

Н. П. Семенюк, Н. Б. Жукова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАКРИТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЛОКАЛЬНЫМИ ПРОГИБАМИ

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; comros@inmtech.kiev.ua*

Abstract. A procedure of analytical solution is developed for the problem on stability and post-buckling of orthotropic cylindrical shell with allowance for transverse shear under the external pressure and axial compression. The shells under consideration are geometrically imperfect owing to presence the local deflection that has some restriction at both axes of coordinates. The problem is reduced to study of interaction of modes, to which the different critical loads of perfect shells correspond. Here the Byskov-Hatchinson asymptotical method is used. The equilibrium trajectories are constructed for two variants of shell by use of method of continuous loading.

Key words: buckling, post-buckling, imperfection, laminated shell, mode interaction, Cauchy problem, external pressure, axial compression.

Введение.

Метод расчета на устойчивость несовершенных подкрепленных цилиндрических оболочек, который учитывает взаимовлияние локального и общего выпучивания, описан в [9, 10]. Он отличается от предложенного ранее [13] тем, что его применяют в случае как равных, близких, так и различных собственных значений однородной задачи, которая используется для определения критических нагрузок оболочки без несовершенств. Это позволяет применять его и в других задачах устойчивости тонкостенных конструкций с несовершенствами [1, 6, 16].

Ниже изложен подход, основанный на методе Бискова – Хатчинсона к решению задачи о нелинейном деформировании ортотропных цилиндрических оболочек, на поверхности которых имеется прогиб, ограниченный отрезками координатных линий. Локальный прогиб задается в виде произведения двух тригонометрических функций таких, чтобы на ограничивающем контуре они равнялись нулю. Указанные произведения представляются двойными тригонометрическими рядами Фурье. Каждый член такого ряда в предлагаемом варианте является собственной функцией однородной задачи устойчивости. С формальной точки зрения ряд Фурье представляет собой разложение начальных несовершенств в ряд по собственным векторам невозмущенной задачи (процедура использования коэффициентов этих рядов описана ниже при решении конкретных примеров). Важным в этой задаче является определение количества взаимодействующих мод, достаточного для получения удовлетворительного по точности результата.

Многомодальные несовершенства оболочек из композиционных материалов, не связанные с локальными прогибами, учтены в задачах устойчивости при обсуждении их влияния на критические нагрузки и характер закритического поведения в работах [6, 16]. Представленные ниже результаты являются дополнением и развитием полученных в указанных выше работах.

Отметим, что устойчивость изотропных оболочек с локальными прогибами, имеющими ограничения по двум координатам, изучена рядом авторов как аналитическими, так и экспериментальными методами [4, 7, 8, 11, 12, 14].

1. Постановка задачи. Основные разрешающие уравнения.

Рассмотрим слоистую цилиндрическую оболочку радиуса R с общей толщиной t и длиной L , которая нагружена системой сил, пропорциональных некоторому параметру λ .

Представим необходимые для проведения расчетов уравнения, используя нелинейную теорию оболочек Тимошенко – Миндлина, вариант соотношений которой изложен в монографии [2]. Выражение принципа виртуальных работ в этом случае принимает такой вид:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[T_{11} \delta \varepsilon_1 + T_{22} \delta \varepsilon_2 + T_{12}^* \delta \omega_1 + T_{21}^* \delta \omega_2 + T_{13}^* \delta \theta_1 + T_{23} \delta \theta_2 + T_{13} \delta \theta + T_{23}^* \delta \psi + M_{11} \delta k_1 + \right. \\ \left. + M_{22} \delta k_2 + M_{12} \delta t_1 + H (\delta t_1 + \delta t_2) \right] dx dy - \delta A = 0. \quad (1)$$

Здесь x, y – координатные линии, совпадающие с образующей и направляющей цилиндрической поверхности приведения; T_{ij}, M_{ij} – усилия и моменты, статически эквивалентные действующим напряжениям. Проекция усилий на оси срединной поверхности до деформации имеют вид

$$T_{12}^* = S + T_{11} \omega_1; \quad T_{21}^* = S + \frac{1}{R} H + T_{22} \omega_2; \quad (2)$$

$$T_{13}^* = T_{13} + T_{11} (\theta_1 + \bar{\theta}_1) + S (\theta_2 + \bar{\theta}_2); \quad T_{23}^* = T_{23} + S (\theta_1 + \bar{\theta}_1) + T_{22} (\theta_2 + \bar{\theta}_2).$$

Введем параметры, необходимые для записи нелинейных выражений деформаций через перемещения:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \omega_1 = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}; \quad \omega_2 = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \theta_2 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R}; \\ k_1 = \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad k_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad t_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad t_2 = \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (3)$$

Используя их в выражениях для деформаций, получим равенства

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \theta_1^2 + 2\theta_1 \bar{\theta}_1); \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} (\omega_2^2 + \theta_2^2 + 2\theta_2 \bar{\theta}_2); \\ \varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2 + \theta_1 \theta_2 + \theta_1 \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1 \theta_2; \quad k_{11} = k_1; \quad k_{22} = k_2 + \frac{\varepsilon_2}{R}; \\ k_{12} = t_1 + t_2 + \frac{\omega_2}{R}; \quad \varepsilon_{13} = \theta + \theta_1; \quad \varepsilon_{23} = \psi + \theta_2. \quad (4)$$

Присутствующие здесь функции с чертой сверху обозначают углы поворота поверхности, обусловленные имеющимися до нагружения оболочки начальными геометрическими несовершенствами в виде прогибов \bar{w} .

Вариация работы внешних нагрузок δA имеет различный вид в зависимости от характера их распределения по лицевым поверхностям или же по боковой поверхности. В случае нагружения продольным сжимающим усилием T_{11}^0 она имеет такой вид:

$$\delta A = - \int_0^{2\pi R} T_{11}^0 \delta u \Big|_0^L dy, \quad (5)$$

а для однородного внешнего давления интенсивности q –

$$\delta A = \int_0^L \int_0^{2\pi R} q \left[-\theta_1 \delta u - \theta_2 \delta v + (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta w \right] dx dy. \quad (6)$$

Предположим, что оболочка состоит из N слоев волокнистого композита, имеющего симметричное относительно срединной поверхности строение. Соотношения упругости в этом случае принимают такой вид:

$$\begin{aligned} T_{11} &= C_{11} \varepsilon_{11} + C_{12} \varepsilon_{22}; & T_{22} &= C_{12} \varepsilon_{11} + C_{22} \varepsilon_{22}; & S &= C_{66} \varepsilon_{12}; & T_{13} &= C_{55} \varepsilon_{13}; & T_{23} &= C_{44} \varepsilon_{23}; \\ M_{11} &= D_{11} k_{11} + D_{12} k_{22}; & M_{22} &= D_{12} k_{11} + D_{22} k_{22}; & H &= D_{66} k_{12}, \end{aligned} \quad (7)$$

где жесткости C_{ij} и D_{ij} вычисляем согласно формулам

$$C_{kl} = \sum_{i=1}^N C_{kl}^i; \quad D_{kl} = \sum_{i=1}^N \left(D_{kl}^i + z_i^2 C_{kl}^i \right) \quad (8)$$

(z_i – координата срединной поверхности i -го слоя).

Уравнения (1) – (8) позволяют решать различные нелинейные задачи о деформировании оболочек с начальными геометрическими несовершенствами. К приведенным уравнениям применим метод асимптотического анализа, предложенный в [9, 10]. Полагаем, что докритическое напряженно-деформированное состояние оболочки является линейным, а также, что при $\lambda = 1$ поле перемещений характеризуется вектором U_0 . Линеаризуя уравнения (1) – (8) в окрестности нагрузки бифуркации, получаем совокупность уравнений для определения критических значений параметра нагрузки λ_i и мод U_i , соответствующих i -й форме выпучивания (здесь U_i – вектор с компонентами (u, v, w, θ, ψ)).

Линеаризованное вариационное уравнение (1) для совершенных цилиндрических оболочек принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ T_{11}^i \delta \varepsilon_1 + S^i \delta \omega_1 + T_{22}^i \delta \varepsilon_2 + \left(S^i + \frac{2}{R} H^i \right) \delta \omega_2 + T_{13}^i (\delta \theta_1 + \delta \theta) + \right. \\ & + H^i \delta k_{12} + T_{23}^i (\delta \theta_2 + \delta \psi) + M_{11}^i \delta k_{11} + M_{22}^i \delta k_{22} + \lambda_i \left[T_{11}^0 (\omega_1^i \delta \omega_1 + \theta_1^i \delta \theta_1) + \right. \\ & \left. \left. + T_2^0 (\omega_2^i \delta \omega_2 + \theta_2^i \delta \theta_2) + S^0 (\theta_1^i \delta \theta_2 + \theta_2^i \delta \theta_1) \right] \right\} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения равновесия в окрестности критической точки в начале закритического состояния запишем в перемещениях, подставив в уравнения равновесия [2, 17] вместо усилий и моментов их выражения через деформации (7), заменив последние перемещения согласно (3), (4). Получим пять уравнений относительно пяти разрешающих функций $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w, u_4 = \theta, u_5 = \psi$. Их можно кратко представить в виде

$$\sum_{j=1}^5 \Delta_{ij} u_j - \lambda(m_i) \begin{pmatrix} T_{11}^0 \\ 2S^0 \\ T_{22}^0 \end{pmatrix} = 0 \quad (i=1, \dots, 5), \quad (10)$$

где m_i – векторы-строки, компонентами которых являются производные от перемещений в виде таких формул:

$$\begin{aligned} m_1 &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \\ m_2 &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R^2} \right); \\ m_3 &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R^2} \right); \\ m_4 &= (0, 0, 0), \quad m_5 = (0, 0, 0); \end{aligned} \quad (11)$$

$T_{11}^0, 2S^0, T_{22}^0$ – докритические усилия сжатия и кручения, изменяющиеся пропорционально коэффициенту λ ; $\Delta_{ij} u_j$ – дифференциальные операторы от перемещений u, v, w, θ, ψ .

Обозначим через ξ_i амплитуды мод выпучивания U_i . Они остаются неопределенными при решении однородной задачи (9) – (10) и могут быть определены только при решении исходной нелинейной задачи (1) – (8). Для этого вектор перемещений представим в виде асимптотического разложения

$$U = \lambda U_0 + \xi_i U_i + \xi_i \xi_j U_{ij}. \quad (12)$$

Для вектора начальных геометрических несовершенств также используем представление в виде суммы $\bar{U} = \bar{\xi}_i U_i$, где $\bar{\xi}_i$ – амплитуда несовершенства в виде i -той моды. Здесь и ниже принимается правило суммирования по повторяющимся индексам.

Векторы U_{ij} ортогональны к модам выпучивания:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} i \left[T_{11}^0 (\omega_1^i \omega_1^{kl} + \theta_1^i \theta_1^{kl}) + T_2^0 (\omega_2^i \omega_2^{kl} + \theta_2^i \theta_2^{kl}) + S^0 (\theta_1^i \theta_2^{kl} + \theta_2^i \theta_1^{kl}) \right] dx dy = 0. \quad (13)$$

Вариационное уравнение относительно переменных второго порядка в соответствии с методом Бискова – Хатчинсона в теории оболочек Тимошенко – Миндлина представим в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ T_{11}^{ij} \delta \varepsilon_1 + S^{ij} \delta \omega_1 + T_{22}^{ij} \delta \varepsilon_2 + \left(S^{ij} + \frac{2}{R} H^{ij} \right) \delta \omega_2 + T_{13}^{ij} (\delta \theta_1 + \delta \theta) + \right. \\ & + T_{23}^{ij} (\delta \theta_2 + \delta \psi) + M_{11}^{ij} \delta k_{11} + M_{22}^{ij} \delta k_{22} + H^{ij} \delta k_{12} + \lambda_i \left[T_{11}^0 (\omega_1^i \delta \omega_1 + \right. \\ & \left. + \theta_1^i \delta \theta_1) + T_2^0 (\omega_2^i \delta \omega_2 + \theta_2^i \delta \theta_2) + S^0 (\theta_1^i \delta \theta_2 + \theta_2^i \delta \theta_1) \right] \left. \right\} dx dy = \\ & = -\frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[(T_{11}^i \omega_1^j + T_{11}^j \omega_1^i) \delta \omega_1 + (T_{22}^i \omega_2^j + T_{22}^j \omega_2^i) \delta \omega_2 + \right. \end{aligned}$$

$$+\left(T_{11}^i \theta_1^j + S^i \theta_2^j + T_{11}^j \theta_1^i + S^j \theta_2^i\right) \delta \theta_1 + \left(T_{22}^i \theta_2^j + S^i \theta_2^j + T_{22}^j \theta_{21}^i + S^j \theta_2^i\right) \delta \theta_2 \Big] dx dy. \quad (14)$$

Для построения системы уравнений, которую удобно использовать для получения аналитического решения, представим все переменные, разрешающие функции и жесткости в безразмерном виде [2]. При этом полагаем, что $x = R\alpha_1$; $y = R\alpha_2$;

$$\begin{aligned} (\tilde{u}, \tilde{v}) &= \frac{R}{t^2}(u, v); \quad \tilde{w} = \frac{1}{t}w; \quad (\tilde{\theta}, \tilde{\psi}) = \frac{R}{t}(\theta, \psi); \quad (\tilde{\varepsilon}_{11}, \tilde{\varepsilon}_{22}, \tilde{\varepsilon}_{12}) = \frac{R^2}{t^2}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}); \\ (\tilde{\varepsilon}_{13}, \tilde{\varepsilon}_{23}) &= \frac{R}{t}(\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}); \quad (\tilde{k}_{11}, \tilde{k}_{22}, \tilde{k}_{12}) = \frac{R^2}{t}(k_{11}, k_{22}, k_{12}); \\ t_{ij} &= \frac{T_{ij}R^2}{C_0 t^2}; \quad m_{ij} = \frac{M_{ij}R^2}{C_0 t^2}; \quad m_q = q \frac{T_{ij}R^3}{C_0 t^2}; \quad h = \frac{t}{R}. \end{aligned}$$

Ниже размерные функции не используем, поэтому для безразмерных величин новые обозначения не применяем.

Выражение (14) представим в виде

$$\int_0^{L/R} \int_0^{2\pi} (P_1 \delta u + P_2 \delta v + P_3 \delta w + P_4 \delta \theta + P_5 \delta \psi) d\alpha_1 d\alpha_2 = 0, \quad (15)$$

где P_i – дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} P_1 &= t_{11}^{ij} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + s^{ij} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{2} \left(t_{22}^i \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_2} + t_{22}^j \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}; \\ P_2 &= t_{22}^{ij} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + s^{ij} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + t_{23}^{ij} + h m_{12}^{ij} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + h m_{22}^{ij} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \lambda_c h^2 \frac{\partial v_{ji}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2} \left(t_{11}^i h^2 \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_1} + t_{11}^j h^2 \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_1} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[t_{22}^i h \left(\frac{\partial w_j}{\partial \alpha_2} + h v_j \right) + t_{22}^j h \left(\frac{\partial w_i}{\partial \alpha_2} + h v_i \right) \right] + \frac{1}{2} \left(s^i h \frac{\partial w_j}{\partial \alpha_1} + s^j h \frac{\partial w_i}{\partial \alpha_1} \right) + m_q h \left(\frac{\partial v_{ij}}{\partial \alpha_2} - \frac{w_{ij}}{h} \right); \\ P_3 &= \frac{1}{h} t_{13}^{ij} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{h} t_{23}^{ij} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{h} (t_{22}^{ij} + h m_{22}^{ij}) - \lambda_c \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2} \left(t_{11}^i \frac{\partial w_j}{\partial \alpha_1} + t_{11}^j \frac{\partial w_i}{\partial \alpha_1} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[t_{22}^i \left(\frac{\partial w_j}{\partial \alpha_2} + h v_j \right) + t_{22}^j \left(\frac{\partial w_i}{\partial \alpha_2} + h v_i \right) \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{2} \left\{ s^i \left[\frac{\partial w_j}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{\partial w_j}{\partial \alpha_1} + h v_j \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right] + \right. \\ &\left. + s^j \left[\frac{\partial w_i}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{\partial w_i}{\partial \alpha_1} + h v_i \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right] \right\}; \quad P_4 = \frac{1}{h} t_{13}^{ij} + m_{11}^{ij} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + m_{12}^{ij} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}; \\ P_5 &= \frac{1}{h} t_{23}^{ij} + m_{22}^{ij} \frac{\partial}{\partial \alpha_{21}} + m_{12}^{ij} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Авторы метода [9, 10] предлагают использовать в качестве λ в уравнении (16) наименьшее из совокупности λ_j . Если решена однородная (9) – (11) и неоднородная (14) – (16) краевые задачи, относительно амплитуд ξ_i из уравнения (1) (полагая $\delta U = U_1$), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\xi_r \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_r} \right) + \xi_i \xi_j a_{ijr} + \xi_i \xi_j \xi_k b_{ijk} = \bar{\xi}_r \frac{\lambda}{\lambda_r} \quad (r = 1, \dots, M); \quad (17)$$

$$\left[a_{ijr} = -\frac{A_{ijr}}{2D}, b_{ijr} = -\frac{B_{ijkr}}{D} \right]; \quad (18)$$

$$A_{ijr} = \int_0^{2\pi} \int_0^{L/R} \left[2t_{11,i} \left(h^2 \omega_{1,j} \omega_{1,r} + \theta_{1,j} \theta_{1,r} \right) + 2t_{22,i} \left(h^2 \omega_{2,j} \omega_{2,r} + \theta_{2,j} \theta_{2,r} \right) + \right. \\ \left. + 2s_i \left(\theta_{1,j} \theta_{2,r} + \theta_{2,j} \theta_{1,r} \right) + t_{11,r} \left(\omega_{1,i} \omega_{1,j} + \theta_{1,i} \theta_{1,j} \right) + \right. \\ \left. + t_{22,r} \left(\omega_{2,i} \omega_{2,j} + \theta_{2,i} \theta_{2,j} \right) + s_r \left(\theta_{1,i} \theta_{2,j} + \theta_{2,i} \theta_{1,j} \right) \right] d\alpha_1 d\alpha_2;$$

$$B_{ijkr} = \int_0^{2\pi} \int_0^{L/R} \left\{ \frac{1}{2} \left[2t_{11,i} \left(\omega_{1,j} \omega_{1,kr} + \theta_{1,j} \theta_{1,kr} \right) + 2t_{22,i} \left(\omega_{2,j} \omega_{2,kr} + \theta_{2,j} \theta_{2,kr} \right) + 2s_i \left(\theta_{1,j} \theta_{2,kr} + \theta_{2,j} \theta_{1,kr} \right) + \right. \right. \\ \left. + t_{11,i} \left(h^2 \omega_{1,jk} \omega_{1,r} + \theta_{1,jk} \theta_{1,r} \right) + t_{22,i} \left(h^2 \omega_{2,jk} \omega_{2,r} + \theta_{2,jk} \theta_{2,r} \right) + s_i \left(\theta_{1,jk} \theta_{2,r} + \theta_{2,jk} \theta_{1,r} \right) + \right. \\ \left. + t_{11,r} \left(h^2 \omega_{1,i} \omega_{1,jk} + \theta_{1,i} \theta_{1,jk} \right) + t_{22,r} \left(h^2 \omega_{2,i} \omega_{2,jk} + \theta_{2,i} \theta_{2,jk} \right) + s_r \left(\theta_{1,i} \theta_{2,r} + \theta_{1,ij} \theta_{,,k} \right) + \right. \\ \left. + t_{11,ii} \left(h^2 \omega_{1,k} \omega_{1,r} + \theta_{1,k} \theta_{1,r} \right) + t_{22,ii} \left(h^2 \omega_{2,k} \omega_{2,r} + \theta_{2,k} \theta_{2,r} \right) + s_{ii} \left(\theta_{2,k} \theta_{1,r} + \theta_{1,k} \theta_{2,r} \right) + \right. \\ \left. + t_{11,ri} \left(h^2 \omega_{1,j} \omega_{1,k} + \theta_{1,j} \theta_{1,k} \right) + t_{22,r} \left(h^2 \omega_{2,j} \omega_{2,k} + \theta_{2,j} \theta_{2,k} \right) + s_{ri} \left(\theta_{2,i} \theta_{1,k} + \theta_{2,k} \theta_{1,i} \right) \right\} d\alpha_1 d\alpha_2;$$

$$D = \int_0^{2\pi} \int_0^{L/R} \left(t_{11,r} \varepsilon_{1,r} + t_{12,r} \omega_{1,r} + t_{22,r} \varepsilon_{2,r} + t_{21,r} \omega_{2,r} + \frac{1}{h} t_{13,r} \varepsilon_{13,r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{h} t_{23,r} \varepsilon_{23,r} + m_{11,r} k_{11,r} + m_{22,r} k_{22,r} + m_{12} k_{12,r} \right) d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Уравнения (17) могут быть использованы: для исследования нелинейного деформирования несовершенных конструкций в докритическом состоянии, для расчета критических (предельных) нагрузок, а также для расчета закритического поведения рассматриваемых конструкций с локальными несовершенствами в виде прогибов.

Кроме того, система (17) может быть применена в случае совпадающих, почти совпадающих или существенно различающихся мод.

Это свойство метода Бискова – Хатчинсона используем ниже для разработки методики исследования устойчивости и закритического поведения слоистых композитных цилиндрических оболочек с мультимодальными несовершенствами, в частности, несовершенствами, которые описаны тригонометрическими рядами Фурье.

2. Решение для цилиндрических оболочек.

Локальный прогиб цилиндрической поверхности представим в виде функции двух переменных x, y , совпадающих в некоторой локальной области с осями координат глобальной системы $0 \leq x \leq L$, $-\pi R \leq y \leq \pi R$, где L – длина образующей цилиндра; $2\pi R$ – длина направляющей. Локальная область ограничена контуром $L_1 - l_1 \leq x \leq L_1 + l_1$, $-y_1 \leq y \leq y_1$. Начальный прогиб в указанной области представлен в виде функции

$$\bar{w} = \xi \sin \frac{\pi(x-L_1)}{l_1} \cos \frac{\pi y}{2y_1}. \quad (19)$$

Так как амплитуда каждой функции в выражении (19) равна единице, то амплитуда начального прогиба \bar{w} равна ξ . Решение возмущенной задачи представим в виде тригонометрических рядов Фурье, учитывая, что тригонометрические функции являются собственными для однородной задачи. Тогда имеем равенства

$$\sin \frac{\pi(x-L_1)}{l_1} = \sum_m B_m \sin \frac{m\pi x}{L_1} \quad (20)$$

$$\left[B_m = \frac{2}{L} \left(\alpha \cos \frac{\pi L_1}{l_1} - \beta \sin \frac{\pi L_1}{l_1} \right) \right];$$

$$\left[\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\gamma_1} [\sin \gamma_1 (L_1 + l_1) - \sin \gamma_1 L_1] - \frac{1}{\gamma_2} [\sin \gamma_2 (L_1 + l_1) - \sin \gamma_2 L_1] \right\}; \right.$$

$$\left. \beta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\gamma_1} [\cos \gamma_1 (L_1 + l_1) - \cos \gamma_1 L_1] - \frac{1}{\gamma_2} [\cos \gamma_2 (L_1 + l_1) - \cos \gamma_2 L_1] \right\}; \right.$$

$$\left. \gamma_1 = \frac{\pi}{l_1} - \frac{m\pi}{L}; \quad \gamma_2 = \frac{\pi}{l_1} + \frac{m\pi}{L} \right].$$

Так как $y = R\alpha_2$, $y_1 = R\alpha'_2$, то $\cos \frac{\pi y}{2y_1} = \cos \frac{\pi\alpha_2}{2\alpha'_2} = A_0 + \sum_n A_n \cos n\varphi$

$$\left[A_0 = \frac{2\alpha'_2}{\pi^2}; \quad A_n = \cos n\alpha'_2 / \alpha_2 \left[\left(\frac{\pi}{2\alpha'_2} \right)^2 - n^2 \right] \right].$$

Используя указанные разложения, начальный прогиб представим в виде двойного ряда Фурье

$$\bar{w} = \bar{\xi} \sum_{m=1} \sum_{n=0,1} B_m A_n \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\alpha_2. \quad (21)$$

Из коэффициентов двумерной матрицы $\bar{\xi} B_m A_n$ образуем одномерный вектор с компонентами $\bar{\xi}_i$ таким образом, что $\bar{\xi}_1 > \bar{\xi}_2 > \bar{\xi}_3 > \dots > \bar{\xi}_m$.

Ниже (см. примеры расчета) показано, как согласуются волновые числа m, n мод выпучивания совершенных оболочек с аналогичными числами тригонометрических функций рядов Фурье.

Применим представленную методику для расчета слоистых цилиндрических оболочек при внешнем давлении и осевом сжатии.

При решении однородной задачи (10) перемещения представляем в виде тригонометрических рядов, почленно удовлетворяющих условиям шарнирного закрепления торцов:

$$\begin{aligned}
 u_i &= A_{m,n}^i \cos l_m \alpha_1 \cos n_i \alpha_2; \quad v_i = B_{m,n}^i \sin l_m \alpha_1 \sin n_i \alpha_2; \quad w_i = C_{m,n}^i \sin l_m \alpha_1 \cos n_i \alpha_2; \\
 \theta_i &= D_{m,n}^i \cos l_m \alpha_1 \cos n_i \alpha_2; \quad \psi_i = E_{m,n}^i \sin l_m \alpha_1 \sin n_i \alpha_2 \\
 (l_m &= m\pi R/L; \quad \alpha_1 = x/R; \quad \alpha_2 = y/R).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Систему однородных алгебраических уравнений получим, подставив (22) в (10). Путем перебора параметров волнообразования m и n определяем спектр собственных значений λ_i и соответствующих им собственных векторов, нормированных таким образом, что $C_{m,n}^i i = 1$.

Решение системы уравнений, которая получена из вариационного уравнения (15), с учетом вида их правых частей, представим в виде

$$\begin{aligned}
 u_{ij} &= \sum_k \left[A_{k,1}^{ij} \cos(n_i - n_j) \alpha_2 + A_{k,2}^{ij} \cos(n_i + n_j) \alpha_2 \right] \cos l_k \alpha_1; \\
 v_{ij} &= \sum_k \left[B_{k,1}^{ij} \sin(n_i - n_j) \alpha_2 + B_{k,2}^{ij} \sin(n_i + n_j) \alpha_2 \right] \sin l_k \alpha_1; \\
 w_{ij} &= \sum_k \left[C_{k,1}^{ij} \cos(n_i - n_j) \alpha_2 + C_{k,2}^{ij} \cos(n_i + n_j) \alpha_2 \right] \sin l_k \alpha_1; \\
 \theta_{ij} &= \sum_k \left[D_{k,1}^{ij} \cos(n_i - n_j) \alpha_2 + D_{k,2}^{ij} \cos(n_i + n_j) \alpha_2 \right] \cos l_k \alpha_1; \\
 \psi_{ij} &= \sum_k \left[E_{k,1}^{ij} \sin(n_i - n_j) \alpha_2 + E_{k,2}^{ij} \sin(n_i + n_j) \alpha_2 \right] \sin l_k \alpha_1.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Для решения системы (17) при начальном значении параметра нагрузки λ используем метод Ньютона – Канторовича. Рассмотрена пошаговая процедура нагружения. Полученное решение на i -м шаге нагружения использовано в качестве начального значения нагрузки при следующем $(i+1)$ -м шаге. Для построения решения в тех точках, где якобиан системы (17) равен нулю, использована процедура метода непрерывного продолжения [4, 5, 15]. Вводится вектор \bar{X} размерности $(M+1)$ с компонентами $(\xi_1, \dots, \xi_M, \lambda)^T$. Система (17) в этом случае может быть записана в компактном виде

$$F_r(\bar{X}) = 0 \quad (r = 1, \dots, M). \tag{24}$$

Дифференцируя (17) по параметру s , соответствующему продвижению вдоль кривой решений системы, получаем систему M линейных однородных уравнений для $M+1$ неизвестных, т.е.

$$\sum_{j=1}^{M+1} F_{r,j} \frac{d\xi_j}{ds} = 0 \quad (r = 1, \dots, M), \tag{25}$$

где $\bar{J} = [F_{r,j}] = \left[-\partial F_r / \partial \xi_i \right]$ – матрица Якоби системы (24). Ранг $[\bar{J}] = M$ в регулярных и предельных точках.

Решение системы (25) можно представить в виде задачи Коши:

$$\frac{d\bar{X}}{ds} = \text{ort}(J, Q) \quad (26)$$

с начальным условием $\bar{X}(s_0) = \bar{X}_0$.

Предложенная в работе [5] операция $\text{ort}(J, Q)$ обозначает процесс ортогонализации векторов-строк матрицы \bar{J} и определения орта, дополняющего исходный базис до базиса размерности $(M+1)$. В качестве начального значения $\bar{X}(s_0)$ использовано решение, полученное по методу Ньютона – Канторовича при $\lambda \ll \lambda_s$. Описанная процедура соответствует методу непрерывного продолжения. Она оказалась весьма эффективной при решении многих нелинейных задач [4, 5, 11, 12].

3. Числовые результаты и их анализ.

Используя изложенную методику расчета, исследуем некоторые особенности нелинейного деформирования цилиндрических оболочек из композитов с локальными геометрическими несовершенствами. Полагаем, что оболочка состоит из 10 элементарных слоев армированного волокнами стеклопластика.

В приведенных ниже примерах расчета принята характерная для практики последовательность распределения направлений армирования по толщине $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, -180^\circ, -135^\circ, -90^\circ, -45^\circ, 0^\circ$. Механические характеристики слоев материала приняты следующими: $E_1 = 0,43415 \cdot 10^7$ МПа; $E_2 = 0,11338 \cdot 10^6$ МПа; $G_{12} = 0,52888 \cdot 10^5$ МПа; $G_{13} = 0,52888 \cdot 10^5$ МПа; $G_{23} = 0,42830 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_1 = 0,28266$.

В первом примере рассмотрено нагружение оболочки равномерным внешним давлением, во втором – равномерно распределенными по торцам осевыми усилиями.

Геометрические параметры оболочек приняты в двух вариантах. В первом из них: $L/R = 1$; $t/R = 0,05$; $L_1/L = 0,36$; $l_1/L = 0,1$; $t = 0,005$; второй вариант отличается только тем, что для него $L_1/L = 0,5$. Подобное расположение прогибов приводит к несимметричности распределения деформаций и напряжений относительно середины образующей в первом случае и симметричности – во втором. Этот факт, как будет показано ниже, оказывает влияние на параметры, характеризующие устойчивость несовершенных оболочек.

Если задать одинаковыми пределы изменчивости волновых параметров m, n в выражениях (21) и (22), то получим, что каждому собственному значению $\lambda_{m,n}$ будут соответствовать параметры $\bar{\xi}_{m,n}$. Однако использовать систему (26) с учетом всей совокупности величин $\lambda_{mn}, \bar{\xi}_{mn}$ не имеет смысла ввиду очень большого различия их значений. Одним из практически возможных путей реализации вычислительного процесса является построение двух одномерных массивов λ_r и $\bar{\xi}_i$. Для рассматриваемой оболочки при внешнем давлении отрезки этих массивов приведены в табл. 1. Здесь же представлен столбец собственных значений λ_i в порядке их возрастания. Различие между λ_r и λ_i обусловлено несовпадением собственных форм.

В табл. 1 приняты следующие обозначения: λ_r – значения критических параметров, вычисленных в два этапа: на первом из коэффициентов матрицы $\bar{\xi}_{mn}$ получаем три одномерных массива таких, что первый содержит расположенные в порядке убы-

вания коэффициенты указанной матрицы; второй и третий содержат значения волновых чисел m, n , соответственно; на втором этапе определяется массив чисел λ_{mn} при значениях m, n из второго и третьего столбцов. Коэффициенты этого массива, расположенные в порядке возрастания, образуют первый столбец табл. 1 ($\bar{\xi}_i$ – значения коэффициентов рядов Фурье для несовершенств; λ_i – значения критических параметров идеальной оболочки; m, n – волновые параметры функций рядов Фурье; m_1, n_1 – волновые параметры собственных функций исходной однородной задачи).

Таблица 1

λ_r	$\bar{\xi}_i$	m	n	λ_i	m_1	n_1
0,12438	$0,12772 \cdot 10^{-1}$	1	6	0,12438	1	6
0,14021	$0,15001 \cdot 10^{-1}$	1	5	0,12759	1	7
0,21296	$0,16014 \cdot 10^{-1}$	1	4	0,13821	1	8
0,50015	$0,18384 \cdot 10^{-1}$	1	3	0,14021	1	5
$0,16988 \cdot 10$	$0,10947 \cdot 10^{-1}$	4	6	0,15191	1	9
$0,19322 \cdot 10$	$0,19309 \cdot 10^{-1}$	1	2	0,16680	1	10
$0,23741 \cdot 10$	$0,12857 \cdot 10^{-1}$	4	5	0,18193	1	11
$0,36327 \cdot 10$	$0,14497 \cdot 10^{-1}$	4	4	0,19681	1	12
$0,40304 \cdot 10$	$0,12550 \cdot 10^{-1}$	6	6	0,21113	1	13
$0,569132 \cdot 10$	$0,14740 \cdot 10^{-1}$	6	5	0,21296	1	4
$0,63609 \cdot 10$	$0,15756 \cdot 10^{-1}$	4	3	0,22473	1	14
$0,87451 \cdot 10$	$0,16620 \cdot 10^{-1}$	6	4	0,23752	1	15
$0,11987 \cdot 10^2$	$0,19625 \cdot 10^{-1}$	1	1	0,24949	1	16
$0,14062 \cdot 10^2$	$0,16549 \cdot 10^{-1}$	4	4	0,26062	1	17

Точность результатов, получаемых при решении системы уравнений (26), зависит от максимального значения индекса r , определяющего также количество коэффициентов в столбцах табл. 1. Кривые равновесных состояний, приведенные на рис. 1, *а, б*, вычислены для симметричных оболочек при внешнем давлении и осевом сжатии, соответственно. На этих рисунках в случае внешнего давления по оси абсцисс отложены отношения прогибов к толщине при $\varphi = 0$ и $\xi = 0,5$; в случае осевого сжатия – отношение укорочения оболочки к толщине, а по оси ординат для обоих видов нагрузок – значение $\lambda^* = \lambda_r / \lambda_c$, где λ_c – минимальное из λ_i . Числа возле этих кривых обозначают максимальные значения индекса r , определяющего количество уравнений в системе (26).

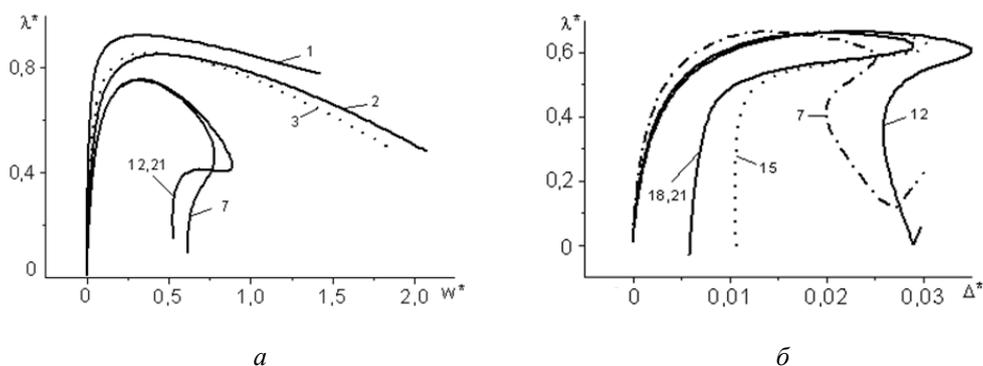


Рис. 1

Таблица 2

λ_r	$\bar{\xi}_i$	m	n	λ_i	m_1	n_1
0,30869	$0,16914 \cdot 10^{-1}$	1	4	0,30869	1	4
0,32936	$0,15001 \cdot 10^{-1}$	1	5	0,32156	2	4
0,35100	$0,16820 \cdot 10^{-1}$	4	1	0,32257	2	5
0,35205	$0,16549 \cdot 10^{-1}$	4	2	0,32936	1	5
0,35451	$0,15756 \cdot 10^{-1}$	4	3	0,33779	3	3
0,35925	$0,14497 \cdot 10^{-1}$	4	4	0,33844	3	4
0,35714	$0,12857 \cdot 10^{-1}$	4	5	0,34094	3	2
0,37897	$0,10947 \cdot 10^{-1}$	4	6	0,34097	2	3

Вычисления в обоих случаях проведены при удержании в системе (26) 21-го уравнения. Равновесные кривые на рис. 2, *a* и *б* получены для несимметричной и симметричной оболочек при внешнем давлении (на этих рисунках числа возле кривых соответствуют значениям параметра ξ). Умноженные на этот параметр во втором столбце числа определяют значение амплитуды несовершенства ξ с соответствующими волновыми числами. В скобках возле указанных чисел приведены относительные величины предельных нагрузок.

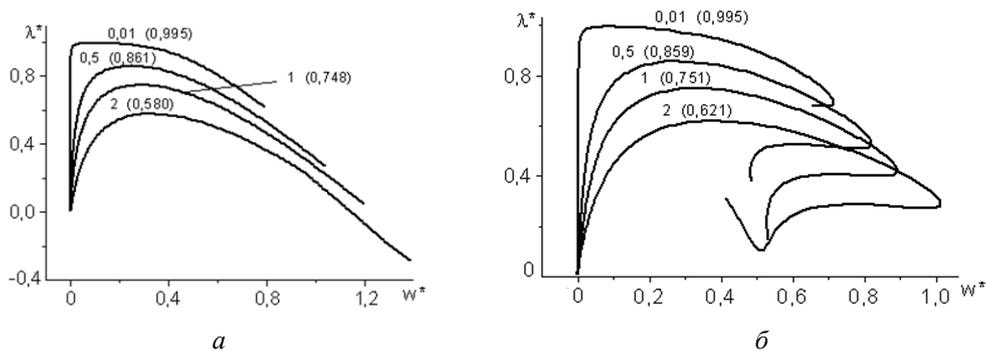


Рис. 2

В случае осевого сжатия результаты расчета собственных значений и соответствующих мод приведены в табл. 2 (обозначения в ней соответствуют табл. 1).

Равновесные кривые для рассматриваемой оболочки при осевом сжатии приведены на рис. 3 *a*, *б*.

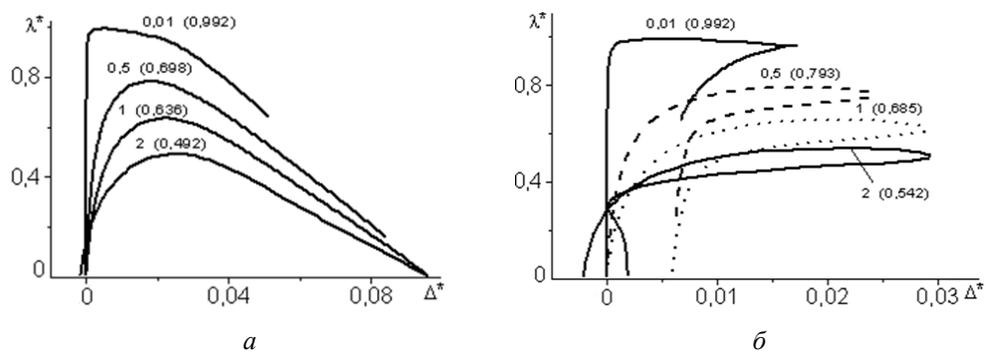


Рис. 3

Сравнивая ход равновесных кривых на рис. 2, а, б и рис. 3, а, б, можно отметить, что как при внешнем давлении, так и осевом сжатии оболочки средних размеров чувствительны к несовершенству в виде локального начального прогиба, причем симметричные – более чувствительны. Однако критические нагрузки для этих видов нагружений изменяются не одинаково. Если амплитуда начального прогиба равна толщине, то критическая нагрузка оболочки составляет 0,748 от критической нагрузки совершенной оболочки при действии внешнего давления и 0,636 – при осевом сжатии. Достижение предельных значений давления в первом случае реализуется при существенно больших значениях прогибов, чем укорочений – во втором. Закритическое поведение несимметричной оболочки, которое иллюстрируют графики на рис. 2, а, характеризуется плавным увеличением амплитуды прогибов и уменьшением давления. На рис. 2, б и 3, б кривые равновесных состояний имеют различную форму, которая зависит от параметра ξ . При осевом сжатии симметричных оболочек зависимость укорочения от нагрузки имеет ту особенность, что на ней отмечается только один закругленный поворот на неустойчивую ветвь и нет обратного поворота, характерного для кривых подобного типа в случае тонких изотропных оболочек [8]. Отмеченные особенности обусловлены наличием несовершенств, свойствами материала оболочек и ограниченностью асимптотического метода расчета.

Заключение.

Установлено, что асимптотический метод Бискова – Хатчинсона можно использовать для исследования нелинейного деформирования, включая определение предельных нагрузок, ортотропных цилиндрических оболочек с локальными начальными прогибами малых участков поверхности при учете деформаций поперечного сдвига. Несовершенства подобного рода описываются двойными тригонометрическими рядами Фурье. Показано, что при вычислениях следует учитывать в этих рядах ограниченное количество членов в соответствии с процедурой, обеспечивающей обоснованность получаемых результатов.

Рассмотрена устойчивость и закритическое поведение оболочки средних размеров из стеклопластика при внешнем давлении и осевом сжатии. Установлено, что на предельные нагрузки и, особенно, формы закритических равновесных траекторий существенно влияет не только наличие локальных прогибов, но и место их расположения. В частности, при заданном прогибе с амплитудой порядка толщины снижение критических нагрузок составило 0,6 – 0,8 от нагрузки совершенной оболочки.

Р Е З Ю М Е . Розроблено процедуру аналітичного розв'язання задачі про стійкість і післякритичне деформування ортотропних з врахуванням поперечних зсувів циліндричних оболонок при зовнішньому тиску та осьовому стиску. Оболонки, що розглядаються, геометрично недосконалі через наявність локального прогину, що має обмеження на обох осях системи координат. Задачу зведено до дослідження взаємодії мод, яким відповідають різні критичні навантаження ідеальних оболонок. При цьому використано асимптотичний метод Біскова – Хатчинсона. Методом неперервного навантаження побудовано рівноважні траєкторії для двох варіантів оболонок.

1. Баженов В.А., Семенюк Н.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – К.: Каравела, 2010. – 352 с.
2. Ванін Г.Л., Семенюк Н.П. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. – К.: Наук. думка, 1987. – 200 с.
3. Гоцуляк Е.А., Прусов Д.Э., Аранчий Н.Л. Об устойчивости геометрически несовершенных оболочек общего вида // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 11. – С. 82 – 87.
4. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – М.: Наука, – 1988. – 232 с.
5. Давыденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения нелинейных уравнений // ДАН СССР. – 1953. – 88, № 4. – С. 196 – 206.

6. Семенюк Н.П., Жукова Н.Б. Влияние взаимодействия форм выпучивания на оптимальные проекты слоистых цилиндрических оболочек из композитов // Механика композитных материалов. – 1993. – **29**, № 3. – С. 355 – 360.
7. Amazigo J.C., Fraser W.B. Buckling under External Pressure of Cylindrical Shells with Dimple Shaped Initial Imperfections. // Int.J.Solids Struct. – 1971. – **7**, N 8. – P. 883 – 900.
8. Bushnell D. Buckling of Shells-Pitfall for Designers // AIAA J. – 1981. – **19**, N 9. – P. 1183 – 1226.
9. Byskov E. Mode Interaction in Structures – An Overview, in Proc.CD-ROM of the Sixth World Congress of Computational Mechanics, Tsinghua University, China (September 2004)
10. Byskov E., Hutchinson J.W. Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells // AIAA J. – 1977. – **16**, N 7. – P. 941 – 948.
11. Elishakoff I. Probabilistic resolution of the twentieth century conundrum in elastic stability // Thin-Walled Structures. – 2012. – **59**. – P. 35 – 57.
12. Gavrilenko G.D. Stability of Cylindrical Shells with Local Imperfections // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 12. – С. 98 – 102.
13. Koiter W.T. General theory of mode interaction in stiffened plate and shell structures // Report WTHD 91. Holland, Delft University of Technology, 1976.
14. Kolakowsky Z. On certain aspects of global and local buckling modes in thin-walled beam- columns // Mechnika theoreticzna i stosowana. – 1994. – **2**, №32. – P. 409 – 427.
15. Semenyuk N.P. Nonlinear Deformation of Shells with Finite Angles of Rotation and Low Elastoplastic Strains // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 34 – 44.
16. Semenyuk N.P., Zhukova N.B. Two Methods for Calculating the Stability of Shells with Single-Mode and Multimode Imperfections // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, N 1. – P. 20 – 24.
17. Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B. The Theory of Stability of Cylindrical Composite Shells Revisited // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 449 – 460.

Поступила 13.07.2015

Утверждена в печать 31.03.2016