосной напряженности и его применение в расчетах. Сообщ. 1. Простое нагружение // Пробл. прочности. – 1981, № 1. – С. 49 – 58.
4. *Серенсен С.В., Козаев В.П., Шнейдерович Р.М.* Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность // Руководство и справочное пособие под ред. С.В.Серенсена. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
5. *Шаманин Ю.А.* Усталостная прочность α -титановых сплавов при синфазном действии переменных нормальных и касательных напряжений // Пробл. прочности. – 1984, № 12. – С. 26 – 35.
6. *Collins J.A.* Failure of materials in mechanical design. Analysis. Prediction. Prevention. – New York: John Wiley & Sons, 1981. – 624 p.
7. *Findley W.N.* Fatigue of 76S-T61 Aluminum alloy under combined bending and torsion // Proc. ASTM. – 1952. – **52**. – P. 818 – 836.
8. *Findley W.N., Coleman J.J., Hanley B.C.* Theory for combined bending and torsion fatigue with data for SAE 4340 steel // Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals. – London, 1956. – P. 150 – 157.
9. *Golub V.P., Krizhanovskii V.I.* Evaluation of the limiting state under asymmetric multicycle load // Strength of Materials. – 1994. – **26**, N 4. – P. 243 – 252.
10. *Golub V.P., Krizhanovskii V.I.* An approach to analysis of fatigue strength under conditions of stress concentration in the process of high-cycle asymmetric loading // Strength of Materials. – 1997. – **29**, N 6. – P. 590 – 599.
11. *Golub V.P., Krizhanovskii V.I.* Problem of fatigue endurance calculation under combined cyclic tensile-compressive and torsional loading // Strength of Materials. – 2014. – **41**, N 1. – P. 110 – 121.
12. *Gough H.J., Pollard H.V.* The strength of metals under combined alternating stresses // Proc. Inst. Mech. Engrs. – 1935. – N 131. – P. 3 – 103.
13. *Heywood R.B.* Designing against fatigue. – London: Chapman and Hall Ltd., 1962. – 504 p.
14. *Kaminsky A.A.* Mechanics of the Delayed Fracture of Viscoelastic Bodies with Cracks: Theory and Experiment (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P. 485 – 548.
15. *Kuzin N.O.* A Mathematical Model Describing the Variation in Material Properties // Int. Appl. Mech. – 2015. – **50**, N 4. – P. 474 – 479.
16. *McDiarmid D.L.* A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction // Fatigue Fracture Eng. Mat. – 1994. – **17**. – P. 1475 – 1484.
17. *Sonsino C.M., Kueppers M.* Multiaxial fatigue of welded joints under constant and variable amplitude loading // Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. – 2001. – **24**, Iss. 5. – P. 309 – 327.
18. *Tanaka K., Matsuoka S.* The strength of JIS SNCM8 steel under combined alternating stresses / In: Advances in research on the strength and fracture of materials. – New-York: Pergamon Press, 1978. – **28**. – P. 1161 – 1168.

Поступила 17.04.2015

Утверждена в печать 31.03.2016