

Ю. Н. Шевченко, В. Г. Савченко

**ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ:
ФОКУС НА УКРАИНСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ (ОБЗОР)**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: plast@inmech.kiev.ua*

Abstract. The methods and results of studying the three-dimensional viscoplastic stress-strain state of engineering constructions under thermal force loading are presented. The following classes of thermoviscoelasticity problems are considered: axisymmetric problems; nonaxisymmetric problems for bodies of revolution; three-dimensional problems for bodies of arbitrary shape; three-dimensional problems for isotropic and anisotropic bodies of revolution.

Key words: thermoviscoelasticity, deformation process, axisymmetric and nonaxisymmetric problems, isotropic and orthotropic materials, damage, type of stress state.

Введение.

Элементы различных конструкций машин, представляющие собой пространственные тела простой и сложной формы, могут работать в условиях неравномерного нагрева под действием поверхностных и объемных сил. При этом в отдельных местах этих тел могут иметь место напряжения, превышающие предел текучести материала. При неизотермических процессах нагружения наряду с упругими и мгновенными пластическими деформациями могут возникать и развиваться деформации ползучести, т.е. процессы деформирования каждого элемента тела в этом случае существенно могут зависеть от скорости протекания процесса нагружения. Высокие температуры изменяют механические свойства материала, как правило, понижают модуль упругости, предел текучести и упрочняющие его свойства, за исключением некоторых значений температуры, при которых конструкционные сплавы охрупчиваются.

В процессе нагрева тела в нем могут возникнуть вначале большие градиенты температур, выводящие отдельные его части, примыкающие к местам нагрева, в пластическое состояние. Как правило, в этих областях возникают сжимающие пластические деформации и соответствующие им напряжения. По мере прогрева тела градиенты температур уменьшаются, и в пластических областях тела появляется разгрузка отдельных его элементов, которая в некоторых случаях может привести к изменению первоначально возникших пластических деформаций, т.е. возникают вторичные пластические деформации. При разгрузке упругие области тела стремятся возвратиться в первоначальное состояние материала, а пластические области сопротивляются этому возвращению, в результате пластически деформированные области тела начнут растягиваться. Такое переменное нагружение элемента тела может привести к накоплению пластических деформаций и его разрушению. Определение условия, при котором может накапливаться необратимая деформация, является важной и актуальной задачей механики деформируемого твердого тела.

Неравномерный нагрев в сочетании с внешними силовыми воздействиями может привести к возникновению сложных процессов нагружения элемента тела по траекториям деформирования, существенно отличающимся от прямых и даже траекторий малой кривизны. Для определения оптимальных режимов эксплуатации и изготовле-

ния элементов конструкций необходимо уметь определять их упругопластическое напряженно-деформированное состояние с учетом истории нагружения отдельных элементов тела и отмеченных выше факторов, сопровождающих неизотермические процессы нагружения этих конструкций. Для этого зарубежными и отечественными учеными интенсивно развивается механика разрушения, которая занимается изучением заключительной стадии разрушения – развития трещины в хрупких материалах.

Значительно меньше уделяется внимание изучению начальной стадии разрушения – повреждению материала в процессе его деформирования. Однако трещина зарождается и развивается в объеме материала, подготовленном к разрушению в период, когда в нем происходит целый ряд необратимых физико-механических процессов, протекающих на микро- или макроуровнях. При этом происходит изменение первоначальной структуры материала, зарождение, развитие и слияние пор, образование микродефектов. Наличие дефектов ослабляет поперечное сечение, уменьшая ту эффективную площадь, по которой распределяются напряжения, и тем самым способствует дальнейшему разрушению материала. Поэтому процесс разрушения в условиях сложного напряженного состояния можно рассматривать как процесс, протекающий в несколько этапов. На первом этапе происходит накопление повреждений, характерный размер которых много меньше некоторого среднего структурного размера. Этот процесс является доминирующим до момента образования микротрещин, которые приводят к образованию магистральной трещины и последующему разрушению материала. Поэтому разработка методов определения упругопластического напряженно-деформированного состояния и повреждения материала в твердых телах при неизотермических процессах их нагружения, адекватно описывающих изложенные выше особенности их деформирования, является важной и актуальной задачей механики деформируемого твердого тела.

Отдельные разрозненные публикации по решению пространственных задач определения упругопластического напряженно-деформируемого состояния твердых тел при неизотермических процессах нагружения стали появляться в конце 50-х и в 60-е годы XX столетия, в которых приводятся результаты решения некоторых пространственных задач по определению напряжений и деформаций в твердых телах (в основном канонической формы), возникающих при неравномерном нагреве и внешнем воздействии. В этих работах используются: модель идеально пластического тела [160]; теория малых упругопластических деформаций без учета истории нагружения [2 – 4, 22 – 24, 48 – 50, 122]; теория течения с изотропным упрочнением [84], а в дальнейшем при решении пространственных задач используется теория течения с анизотропным упрочнением. Деформации ползучести определяются в этих публикациях с использованием различных вариантов теории старения. Ни в одной из этих публикаций не анализируется адекватность используемых определяющих уравнений рассматриваемым процессам деформирования твердых тел.

Систематические исследования термовязкопластического состояния твердых тел на основе экспериментально обоснованных определяющих уравнений, учитывающих историю нагружения с анализом применимости этих уравнений к исследованию конкретных процессов неизотермического нагружения, стали развиваться в 70-х и 80-х годах XX столетия с появлением в печати монографий [36, 87, 88, 91, 92, 95, 99] и других публикаций авторов настоящего обзора и их коллег. В этих монографиях, по существу, сформированы основы нового раздела механики деформируемого твердого тела – «Термовязкопластичность», в котором исследуются закономерности возникновения и развития перемещений, деформаций и напряжений в твердых телах при неизотермических процессах нагружения за пределом упругой работы материала в отдельных его местах.

Основной задачей термовязкопластичности является разработка методов определения компонент напряжений, деформаций и перемещений, возникающих в твердых телах, которые находятся в условиях неравномерного нагрева окружающей средой при действии поверхностных и объемных сил, когда уровень этих воздействий вызывает необратимое деформирование отдельных элементов этого тела.

Результаты решения краевых задач термовязкопластичности в общем случае существенно зависят от применимости определяющих уравнений, основанных на той или иной теории термовязкопластичности. При этом следует иметь в виду, что в современной механике деформируемого твердого тела существует весьма много разнообразных моделей поведения твердых тел, находящихся на различных этапах деформирования. Следовательно, имеется много физических или определяющих уравнений, описывающих те или другие процессы деформирования твердых тел.

При всем разнообразии форм, используемых различными авторами определяющих уравнений, описываемые ими процессы деформирования относятся, по существу, к классу простых или близких к ним процессов либо к процессам сложного деформирования по траекториям малой кривизны. Вопрос о применимости тех или других определяющих уравнений к исследуемым процессам деформирования элемента конструкции даже не ставится. Этот вопрос впервые был поставлен и решен сотрудниками Института механики им. С.П.Тимошенко Национальной академии наук Украины с использованием формы траектории деформирования.

Эксперименты [96] показали, что о применимости тех или иных определяющих уравнений с четкой формулировкой базовых экспериментов можно судить по форме траектории деформирования элемента тела в исследуемом процессе нагружения элемента конструкции. Форма траектории деформирования определяется следом запаздывания векторных свойств материала, т.е. памятью материала. Следом запаздывания векторных свойств материала называется длина дуги траектории деформирования после точки излома этой траектории на прямой угол, на который стабилизируется ориентация вектора напряжения по отношению к траектории деформирования. Величина следа запаздывания обычно составляет 10 – 15 пределов текучести материала по деформации.

При классификации траекторий деформирования, кроме прямолинейных, отмечаются также траектории малой кривизны. В таких траекториях наименьший радиус кривизны значительно больше следа запаздывания векторных свойств материала.

Различаются траектории и мало отклоняющиеся от прямолинейных. Это траектории деформирования, которые отклоняются от прямой линии, проходящей через начало координат в пространстве деформаций и точку выхода траектории деформирования за предел текучести на величину, не превышающую след запаздывания векторных свойств материала. Траектории деформирования с наименьшим радиусом кривизны, соизмеримые со следом запаздывания векторных свойств материала, называются траекториями средней кривизны, а с радиусом кривизны меньшим следа запаздывания – траекториями большей кривизны или произвольными плоскими траекториями деформирования. Отличаются также траектории малой кривизны и малого кручения, в которых не только наименьший радиус кривизны больше следа запаздывания, но и наименьший радиус кручения больше этого следа. Отличаются двухзвенные и многозвенные траектории деформирования в виде ломаных прямых линий.

Результаты исследований, приведенных в [96], показывают, что при деформировании элемента тела по прямолинейным траекториям или мало отклоняющимся от них соотношения теории малых упругопластических деформаций, учитывающих историю нагружения, обобщенных на случай описания неизотермических процессов нагружения [90, 95, 96], хорошо согласуются с экспериментальными данными. В этом случае вектора (девиаторы) напряжений и деформаций в изотропном теле почти соосны. Соотношения теории упругопластического деформирования по траекториям малой кривизны [87, 95] хорошо описывают неизотермические процессы деформирования элемента тела по траектории малой кривизны. В этом случае вектор напряжений в изотропном теле направлен по касательной к траектории необратимых деформаций (приближенно к траектории полных малых деформаций) элемента твердого тела.

В отмеченных выше двух теориях термовязкопластичности зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций конкретизируются на основе мгновенных термомеханических поверхностей и сопряженных с ними диаграмм ползучести, полученных при различных фиксированных значениях напряжений и температуры. Мгновенная термомеханическая поверхность является геометрическим местом диа-

грамм растяжения образцов, полученных при фиксированных значениях температуры с такой скоростью нагружения, при которой не проявляются реологические свойства материала. С такой же скоростью нагружается образец до различных фиксированных значений напряжения, для которых определяются диаграммы ползучести при соответствующих значениях температуры.

Для исследования процессов деформирования элемента тела по более сложным траекториям было разработано несколько вариантов экспериментально обоснованных определяющих уравнений и сформулированы базовые эксперименты для конкретизации скалярных функционалов, входящих в эти уравнения. Эти определяющие уравнения были построены с использованием постулата изотропии [21], обобщенного на случай неизотермического нагружения [87]. Эти определяющие уравнения детально обсуждаются в работах [81 – 83, 92, 96]. Поскольку траектории деформирования отдельных элементов твердого тела в процессе его нагружения заранее, как правило, неизвестны, то вид этих траекторий деформирования определяются методом последовательных приближений путем решения краевых задач по траекториям. В первом приближении траектории деформирования отдельных элементов твердого тела определяются путем решения краевой задачи с использованием теории малых упругопластических деформаций с учетом истории нагружения. Для этого весь процесс нагружения тела разбивался на отдельные этапы. Если окажется, что траектории деформирования элементов тела прямолинейны или мало отклоняются от прямой, то на этом решение задачи заканчивается. Если же среди траекторий деформирования есть траектории, отличные от прямолинейных или мало отклоняющиеся от них, то данная краевая задача решается повторно с использованием более сложных определяющих уравнений. Например, уравнений состояния, следующих из теории, описывающей процессы деформирования элемента тела по траектории малой кривизны, если такие траектории имеются среди тех, которые были получены при решении краевой задачи на предыдущем этапе. При более сложных траекториях деформирования краевая задача решается с использованием определяющих уравнений, скалярные функции в которых конкретизируются с учетом геометрии траектории деформирования, полученных при первом решении краевой задачи [92, 96]. Алгоритм и результаты исследования термовязкопластического состояния оболочек вращения при процессах осесимметричного деформирования по различным плоским траекториям подробно описаны в статье [83] и здесь не обсуждаются.

Следует обратить внимание, что все ранее приведенные соотношения термовязкопластичности базировались на предположении независимости связи между интенсивностями напряжений и деформаций от вида напряженного состояния, т.е. эти соотношения при растяжении, сжатии и кручении предполагаются идентичными. В действительности большинство конструкционных сталей являются умеренно чувствительными к виду напряженного состояния. В этих материалах кривые деформирования, полученные при растяжении (сжатии) или кручении образцов, при малых деформациях отличаются не более, чем на 10%. В то же время для алюминиевого сплава Д16Т различие кривых растяжения (сжатия) и кручения достигает 40% [19], т.е. механические характеристики зависят от третьего инварианта девиатора напряжений (от вида напряженного состояния). К материалам, чувствительных к виду напряженного состояния, можно отнести и различные марки чугуна, для которых диаграммы растяжения, кручения и сжатия отличаются существенно.

Для характеристики вида напряженного состояния используется угол, определяющий ориентацию касательного напряжения в октаэдрической плоскости относительно направления проекции на эту плоскость главной оси, вдоль которой действует одно из главных напряжений [29, 158]. Этот угол связан простой зависимостью с параметром Лоде [119], но в отличие от последнего вычисляется не через главные напряжения, а через второй и третий инварианты девиатора напряжений. Как правило, исследование напряженного состояния элементов конструкций из таких материалов проводится на основе уравнений состояния, не учитывающих вид напряженного со-

стояния, а разнсопротивляемость ортотропного материала учитывается путем определенных манипуляций с матрицей податливостей [1, 102, 130, 135]. По-видимому, впервые особенности учета вида напряженного состояния в задачах пластичности предложены в работах [97, 155 – 157], где сформулированы уравнения связи между компонентами напряжений и деформаций при простых процессах деформирования [97], а также при деформировании элементов тела по траекториям малой кривизны [157]. Эти уравнения связывают компоненты тензоров условных напряжений и относительных деформаций. Они записаны в предположении, что деформации состоят из упругих и неупругих составляющих. Уравнения содержат две нелинейные зависимости, вычисляемые по результатам экспериментов. Одна из них выражает связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций, а вторая – связь между вторыми инвариантами соответствующих девиаторов. Для конкретизации этих зависимостей используют две серии базовых опытов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов при различных постоянных значениях угла вида напряженного состояния и нескольких значениях температуры из рассматриваемого диапазона.

Эксперименты показали, что при деформациях меньше 5 – 6% связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций линейная. Определяющие уравнения для процессов деформирования по траекториям малой кривизны записаны в предположении, что направляющие тензоры напряжений и приращений неупругих деформаций совпадают, а для процессов деформирования по прямолинейным траекториям – с использованием предположения о совпадении направляющих тензоров напряжений и деформаций. Уравнения состояния [157] с учетом вида напряженного состояния экспериментально обоснованы [156, 157] и широко используются при решении краевых задач.

При линейной связи между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций и независимости свойств материала от вида напряженного состояния связь между вторыми инвариантами соответствующих девиаторов определяющие уравнения [97] и [157] превращаются в традиционные соотношения [92, 96] теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны и теории простых процессов, в основу которых положены соотношения теории Прандтля – Рейса [123, 124] и теории Генки [112], соответственно.

Для учета процесса повреждения материала при деформировании материала существуют различные подходы. При описании в рамках механики сплошной среды процесса накопления повреждений при вязкопластическом деформировании изотропных материалов вводится некоторый скалярный параметр [53, 95] повреждения, который определяется из кинематического уравнения [98], связывающего скорость изменения во времени повреждения с некоторым эквивалентным напряжением. Такой подход сводит процесс повреждения к процессу разрыхления микрообъема.

Иной подход [115, 116] описания повреждения однородного материала состоит в том, что рассеянные одиночные микроповреждения моделируются квазисферическими микропорами, пустыми или заполненными частицами разрушенного материала, и решение строится на основе теории пористых материалов. При этом как при первом, так и при втором подходе все произвольно проведенные площадки повреждаются одинаково.

В действительности, как следует из экспериментов, распределение повреждений внутри деформированного элемента в условиях сложного напряженного состояния является анизотропным, что может сильно влиять на поведение материала. Поэтому, как отмечал А.А.Ильющин в работе [20], наличие только одной меры накопления повреждений может оказаться не достаточным, чтобы характеризовать момент разрушения хотя бы потому, что механизмы разрушения от касательных и нормальных напряжений различаются. При этом он предлагает ввести симметричный тензор повреждения, зависящий от истории нагружения.

С другой стороны, Л.М.Качанов [28] предложил характеризовать уровень повреждения материала в данной точке величиной ψ_n , где \vec{n} – нормаль к рассматриваемой

площадке. Г.М.Хажинский [85] различает внутрзеренное и межзеренное разрушение. Внутрзеренное разрушение он связывает с разрыхлением материала и предлагает описывать его скалярной функцией ω , а для описания межзеренного повреждения по площадке с нормалью \vec{n} использует величину ω_n , аналогичную ψ_n работы [28]. Одной из возможных способов исследования микрповреждений в однородном материале может быть модель, предложенная в работе [37], в которой в качестве параметра повреждения используется вектор $\vec{\omega}$, компоненты которого связаны с пространством главных напряжений. Тогда повреждение материала на площадке с нормалью n характеризуется проекцией этого вектора на направление нормали.

Кроме определяющих уравнений исследования термовязкопластических процессов деформирования элементов конструкций, изготовленных из изотропных материалов, в работах [86, 143, 147] установлены тензорно-линейные определяющие уравнения и сформулированы базовые эксперименты для исследования упругопластических процессов деформирования ортотропных тел. В качестве ортотропных материалов рассматриваются материалы, в которых главные оси анизотропии теплофизических и механических характеристик совпадают с осями цилиндрической системы координат или с направлениями осей декартовой системы координат.

Ниже приведем основные результаты исследований [140, 142] пространственных задач термовязкопластичности, полученных в отделе термопластичности Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины под руководством авторов обзора. Сформулируем общую форму записи определяющих уравнений, позволяющих исследовать разнообразные процессы неизоэтермического нагружения различных элементов конструкций, изготовленных из изотропных и ортотропных материалов, как с учетом, так и без учета повреждения материалу, вида напряженного состояния и истории нагружения.

Рассмотрим осесимметричные пространственные задачи термовязкопластичности для тел канонической формы и тел вращения произвольного меридионального сечения; неосесимметричные пространственные задачи термовязкопластичности для тел вращения; трехмерные задачи термовязкопластичности для тел произвольной формы, в том числе тел вращения, незамкнутых в окружном направлении; пространственные задачи термовязкопластичности для составных элементов конструкций в виде тел вращения, изготовленных из изотропных и ортотропных материалов, когда главные оси анизотропии не совпадают с системой координат, в которой решается краевая задача.

§1. Постановка задачи термовязкопластичности.

Представим общую постановку задач термовязкопластичности, которая в каждом частном случае при решении конкретных задач адаптируется к геометрии исследуемого объекта, его материалу, условиям термосилового нагружения и др.

Рассмотрим в ортогональной системе координат q_i ($i = 1, 2, 3$) напряженное состояние составного тела из неупруго деформирующихся изотропных и ортотропных материалов при нагружении объемными $\vec{K}(K_1, K_2, K_3)$ и поверхностными $\vec{t}_n(t_{n1}, t_{n2}, t_{n3})$ силами и неравномерном нагреве. Уровень нагружения такой, что возникающие в элементах тела деформации малы. Предполагаем, что механические характеристики материалов зависят от температуры. Нагружение и нагрев тела происходит таким образом, что в его элементах осуществляются простые (или близкие к простым) процессы деформирования или процессы деформирования по траекториям малой кривизны, сопровождающиеся неупругими деформациями и областями разгрузки.

Под составным телом подразумеваем дискретно неоднородное тело вращения, каждая составная часть которого также является телом вращения. При этом как для всего тела, так и для отдельных его частей, имеется общая ось вращения, совпадающая с координатной осью q_1 . Предполагается, что составные части тела, выполненные из разных материалов, скреплены между собой при температуре T_0 без натяга и

на их общей границе выполняются условия идеально силового и теплового контактов. Процесс исследования напряженно-деформированного состояния таких тел вращения сводится к последовательному решению задачи нестационарной теплопроводности по определению температуры T и задачи термовязкопластичности по определению перемещений u_i , деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) для фиксированных моментов времени. Тензор деформаций представляется в виде суммы тензоров упругой и пластической деформаций и деформаций ползучести, при этом в процессе деформирования предполагается неупругое изменение объема материала.

Как показывают исследования, проведенные при разработке учитывающих вид напряженного состояния уравнений состояния, такое предположение о неупругом изменении объема необходимо учитывать при деформациях свыше 4 – 5%. Упругие деформации при изменении напряжений следуют обобщенному закону Гука.

Для учета истории деформирования весь процесс нагружения и нагрева разбивается на отдельные достаточно малые по времени этапы таким образом, чтобы их концы по возможности совпадали с моментами изменения направления процесса деформирования отдельных элементов тела от нагружения к разгрузке. История прослеживается путем последовательного решения задачи на каждом этапе.

Зависимости между компонентами тензора напряжения σ_{ij} и компонентами тензора деформаций ε_{ij} (определяющие уравнения) для изотропного и анизотропного материалов представляются в единой форме, независимо от того, в какой стадии деформирования находится этот материал. Запишем эти соотношения в форме обобщенного закона Гука для анизотропного тела, когда оси q_i ортогональной криволинейной системы координат не совпадают с главными осями q'_i анизотропии теплофизических и механических свойств ортотропного материала. Эти соотношения имеют вид

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn} \varepsilon_{mn} - \sigma_{ij}^* \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

при условии

$$A_{ijmn} = A_{jimn} = A_{ijnm} = A_{mnij} , \quad (1.2)$$

где A_{ijmn} , ... и дополнительные слагаемые σ_{ij}^* имеют различный вид в зависимости от вида анизотропии материала, используемых теорий пластичности и ползучести, а также от способа линеаризации определяющих уравнений. Для линеаризации определяющих уравнений используются методы последовательных линейных приближений, когда в каждом приближении решение исходной нелинейной задачи сводится к решению линейной задачи теории упругости с некоторыми дополнительными слагаемыми. Эти слагаемые учитывают тепловую деформацию, отклонение материала от упругого, повреждение материала, зависимость диаграмм деформирования материала от вида напряженного состояния и температуры и др. Они определяются по результатам решения задачи в предыдущем приближении. По повторяющимся индексам в одночленных выражениях предполагается суммирование в пределах, указанных в круглых скобках. По индексам, указанным в угловых скобках, суммирование проводится не будет.

Для конкретизации функциональной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций, температурой и временем предлагаются подходы, основанные на непосредственном использовании мгновенной термомеханической поверхности, диаграмм ползучести и диаграмм длительной прочности. Эти диаграммы задаются в виде экспериментальных данных, полученных при различных фиксированных значениях температуры. Решение краевой задачи теплопроводности по определению распределения температуры в теле, которое рассматривается, так и решение задачи по определению напряженно-деформированного состояния строятся численно с использованием соответствующих вариационных уравнений.

§2. Определяющие уравнения термовязкопластичности для изотропных и ортотропных материалов.

Подробно рассмотрим определяющие уравнения термовязкопластичности для ортотропных и изотропных материалов. Приведем уравнения состояния для упругих ортотропных материалов; уравнения состояния для упругих материалов, по разному сопротивляющихся растяжению и сжатию; уравнения состояния для неупругих материалов при простых процессах деформирования; уравнения состояния для неупругих материалов при процессах деформирования по траекториям малой кривизны; уравнения состояния для упругих материалов с учетом повреждения материала. Для изотропных материалов приведем уравнения состояния при простых процессах деформирования; уравнения состояния при процессах деформирования по траекториям малой кривизны; уравнения состояния, учитывающие вид напряженного состояния; уравнения состояния, учитывающие повреждение при ползучести.

Поскольку в основном рассматриваются составные элементы конструкций в виде тел вращения, ниже будут приведены уравнения и в цилиндрической системе координат. В качестве ортотропных материалов рассматриваются только цилиндрически ортотропные или ортотропные в декартовой системе координат. При этом одна из осей анизотропии совпадает с осью рассматриваемого тела вращения.

2.1. Ортотропные материалы. Интерес к анизотропным материалам вызван тем, что современное машиностроение, самолетостроение, кораблестроение, ракетостроение и др. невозможно представить без применения композитных материалов. Сочетание легкого, непрочного, податливого материала матрицы с очень прочными и жесткими армирующими волокнами или зернами дает легкий и вместе с тем прочный и жесткий материал, который нашел свое применение в самых разных изделиях – от ответственных элементов крыльев самолетов, обтекателей спускаемых аппаратов или регулирующих стержней атомных реакторов до клюшек для игры в гольф или хоккей, шестов для прыжков в высоту или удилиц для ловли рыбы. Особенностью композитных материалов является то, что их свойства в разных направлениях можно задавать заранее, т.е. они изначально обладают ярко выраженной заданной анизотропией механических и теплофизических свойств. Наряду с анизотропией композитные материалы часто обладают своеобразным свойством – оказывается, что при растягивающих или сжимающих нагрузках их модуль упругости, или жесткость, различны [107, 109, 110].

Например, для эпоксидной смолы, армированной однонаправленными стекловолокнами, модули при сжатии на 20 – 25% меньше модулей при растяжении, в то время как для композита, состоящего из эпоксидной смолы со слоями однонаправленных волокон бора, модули при сжатии примерно на 15 – 20% больше модулей при растяжении. С другой стороны, для композита из эпоксидной смолы, армированной слоями однонаправленных углеродных волокон, модули при растяжении могут превышать модули при сжатии на 40% и больше. У других волокнистых композитов, таких как материалы из углерода, армированного углеродными волокнами, модули при растяжении в 2 – 5 раз больше модулей при сжатии.

Таким образом, для волокнистых композитных материалов невозможно четко установить, что модуль при сжатии больше модуля при растяжении или наоборот. Для зернистых материалов наблюдается аналогичная картина. Физически правдоподобного объяснения этого явления еще нет. Возможно, это явление получит объяснение по мере дальнейшего развития микромеханики композитных материалов. А пока при исследовании напряженного состояния элементов конструкций из композитных материалов пренебрегаем его гетерогенной структурой и пользуемся феноменологическим описанием поведения материала. Иными словами, для описания поведения элемента конструкции из композитного материала с разными модулями при растяжении и сжатии используются соответствующие соотношения анизотропной теории упругости [33].

2.1.1. Идеально упругое состояние ортотропного тела. В случае идеально упругого материала тела, когда положение системы координат q_i относительно главных

осей анизотропии механических и термических свойств материала q_i' определяется направляющими косинусами l_{ij} , коэффициенты A_{ijmn} в соотношениях (1.1) имеют вид

$$A_{ijmn} = A'_{kr\alpha\beta} l_{ki} l_{rj} l_{km} l_{\beta n}. \quad (2.1)$$

В рассматриваемом случае дополнительные слагаемые σ_{ij}^* в (1.1) имеют вид

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^T = \beta_{ij} (T - T_0), \quad (2.2)$$

где T_0 – начальное значение температуры T при первоначальном не напряженном и не деформированном состоянии элемента тела, $\beta_{ij} = \beta'_{ij} l_{mi} l_{nj}$ ($m, n = 1, 2, 3$). Здесь отличные от нуля термические параметры β'_{mn} имеют вид

$$\beta'_{11} = A'_{11} \alpha_1 + A'_{12} \alpha_2 + A'_{13} \alpha_3 \quad (1, 2, 3), \quad (2.3)$$

α_i – коэффициенты линейного теплового расширения материала вдоль главных осей анизотропии q_i' , символ (1, 2, 3) означает, что недостающие выражения для β'_{ij} могут быть получены путем круговой перестановки индексов.

Для упругого ортотропного материала, в котором главные оси анизотропии механических и теплофизических характеристик материала совпадают с направлениями осей ортогональной системы координат X_1, X_2, X_3 , связь между компонентами деформаций и напряжений можно записать через технические характеристики материала следующим образом [33]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^T \\ \varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^T \\ \dots \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \dots \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}, \quad (2.4)$$

где E_i – модуль упругости в направлении главных осей анизотропии, совпадающих с выбранной системой координат; G_{ij} – модуль сдвига в соответствующей координатной плоскости выбранной системы; ν_{ij} – коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие элемента в направлении X_j при растяжении его в направлении X_i ; $\varepsilon_{ii}^T = \alpha_{ii}^T (T - T_0)$, α_{ii}^T – коэффициент линейного теплового расширения материала вдоль соответствующего главного направления анизотропии. При этом из условия существования положительно определенной функции потенциальной энергии следует, что $\nu_{ij} / E_i = \nu_{ji} / E_j$ и матрица податливостей в соотношениях (2.4) является симметричной.

В качестве ортотропных материалов рассмотрим упруго деформирующиеся материалы, в которых главные оси анизотропии теплофизических и механических характеристик могут совпадать с осями цилиндрической системы координат или с направлениями осей декартовой системы координат, одна из осей которой совпадает с осью вращения тела.

Таким образом, под X_i понимается как цилиндрическая система координат z, r, φ , так и декартовая система – z, x, y . Разрешив систему уравнений (2.4) относи-

тельно компонентов напряжений, получим для последних выражения через компоненты деформаций в главных осях анизотропии механических характеристик материала, т.е. в случае цилиндрической ортотропии - в системе координат z, r, φ , а в случае прямолинейной ортотропии - в декартовой системе координат z, x, y . Если теперь в последнем случае перейти по известным формулам преобразования от декартовой системы координат к цилиндрической, связь между компонентами напряжений и деформаций для таких материалов можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T), \quad (2.5)$$

где выражения A_{ijkl} ($i, j, k, l = z, r, \varphi$) зависят от рассматриваемого материала.

В случае цилиндрически ортотропного материала они будут следующими:

$$\begin{aligned} A_{zzzz} &= \Delta_{11}/\Delta; \quad A_{zzrr} = A_{rrzz} = \Delta_{12}/\Delta; \quad A_{zz\varphi\varphi} = A_{\varphi\varphi zz} = \Delta_{13}/\Delta; \\ A_{rrrr} &= \Delta_{22}/\Delta; \quad A_{rr\varphi\varphi} = A_{\varphi\varphi rr} = \Delta_{23}/\Delta; \quad A_{\varphi\varphi\varphi\varphi} = \Delta_{33}/\Delta; \\ A_{zrzr} &= G_{zr}; \quad A_{z\varphi z\varphi} = G_{z\varphi}; \quad A_{r\varphi r\varphi} = G_{r\varphi}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} A_{zzzr} &= A_{zzz\varphi} = A_{zzr\varphi} = A_{rrzr} = A_{rrz\varphi} = A_{rrr\varphi} = A_{\varphi\varphi zr} = A_{\varphi\varphi z\varphi} = A_{\varphi\varphi r\varphi} = A_{zrzz} = A_{zrzz} = A_{zr\varphi\varphi} = \\ &= A_{zrz\varphi} = A_{zrr\varphi} = A_{z\varphi zz} = A_{z\varphi rr} = A_{z\varphi\varphi\varphi} = A_{z\varphi zr} = A_{z\varphi r\varphi} = A_{r\varphi rr} = A_{r\varphi\varphi\varphi} = A_{r\varphi zr} = A_{r\varphi z\varphi} = 0, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \left(\frac{1}{E_\varphi} - \frac{v_{r\varphi}^2}{E_r} \right) / E_r; \quad \Delta_{12} = \left(v_{z\varphi} v_{r\varphi} / E_r + v_{zr} / E_\varphi \right) / E_z; \quad \Delta_{13} = (v_{zr} v_{r\varphi} + v_{z\varphi}) / E_z E_r; \\ \Delta_{22} &= \left(1/E_\varphi - v_{z\varphi}^2 / E_z \right) / E_z; \quad \Delta_{23} = \left(v_{zr} v_{z\varphi} / E_z + v_{r\varphi} / E_r \right) / E_z; \\ \Delta_{33} &= \left(1/E_r - v_{zr}^2 / E_z \right) / E_z; \quad \Delta = (\Delta_{11} - v_{zr} \Delta_{12} - v_{z\varphi} \Delta_{13}) / E_z; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{zz}^T = \alpha_{zz}^T (T - T_0); \quad \varepsilon_{rr}^T = \alpha_{rr}^T (T - T_0); \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^T = \alpha_{\varphi\varphi}^T (T - T_0); \quad \varepsilon_{zr}^T = \varepsilon_{z\varphi}^T = \varepsilon_{r\varphi}^T = 0. \quad (2.8)$$

Для прямолинейно ортотропного материала коэффициенты A_{ijkl} и компоненты тепловой деформации ε_{kl}^T определяются выражениями:

$$\begin{aligned} A_{zzzz} &= \Delta_{11}^*; \quad A_{zzr\varphi} = (\Delta_{13}^* - \Delta_{12}^*) \sin 2\varphi / 2; \quad \left. \begin{aligned} A_{zrrr} \\ A_{z\varphi\varphi\varphi} \end{aligned} \right\} = [\Delta_{12}^* + \Delta_{13}^* \pm (\Delta_{12}^* - \Delta_{13}^*) \cos 2\varphi] / 2; \\ \left. \begin{aligned} A_{rrrr} \\ A_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \end{aligned} \right\} &= [(3\Delta_{22}^* + 3\Delta_{33}^* + 2\Delta_{23}^* + 4G_{xy}) \pm 4(\Delta_{22}^* - \Delta_{33}^*) \cos 2\varphi + \\ &+ (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) \cos 4\varphi] / 8; \\ A_{rr\varphi\varphi} &= [(\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* + 6\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) - (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) \cos 4\varphi] / 8; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\left. \begin{matrix} A_{rrr\varphi} \\ A_{\varphi\varphi r\varphi} \end{matrix} \right\} = [2(\Delta_{33}^* - \Delta_{22}^*) \sin 2\varphi \pm (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) \sin 4\varphi] / 8;$$

$$\left. \begin{matrix} A_{zrzr} \\ A_{z\varphi z\varphi} \end{matrix} \right\} = [(G_{zx} + G_{zy}) \pm (G_{zx} - G_{zy}) \cos 2\varphi] / 2;$$

$$A_{r\varphi r\varphi} = [(\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* + 4G_{xy}) - (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) \cos 4\varphi] / 8;$$

$$A_{zzzr} = A_{zzz\varphi} = \dots = A_{zrzr} = A_{zrrr} = A_{zr\varphi\varphi} = A_{zr\varphi r} = \dots = A_{r\varphi z\varphi} = 0;$$

$$\Delta_{ij}^* = \Delta_{ij} / \Delta; \quad \Delta_{11} = \left(\frac{1}{E_y} - \frac{v_{xy}^2}{E_x} \right) / E_x; \quad \Delta_{12} = \left(\frac{v_{zy}^2 v_{xy}}{E_x} + \frac{v_{zx}}{E_y} \right) / E_z;$$

$$\Delta_{13} = (v_{zx} v_{xy} + v_{zy}) / (E_z E_x); \quad \Delta_{22} = \left(\frac{1}{E_y} - \frac{v_{zy}^2}{E_z} \right) / E_z; \quad (2.10)$$

$$\Delta_{23} = \left(\frac{v_{zx} v_{zy}}{E_z} + \frac{v_{xy}}{E_x} \right) / E_z; \quad \Delta_{33} = \left(\frac{1}{E_x} - \frac{v_{zx}^2}{E_z} \right) / E_z; \quad \Delta = (\Delta_{11} - v_{zx} \Delta_{12} - v_{zy} \Delta_{13}) / E_z;$$

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij}^T (T - T_0) \quad (i, j = z, r, \varphi); \quad (2.11)$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha_{rr}^T \\ \alpha_{\varphi\varphi}^T \end{matrix} \right\} = (\alpha_{xx}^T + \alpha_{yy}^T) / 2 \pm (\alpha_{xx}^T - \alpha_{yy}^T) \cos 2\varphi / 2; \quad \alpha_{r\varphi}^T = (\alpha_{yy}^T - \alpha_{xx}^T) \sin 2\varphi / 2, \quad \alpha_{zr}^T = \alpha_{z\varphi}^T = 0.$$

Связь между компонентами напряжений и деформаций (1.1) запишем в виде закона Гука для однородного изотропного материала. Для этого представим коэффициенты A_{ijkl} в виде $A_{ijkl} = A_{ijkl}^0 (1 - \omega_{ijkl})$, где A_{ijkl}^0 – некоторые независимые от окружающей координаты осредненные значения соответствующих коэффициентов, а $A_{ijkl}^0 \omega_{ijkl}$ – функции, характеризующие изменение A_{ijkl} в окружном направлении и учитывающие их зависимость от температуры. Тогда связь между напряжениями и деформациями можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zr} \\ \sigma_{z\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} A_{zzzz}^0 & A_{zzrr}^0 & A_{zz\varphi\varphi}^0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{zzrr}^0 & A_{rrrr}^0 & A_{rr\varphi\varphi}^0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{zz\varphi\varphi}^0 & A_{rr\varphi\varphi}^0 & A_{\varphi\varphi\varphi\varphi}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{zrzr}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{z\varphi z\varphi}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{r\varphi r\varphi}^0 \end{bmatrix} * \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{zr} \\ \varepsilon_{z\varphi} \\ \varepsilon_{r\varphi} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \sigma_{zz}^* \\ \sigma_{rr}^* \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* \\ \sigma_{zr}^* \\ \sigma_{z\varphi}^* \\ \sigma_{r\varphi}^* \end{matrix} \right\}, \quad (2.12)$$

где для цилиндрически ортотропного материала –

$$\sigma_{zz}^* = A_{zzzz} \varepsilon_{zz}^T + A_{zzrr} \varepsilon_{rr}^T + A_{zz\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi}^T + A_{zzzz}^0 \omega_{zzzz} \varepsilon_{zz} + A_{zzrr}^0 \omega_{zzrr} \varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}^0 \omega_{zz\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi};$$

$$\sigma_{r\varphi}^* = 2A_{r\varphi r\varphi}^0 \omega_{r\varphi r\varphi} \varepsilon_{r\varphi}^T,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{если } \begin{matrix} \sigma_{11} > 0 \\ \sigma_{22} > 0 \end{matrix}, \text{ то } \frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2} = \frac{v_{12}^+}{E_1^+}; \text{ если } \begin{matrix} \sigma_{11} < 0 \\ \sigma_{22} < 0 \end{matrix}, \text{ то } \frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2} = \frac{v_{12}^-}{E_1^-};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{если } \begin{matrix} \sigma_{11} > 0 \\ \sigma_{22} < 0 \end{matrix}, \text{ то } \frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2} = \frac{|\sigma_{11}|}{|\sigma_{11}| + |\sigma_{22}|} \frac{v_{12}^+}{E_1^+} + \frac{|\sigma_{22}|}{|\sigma_{11}| + |\sigma_{22}|} \frac{v_{21}^-}{E_2^-}; \quad (2.15)$$

$$\text{если } \begin{matrix} \sigma_{11} < 0 \\ \sigma_{22} > 0 \end{matrix}, \text{ то } \frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2} = \frac{|\sigma_{11}|}{|\sigma_{11}| + |\sigma_{22}|} \frac{v_{12}^-}{E_1^-} + \frac{|\sigma_{22}|}{|\sigma_{11}| + |\sigma_{22}|} \frac{v_{21}^+}{E_2^+};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{если } \sigma_{12} > 0, \text{ то } \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_{12}^+} = \frac{1}{E_{12}^{45+}} - \left(\frac{1}{E_1^+} + \frac{1}{E_2^+} - \frac{v_{12}^+}{E_1^+} \right);$$

$$\text{если } \sigma_{12} < 0, \text{ то } \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_{12}^-} = \frac{1}{E_{12}^{45-}} - \left(\frac{1}{E_1^-} + \frac{1}{E_2^-} - \frac{v_{12}^-}{E_1^-} \right).$$

Теоретического обоснования для таких подходов нет, но они позволяют представить матрицу податливостей симметричной и воспользоваться при решении сформулированной задачи теорией упругости для анизотропного материала. С использованием таких подходов была разработана методика исследования напряженно-деформированного состояния слоистых тел вращения из цилиндрически ортотропных материалов и материалов, ортотропных в декартовой системе координат, при носесимметричном термосиловом нагружении. Результаты этих исследований опубликованы в работах [56 – 59, 60, 65, 135 и др.].

Следует отметить, что экспериментально значения модуля сдвига только при растяжении или только при сжатии нельзя измерить. Они определяются с использованием других экспериментальных значений механических свойств материала. Так, из-за неоднородности механических характеристик в поперечном сечении при прямолинейной ортотропии материала образца в эксперименте зависимость $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ при $i \neq j$ может быть получена только путем осреднения в окружном направлении соответствующих касательных напряжений и деформаций сдвига. В этом случае реальные (измеренные) модули сдвига – это средние значения соответствующих модулей сдвига при растяжении и сжатии. Поэтому для определения значений модулей при растяжении или сжатии используются экспериментальные данные по растяжению или сжатию образцов, вырезанных в плоскости $i \sim j$ под углом 45° относительно одной из осей, с последующим определением соответствующих величин по формуле

$$\frac{1}{G_{ij}} = \frac{4}{E_{ij}^{45}} - \left(\frac{1}{E_i} + \frac{1}{E_j} - \frac{2v_{ij}}{E_i} \right),$$

где E_{ij}^{45} – соответствующий модуль сдвига при растяжении или сжатии образца, вырезанного в плоскости ij под углом 45° .

Разрешив систему уравнений для деформаций с уже симметричной матрицей податливостей относительно компонентов напряжений, получим выражение для напряжений через компоненты деформаций в главных осях анизотропии механических характеристик материала. Если теперь перейти по известным формулам преобразования

от этой системы координат к цилиндрической, связь между компонентами напряжений и деформаций для таких материалов можно записать в форме (2.5).

Поскольку свойства материала зависят от напряженного состояния, и наоборот, задача определения напряженно-деформированного состояния является задачей с неизвестными механическими характеристиками. Однако от этой неопределенности можно избавиться, воспользовавшись следующей итерационной процедурой. Сначала перемещения и напряжения определяются в цилиндрической системе координат с первоначально заданными в декартовой системе координат свойствами (например, средними значениями коэффициентов Пуассона и модулей при растяжении и сжатии). Затем определяются в декартовой системе координат соответствующие новые свойства материала с учетом знака напряжений, вычисленных на предыдущем шаге, и процесс вычислений повторяется, пока не будет достигнута требуемая точность. При этом следует иметь в виду, что поскольку задача решается в цилиндрической системе координат, переход к компонентам напряжений в декартовой системе координат осуществляется по известным формулам преобразования.

2.1.3. *Неупругое состояние ортотропных тел при простых процессах деформирования* [36, 147]. В случае необратимого деформирования ортотропного тела будем пользоваться определяющими уравнениями в форме (1.1), (2.5) или (2.12) при условии, что упругие параметры A_{ijmn} определяются прежними выражениями (2.1), (2.6)–(2.11) через технические константы упругости [33], параметры A_{ijmn}^0 являются средними значением A_{ijmn} на некотором интервале изменения температуры, а дополнительные слагаемые σ_{ij}^* в первом случае определяются выражением

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^T + \sigma_{ij}^n, \quad (2.16)$$

а во втором –

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^n. \quad (2.17)$$

Здесь

$$\sigma_{ij}^T = \beta_{ij} (T - T_0); \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^e = A_{ijmn}^0 \omega_{ijmn} \varepsilon_{mn} + \beta_{ij} (T - T_0); \quad \sigma_{ij}^n = \sigma_{ij}^n l_{im} l_{in} \quad (m, n = 1, 2, 3); \quad (2.18)$$

$$\sigma_{11}^n = A_{11}' \varepsilon_{11}^n + A_{12}' \varepsilon_{12}^n + A_{13}' \varepsilon_{13}^n; \quad \sigma_{12}^n = 2G_{12}' \varepsilon_{12}^n \quad (1, 2, 3). \quad (2.19)$$

При этом предполагается, что компоненты полной деформации ε_{ij}' в системе координат q_i' представлены в виде суммы упругих ε_{ij}^e и необратимых ε_{ij}^n составляющих деформаций

$$\varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^n. \quad (2.20)$$

Упругие составляющие деформации ε_{ij}^e определяются законом Гука для ортотропного тела [33], а необратимые составляющие деформации ε_{ij}^n представим в виде суммы мгновенных пластических деформаций ε_{ij}^p и деформаций ползучести ε_{ij}^c

$$\varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^c. \quad (2.21)$$

Пластические составляющие деформации в главных осях анизотропии представим в виде

$$\varepsilon_{11}^p = \psi_{11}' \sigma_{11}' + \psi_{12}' \sigma_{22}' + \psi_{13}' \sigma_{33}'; \quad \varepsilon_{12}^p = g_{12}' \sigma_{12}' \quad (1, 2, 3). \quad (2.22)$$

Для определения деформаций ползучести весь процесс нагружения и нагрева тела разобьем на отдельные этапы. Тогда в конце m -го этапа нагружения и нагрева тела деформации ползучести определяются так:

$$(\varepsilon_{ij}^{'c})_m = \sum_{k=1}^m \Delta_k \varepsilon_{ij}^{'c}. \quad (2.23)$$

Приращения деформаций ползучести в главных осях анизотропии представим в таком виде:

$$\Delta_k \varepsilon_{11}^{'c} = C_{11}' \sigma_{11}' + C_{12}' \sigma_{22}' + C_{13}' \sigma_{33}', \quad \Delta_k \varepsilon_{12}^{'c} = D_{12}' \sigma_{12}' \quad (1, 2, 3). \quad (2.24)$$

При этом компоненты σ_{ij}' тензора напряжения в главных осях анизотропии q' связаны с компонентами σ_{ij} тензора напряжения в системе координат q_i известными соотношениями:

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{mn} l_{im} l_{jn}. \quad (2.25)$$

Функции ψ_{ij}' , g_{ij}' , C_{ij}' и D_{ij}' определяются экспериментально на основе построенных мгновенных термомеханических поверхностей и сопряженными с ними диаграммами ползучести, которые характеризуют механические свойства материала вдоль главных осей анизотропии и сдвига между этими осями.

Функции ψ_{ij}' определяются мгновенными диаграммами растяжения плоских образцов вдоль главных осей анизотропии при различных значениях температуры с замерами продольных и поперечных деформаций в таком виде:

$$\psi_{11}' = \frac{|\varepsilon_{11}^{'p}|}{\sigma_{11}^{'D}}, \quad \psi_{21}' = -\frac{|\varepsilon_{22}^{'p}|}{\sigma_{11}^{'D}}, \quad \psi_{31}' = -\frac{|\varepsilon_{33}^{'p}|}{\sigma_{11}^{'D}} \quad (1, 2, 3), \quad (2.26)$$

а функции C_{ij}' определяются на основе соответствующих диаграмм ползучести образцов равенствами:

$$C_{11}' = \frac{|\Delta \varepsilon_{11}^{'c}|}{\sigma_{11}^{'D}}, \quad C_{21}' = -\frac{|\Delta \varepsilon_{22}^{'c}|}{\sigma_{11}^{'D}}, \quad C_{31}' = -\frac{|\Delta \varepsilon_{33}^{'c}|}{\sigma_{11}^{'D}} \quad (1, 2, 3). \quad (2.27)$$

Функции g_{ij}' определяются мгновенными диаграммами, полученными из опытов на чистый сдвиг между главными осями анизотропии материала, формулами

$$g_{12}' = g_{21}' = \frac{|\varepsilon_{12}^{'p}|}{\sigma_{12}^{'D}} \quad (1, 2, 3), \quad (2.28)$$

а функции D_{ij}' определяются соответствующими диаграммами ползучести образцов выражениями вида

$$D_{12}' = D_{21}' = \frac{\Delta \varepsilon_{12}^{'p}}{\sigma_{12}^{'D}} \quad (1, 2, 3), \quad (2.29)$$

где $\sigma_{ij}^{'D}$ определяются по соответствующим формулам мгновенного деформирования образцов.

Эксперименты [30, 113 и др.] показывают, что функции ψ_{ij}' и C_{ij}' как правило, образуют несимметричные матрицы, т.е. $\psi_{ij}' \neq \psi_{ji}'$, $C_{ij}' \neq C_{ji}'$ ($i \neq j$). Тогда в случае неупругой несжимаемости материала

$$\varepsilon_{11}^{'p} + \varepsilon_{22}^{'p} + \varepsilon_{33}^{'p} = 0; \quad \varepsilon_{11}^{'c} + \varepsilon_{22}^{'c} + \varepsilon_{33}^{'c} = 0 \quad (2.30)$$

и имеют место следующие зависимости:

$$\psi_{21}' = \psi_{31}' = -0,5\psi_{11}'; \quad C_{21}' = C_{31}' = -0,5C_{11}'. \quad (2.31)$$

Предполагая, что матрицы функций ψ'_{ij} и C'_{ij} симметричны, т. е. когда $\psi'_{ij} = \psi'_{ji}$, $C'_{ij} = C'_{ji}$ и материал неупруго несжимаем (2.30), эти функции с различными индексами выражаются через соответствующие функции с одинаковыми индексами следующим образом:

$$\varepsilon'_{11}{}^p + \varepsilon'_{22}{}^p + \varepsilon'_{33}{}^p = 0; \quad \varepsilon'_{11}{}^c + \varepsilon'_{22}{}^c + \varepsilon'_{33}{}^c = 0 \quad (1, 2, 3); \quad (2.32)$$

$$C'_{12} = C'_{21} = -0,5(C'_{11} + C'_{22} - C'_{33}) \quad (1, 2, 3).$$

В этих случаях для определения функций ψ'_{ij} и C'_{ij} необходимо иметь мгновенные диаграммы растяжения образцов и соответствующие диаграммы ползучести только вдоль трех главных направлений анизотропии с замерами только продольных деформаций.

Отметим, что функции g'_{ij} и D'_{ij} , характеризующие свойства материала, проявляющиеся при сдвиге между главными осями анизотропии, можно определить не проводя опыты на чистый сдвиг (2.28), (2.29), а пользуясь опытами на одноосное растяжение образцов, вырезанных вдоль осей равнонаклоненных к двум главным осям анизотропии и ортогональных третьей главной оси. При этом необходимо воспользоваться формулами преобразования функций ψ'_{ij} , g'_{ij} , C'_{ij} и D'_{ij} при повороте системы координат, аналогичных соотношениям (2.1) для параметров упругости. Эти формулы имеют место в рассматриваемом случае в силу инвариантности суммы произведений $\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}{}^p$, $\sigma'_{ij}\Delta\varepsilon'_{ij}{}^c$ и представлений (2.22), (2.24). Например, растягивая образец в направлении оси q_1 (напряжением S_1), наклоненной к главным осям анизотропии q'_1, q'_2 под углом $\pi/4$ и ортогональной оси q'_3 , и замеряя продольную деформацию ε_{11} , можно определить функции

$$\psi_{11} = \frac{|\varepsilon'_{11}{}^p|}{S_1} \quad (1, 2, 3); \quad C_{11} = \frac{\Delta\varepsilon'_{11}{}^c}{S_1} \quad (1, 2, 3). \quad (2.33)$$

Функции ψ_{11} определяются мгновенной термомеханической поверхностью, а C_{11} – соответствующей диаграммой ползучести. Тогда из формул, аналогичных (2.1), применительно к функциям ψ'_{ij} , g'_{ij} , ($\psi'_{ij} \neq \psi'_{ji}$) и C'_{ij} , D'_{ij} , ($C'_{ij} \neq C'_{ji}$) получим

$$2g'_{12} = 2g'_{21} = 4\psi_{11} - (\psi'_{11} + \psi'_{22} + \psi'_{12} + \psi'_{21}) \quad (1, 2, 3); \quad (2.34)$$

$$2D'_{12} = 2D'_{21} = 4C'_{11} - (C'_{11} + C'_{22} + C'_{12} + C'_{21}) \quad (1, 2, 3). \quad (2.35)$$

В случае неупругой несжимаемости материала (2.30) и существовании зависимостей (2.31) равенства (1.34), (2.35) принимают вид

$$g'_{12} = g'_{21} = 2\psi_{11} - \frac{1}{4}(\psi'_{11} + \psi'_{22}) \quad (1, 2, 3); \quad (2.36)$$

$$D'_{12} = D'_{21} = 2C'_{11} - \frac{1}{4}(C'_{11} + C'_{22}) \quad (1, 2, 3). \quad (2.37)$$

Если же при неупругой несжимаемости материала (2.30) функции ψ'_{ij} и C'_{ij} симметричны ($\psi'_{ij} = \psi'_{ji}$ и $C'_{ij} = C'_{ji}$) и существуют зависимости (2.32), равенства (2.34), (2.35) принимают вид

$$2g'_{12} = 2g'_{21} = 4\psi_{11} - \psi'_{33} \quad (1, 2, 3); \quad (2.38)$$

$$2D'_{12} = 2D'_{21} = 4C'_{11} - C'_{33} \quad (1, 2, 3). \quad (2.39)$$

Следовательно, формулы (2.34) – (2.39) дают возможность определить значения функций g'_{ij}, D'_{ij} через значения функций ψ'_{ij}, ψ'_{ij} и C'_{ij}, C'_{ij} , соответственно.

Функции $\psi'_{ij}, g'_{ij}, C'_{ij}$ и D'_{ij} определяются в процессе решения краевой задачи методом последовательных приближений. Весь процесс нагружения и нагрева твердого тела разобьем на отдельные этапы. Предположим, что в начале k -го этапа нагружения и нагрева тела известны значения компонент пластических деформаций ε'^p_{ij} и деформаций ползучести ε'^c_{ij} , полученные в последнем приближении предыдущего этапа (в первом этапе эти компоненты равны нулю).

Тогда в первом приближении k -го этапа решается упругая краевая задача с дополнительными напряжениями в соотношениях (1.1), (2.5) или (2.12), которые определяются равенствами (2.16) или (2.17), соответственно, для нагрузки и температурного поля конца этого этапа. При этом σ'^n_{ij} определяются равенствами (2.18), (2.19), в которых значения ε'^n_{ij} (2.21) заданы в начале рассматриваемого этапа нагружения. В результате этого решения определяются значения компонент тензоров напряжений σ'_{ij} и деформаций ε'_{ij} в системе координат q_i . Затем, пользуясь формулами преобразования компонент тензоров напряжений и деформаций при повороте системы координат, аналогичными (2.25), определим значения соответствующих компонент тензоров напряжений σ'_{ij} и деформаций ε'_{ij} в главных осях анизотропии. Пользуясь этими значениями деформаций и значениями на начало этапа нагружения компонентами деформаций ползучести ε'^c_{ij} определим компоненты чисто силовой мгновенной деформации

$$\bar{\varepsilon}'_{11} = \varepsilon'_{11} - \varepsilon'^c_{11} - \alpha_1(T - T_0); \quad \bar{\varepsilon}'_{12} = \varepsilon'_{12} - \varepsilon'^c_{12} \quad (1, 2, 3), \quad (2.40)$$

где α_i – коэффициент линейного теплового расширения ортотропного материала в главных осях анизотропии q_i , T – значения температуры элемента тела в конце k -го этапа. По значениям мгновенных силовых деформаций (2.40) и по мгновенным термомеханическим поверхностям $\sigma'^D_{ij} = f_{ij}(\bar{\varepsilon}'_{ij}, T)$ для температуры соответствующего элемента тела найдем компоненты напряжения σ'^D_{ij} и соответствующие упругие составляющие деформации $\sigma'^D_{11}/E_1, \sigma'^D_{12}/2G_{12}$ (1, 2, 3), а также мгновенные пластические составляющие деформации

$$\varepsilon'^p_{11} = \bar{\varepsilon}'_{11} - \frac{\sigma'^D_{11}}{E_1}; \quad \varepsilon'^p_{12} = \bar{\varepsilon}'_{12} - \frac{\sigma'^D_{12}}{2G_{12}} \quad (1, 2, 3). \quad (2.41)$$

Зная эти величины, по формулам (2.26), (2.28), (2.31), (2.32) можно определить значения функций ψ'_{ij} и g'_{ij} при соответствующих значениях температуры на k -ом этапе нагружения в первом приближении. Далее по найденным значениям σ'^D_{ij} и температуре элемента тела выбирается соответствующая диаграмма ползучести, полученная путем интерполяции по заданным экспериментальным диаграммам. По этой диаграмме для времени этапа и за время этого этапа определяются приращения деформаций ползучести $\Delta_k \varepsilon'^c_{ij}$ образца и по формулам (2.27), (2.29), (2.31) и (2.32) определяем соответствующие значения функций C'_{ij} и D'_{ij} в первом приближении. Если же функции g'_{ij} и D'_{ij} определяются равенствами (2.34) – (2.39), то кроме вычисленных выше значений ψ'_{ij}, C'_{ij} необходимо еще определить значения функций ψ'_{ij}, C'_{ij} (2.33). Для этого, пользуясь формулами преобразования компонент тензора чисто си-

ловых мгновенных деформаций (2.40) в главных осях анизотропии q_i' , вычисляем соответствующие компоненты $\bar{\varepsilon}_{11}^*$, $\bar{\varepsilon}_{22}^*$, $\bar{\varepsilon}_{33}^*$ деформации в направлениях осей, равно наклоненных к двум главным осям и ортогональных к третьей главной оси. По этим значениям деформаций и уравнениям мгновенных термомеханических поверхностей $S_i = \Phi_i(\bar{\varepsilon}_{ii}^*, T)$ для температуры T элемента тела находим соответствующие значения напряжений S_i , упругие составляющие деформации S_i / E_{12} (1,2,3) в этих направлениях и соответствующие значения мгновенных пластических деформаций образца

$$\varepsilon_{11}^p = \bar{\varepsilon}_{11}^* - \frac{S_1}{E_{12}} \quad (1, 2, 3), \quad (2.42)$$

где E_{12} – модуль упругости материала вдоль осей равнонаклоненных к двум главным осям q_1' , q_2' и ортогональных к третьей главной оси.

По формулам (2.33) определяем значения ψ_{ij}' , а по формулам (2.34), (2.36) или (2.38) находим соответствующие значения g_{ij}' в первом приближении. Пользуясь далее полученными значениями S_1 и соответствующими диаграммами ползучести в этих направлениях при температуре T для момента времени этапа за время его протекания, определим приращения деформаций ползучести $\Delta_k \varepsilon_{11}^c$ образца, а следовательно, и значения функций c_{11} (1, 2, 3) (2.33). После этого по одной из формул (2.35), (2.37) или (2.39) вычислим значения функций D_{ij}' в первом приближении.

Когда определены тем или другим способом для каждого элемента тела в первом приближении значения функций ψ_{ij}' , g_{ij}' , C_{ij}' и D_{ij}' на k -ом этапе нагружения, можно определить соответствующие значения $\varepsilon_{ij}^{i'p}$ (2.22), $\Delta_k \varepsilon_{ij}^{i'c}$ (2.24) и накопленные деформации ползучести $\varepsilon_{ij}^{i'c}$ в конце k -ого этапа (2.23), и, следовательно, полные необратимые составляющие деформации $\varepsilon_{ij}^{i'n}$ (2.21). При этом используем значения компонент напряжений σ_{ij}' , полученные в первом приближении и определяющие значения параметров $\sigma_{ij}^{i'n}$ (2.19), σ_{ij}^n (2.18) и дополнительных напряжений σ_{ij}^{i*} (2.16) или (2.17) во втором приближении. Затем снова решаем краевую задачу теории упругости с новыми значениями дополнительных напряжений σ_{ij}^{i*} . В результате этого решения определяем компоненты напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} во втором приближении k -ого этапа нагружения и нагрева. Далее вычисления ведутся по алгоритму первого приближения. Приближения проводятся до тех пор, пока полученные в результате решения краевой задачи напряжения σ_{ij}' не станут равными, с некоторой точностью, с соответствующими напряжениями $\sigma_{ij}^{i'D}$, вычисленные по мгновенным диаграммам растяжения или сдвига в соответствующих направлениях анизотропии. После этого проверяются условия активного нагружения

$$\sigma_{ij}' \Delta_k \varepsilon_{ij}^{i'p} > 0 \quad (2.43)$$

и разгрузки

$$\sigma_{ij}' \Delta_k \varepsilon_{ij}^{i'p} \leq 0. \quad (2.44)$$

Если окажется, что в каком-то элементе твердого тела условие активного нагружения (2.43) не выполняется, то рассматриваемый этап нагружения следует пересчитать, полагая, что пластические деформации $\varepsilon_{ij}^{i'p}$ в этом элементе не меняются и рав-

ны их значениям в начале этого этапа нагружения. Приращения деформаций ползучести при этом определяются соответствующими диаграммами ползучести.

Приведенные соотношения деформационной теории термовязкопластичности ортотропного тела по аналогии с изотропными телами можно применять к исследованию процессов деформирования элементов тела по прямолинейным или мало отклоняющимся от них траекториям, а сами определяющие уравнения в случае изотропного тела переходят в соотношения теории малых упругопластических деформаций с учетом истории нагружения [91, 95].

2.1.4 Неупругое состояние ортотропных тел при деформировании по траекториям малой кривизны [36, 143]. При необратимом деформировании ортотропного тела по траекториям малой кривизны весь процесс нагружения и нагрева тела, как и в предыдущем случае, разбиваем на отдельные этапы. Тогда компоненты необратимых деформаций ε'_{ij} в формулах (2.19) в конце m -го этапа нагружения определяются равенством

$$(\varepsilon'_{ij})_m = \sum_{k=1}^m \Delta_k \varepsilon'_{ij}, \quad (2.45)$$

где приращения необратимых компонент деформации определяются выражениями [143]:

$$\Delta_k \varepsilon'_{11} = \left\langle \frac{a'_{1111} \sigma'_{11} + a'_{1122} \sigma'_{22} + a'_{1133} \sigma'_{33}}{S} \right\rangle \Delta_k \Gamma^n; \quad \Delta_k \varepsilon'_{12} = \left\langle \frac{a'_{1212}}{S} \right\rangle \Delta_k \Gamma^n \quad (1, 2, 3). \quad (2.46)$$

Здесь угловыми скобками обозначены средние значения величин, стоящих в этих скобках, на m -ом этапе нагружения. Коэффициенты a'_{ijmn} образуют симметричную матрицу податливостей и определяются из экспериментов по растяжению образцов, вырезанных из ортотропного материала в различных направлениях при различных фиксированных температурах. Эти коэффициенты могут зависеть от температуры и в силу инвариантности соотношения $\sigma'_{ij} \Delta_k \varepsilon'_{ij}$ преобразуются при повороте системы координат по формулам, аналогичным (2.1). Величина S называется приведенной интенсивностью касательных напряжений для необратимых деформаций ортотропного тела, $\Delta_k \Gamma^n$ – приращение интенсивности необратимых деформаций сдвига, которые определяются указанными выше экспериментами. При условии неупругой несжимаемости материала и симметричности матрицы коэффициентов a'_{ijmn} принимают вид:

$$a'_{1122} = -\frac{1}{2}(a'_{1111} + a'_{2222} - a'_{3333}) \quad (1, 2, 3), \quad (2.47)$$

т.е. из девяти коэффициентов в первых трех уравнениях (2.46) независимых будет только три. При этом уравнения совпадают с уравнениями работы [113]. Компоненты приращений необратимых деформаций $\Delta_k \varepsilon'_{ij}$ представим в виде суммы двух слагаемых: приращений $\Delta_k \varepsilon'^p_{ij}$ пластических составляющих и деформаций ползучести $\Delta_k \varepsilon'^c_{ij}$. Каждую из этих составляющих будем представлять соотношениями, совпадающими с (2.46), но с различными коэффициентами a'_{ijmn} и параметрами $\Delta_k \Gamma^n$ и S . В первом случае эти коэффициенты и параметры обозначим через a'^p_{ijmn} , $\Delta_k \Gamma^p$, S^p а во втором – через a'^c_{ijmn} , $\Delta_k \Gamma^c$, S^c . При определении коэффициентов a'^p_{ijmn} предполагаем, что S^p является функцией параметра $\xi = \sum_k \Delta_k \Gamma^p$ и температуры. Эту зависимость получаем из опытов на растяжение образцов, вырезанных в одном из главных направлений анизотропии при различных фиксированных значениях температуры, т.е. определяются мгновенной термомеханической поверхностью. При $\xi = 0$ значение S^p равно пре-

дельному упругому значению Φ_0 при растяжении образцов в одном из главных направлений анизотропии, Величина Φ_0 может быть равна среднему предельному значению S^p при растяжении образцов по трем главным направлениям анизотропии. Это предположение соответствует тому, что мгновенные термомеханические поверхности вдоль всех направлений в ортотропном теле подобны между собой.

По данным опытов на растяжение образцов вдоль трех главных направлений и опытов на чистый сдвиг между этими направлениями при $S = \Phi_0$ получим следующие выражения для коэффициентов

$$a'_{1111} = 2 \left(\frac{\Phi_0}{\sigma_{1T}} \right)^2 \quad (1, 2, 3); \quad a'_{1212} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_0}{\tau_{12}^T} \right)^2 \quad (1, 2, 3), \quad (2.48)$$

где σ_{iT}, τ_{ij}^T T – пределы текучести ортотропного тела в трех главных направлениях анизотропии и три предела текучести при сдвиге между этими направлениями, соответственно. Эти пределы текучести являются функциями температуры T . Последние три коэффициента (2.48) можно определить также, не пользуясь опытом на чистый сдвиг, а использовать опыты на растяжение образцов вдоль направлений, равнонаклоненных к двум главным осям анизотропии и ортогональных к третьему. Пределы текучести ортотропного материала в этих направлениях (между осями i и j) обозначим через σ_{ij}^T ($i \neq j$). Воспользовавшись формулами преобразования коэффициентов x_1, x_2, x_3 , при повороте системы координат q_i последовательно вокруг главных осей анизотропии на угол 45° , получим для последних трех коэффициентов (2.48) следующие выражения:

$$a'_{1212} = \frac{\Phi_0^2}{2} \left[\left(\frac{2}{\sigma_{12}^T} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sigma_{3T}} \right)^2 \right] \quad (1, 2, 3). \quad (2.49)$$

В том случае, когда параметр Φ_0 определяется мгновенной термомеханической поверхностью первого главного направления анизотропии

$$\sigma'_{11} = f(\bar{\varepsilon}_{11}^*, T), \quad (2.50)$$

$\Phi_0 = \sigma_{ij} / \sqrt{3}$ и коэффициенты a'_{ijmn} будут определяться равенствами

$$a'_{1111} = \frac{2}{3}, \quad a'_{2222} = \frac{2}{3} \left(\frac{\sigma_{1T}}{\sigma_{2T}} \right)^2; \quad a'_{3333} = \frac{2}{3} \left(\frac{\sigma_{1T}}{\sigma_{3T}} \right)^2; \quad a'_{1212} = \frac{1}{6} \left(\frac{\sigma_{1T}}{\tau_{12}^T} \right)^2; \\ a'_{2323} = \frac{1}{6} \left(\frac{\sigma_{1T}}{\tau_{23}^T} \right)^2; \quad a'_{3131} = \frac{1}{6} \left(\frac{\sigma_{1T}}{\tau_{31}^T} \right)^2. \quad (2.51)$$

Примут соответствующий вид и выражения (2.49).

Приведенная интенсивность касательных напряжений S^p и деформации ε'_{11} в этом случае имеет вид

$$S^p = \sigma'_{11} / \sqrt{3}; \quad \varepsilon'_{11} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \xi. \quad (2.52)$$

Тогда полная мгновенная силовая деформация определяется равенством

$$\varepsilon_{11}^* = \frac{S^p \sqrt{3}}{E_1} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \xi, \quad (2.53)$$

где E_1 – модуль упругости материала вдоль первого главного направления анизотропии.

Аналогично можно определять коэффициенты, входящие в соотношения (2.46), для определения в этой форме приращений деформаций ползучести $\Delta_k \varepsilon_{ij}^c$. Только в этом случае предельное упругое состояние элемента тела будем определять не пределами текучести, а условными пределами ползучести [96]. Обычно значения условных пределов ползучести несколько ниже, чем пределов текучести. При этом коэффициенты a_{ijmn}^c определяются формулами (2.48), (2.49) или (2.51), в которых под пределами текучести следует подразумевать условные пределы ползучести в соответствующих направлениях анизотропии.

Значения интенсивностей касательных напряжений и приращений $\Delta_k \Gamma^p = \Delta_k \xi^p$, $\Delta_k \Gamma^c = \Delta_k \xi^c$ будем определять методом последовательных приближений в процессе решения краевой задачи.

Пусть в начале m -го этапа нагружения и нагрева элемента тела известны значения компонент деформаций $(\varepsilon_{ij}^p)_{m-1}$, $(\varepsilon_{ij}^c)_{m-1}$ и значения параметров $\xi_{m-1}^p = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta_k \Gamma^p$, $\xi_{m-1}^c = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta_k \Gamma^c$, накопленных к началу этапа.

Определим значения этих величин в конце m -го этапа для нагрузки и температуры. По известным значениям $(\varepsilon_{ij}^n)_{m-1} = (\varepsilon_{ij}^p)_{m-1} + (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1}$, пользуясь формулами (2.19), (2.18) и (2.16) или (2.17), определяем дополнительные слагаемые в соответствующих определяющих уравнениях (1.1) или (2.12) и решаем краевую задачу в системе координат q_i . В результате получим компоненты напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} . Пользуясь формулами преобразования компонент напряжений и деформаций при повороте системы координат, получим σ'_{ij} и ε'_{ij} в системе координат q'_i . После этого определяем значения интенсивности касательных напряжений S_ϕ^p и вычисляем соответствующие значения $\bar{\varepsilon}_{ij}^*$ (2.53) в предположении, что $\xi = \xi_{m-1}^p$, а $S = S_\phi^p$. По этим значениям, пользуясь уравнением мгновенной термомеханической поверхности (2.50) для температуры элемента тела, определим соответствующие значения $\sigma'_{11} = S_\phi^p \sqrt{3}$. Тогда будем иметь

$$\Delta_m \xi^p = \Delta_m \Gamma^p = \frac{S_\phi^p - S_D^p}{E_1} \sqrt{3} \quad (2.54)$$

и по формулам (2.46) можно определить приращения пластических деформаций $\Delta_m \varepsilon_{ij}^p$ в первом приближении. Вычисляем значения $\xi_m^p = \xi_{m-1}^p + \Delta_m \xi^p$ и значения компонент мгновенных пластических деформаций $(\varepsilon_{ij}^p)_m = (\varepsilon_{ij}^p)_{m-1} + \Delta_m \varepsilon_{ij}^p$ в конце m -го этапа нагружения тела в первом приближении. Затем, пользуясь сопряженной по скорости нагружения с мгновенной термомеханической поверхностью (2.50) диаграммой ползучести, соответствующей значению напряжения $\sigma'_{11} = S_\phi^p \sqrt{3}$ и температуре рассматриваемого элемента тела в конце этапа для времени и за время его протекания, определим приращение деформации ползучести и значение параметра $\Delta_m \varepsilon_{11}^c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Delta_m \xi^c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Delta_m \Gamma^c$ и значение параметра $\xi_m^c = \xi_{m-1}^c + \Delta_m \xi^c$ в конце этапа нагружения и нагрева. После этого можно получить значения приращений деформаций ползучести $\Delta_m \varepsilon_{ij}^c$ и определить полные деформации ползучести $(\varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + \Delta_m \varepsilon_{ij}^c$ в конце m -го этапа нагружения в первом приближении.

Полученные значения деформаций $(\varepsilon_{ij}^p)_m$, $(\varepsilon_{ij}^c)_m$ и параметров ξ_m^p , ξ_m^c , в первом приближении используем для вычисления второго приближения по описанному выше алгоритму первого приближения. При этом, начиная со второго приближения, (2.54) определяем добавки к приращениям $\Delta_m \Gamma^p$, полученные в первом приближении. Процесс последовательных приближений продолжаем до тех пор, пока S_ϕ^p и S_D^p не совпадут с некоторой заданной точностью между собой.

После того, как процесс последовательных приближений сошелся, проверяем условия активного нагружения (2.43) и разгрузки (2.44) по мгновенным пластическим деформациям. При выполнении условия активного нагружения можно переходить к вычислению последовательных приближений для следующего этапа нагружения и нагрева твердого тела. Если же окажется, что в каком-то элементе тела условие активного нагружения не выполняется, то этот этап следует пересчитать при условии, что в этом элементе тела мгновенные пластические деформации равны их значениям в начале этапа и $\Delta_m \varepsilon_{ij}^p$ следует положить равными нулю. Приращения деформаций ползучести определяем по-прежнему диаграммами ползучести. При этом, если условный предел ползучести $\sigma_{1c} > S_\phi^c \sqrt{3}$, то $\Delta_m \varepsilon_{ij}^c = 0$, а при $\sigma_{1c} < S_\phi^c \sqrt{3}$ приращение $\Delta_m \varepsilon_{ij}^c \neq 0$ и определяется описанным выше способом по диаграммам ползучести. Параметр ξ^c вычисляется только в том случае, когда рассматривается циклическое деформирование твердого тела [96].

Изложенная теория необратимого деформирования ортотропного тела по траекториям малой кривизны может применяться к исследованию напряженно-деформированного состояния твердых тел не только при деформировании элементов тела по траекториям малой кривизны, но и при процессах деформирования по прямолинейным траекториям и мало отклоняющихся от них. Траекторией деформирования малой кривизны, по аналогии с изотропным телом, называется кривая, наименьший радиус кривизны которой значительно больший 10 – 15 значений максимального предела текучести по деформациям.

В случае изотропного тела $\sigma_{iT} = \sigma_{ij}^T = \tau_{ij}^T = \sigma_T$, $\Phi_0 = \sigma_T \sqrt{3}$ коэффициенты a_{ijmn}^n имеют вид $a_{1111}^n = a_{2222}^n = a_{3333}^n = 2/3$; $a_{1212}^n = a_{2323}^n = a_{3131}^n = 1/2$; $a_{1122}^n = a_{2233}^n = a_{3311}^n = -1/3$, а соотношения (2.46) переходят в соотношения теории термовязкопластичности, описывающие процессы деформирования элементов тела из изотропных материалов по траекториям малой кривизны.

2.2. Изотропные материалы. Приведем соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций при упругопластическом деформировании первоначально изотропных тел. Будем рассматривать малые деформации при простых процессах деформирования и при процессах деформирования по траекториям малой кривизны.

2.2.1. Термовязкопластическое состояние изотропных тел при простых процессах деформирования. При использовании соотношений теории малых упругопластических деформаций для изотропного тела, учитывающей историю нагружения [87, 95, 144], линеаризованных методом упругих решений, коэффициенты A_{ijmn} в определяющих уравнениях (1.1) принимают вид

$$A_{ijmn} = G_0 (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) + \frac{1}{3} (K_0 - 2G_0) \delta_{ij} \delta_{mn}, \quad (2.55)$$

а дополнительные слагаемые в этих уравнениях имеют вид

$$\sigma_{ij}^* = 2G_0 \omega e_{ij} + 2G^* e_{ij}^{1n} + [K_0 \omega_1 \varepsilon_0 + K^* (\varepsilon_0^{1n} + \varepsilon_T)] \delta_{ij}, \quad (2.56)$$

где G_0, K_0 – модули сдвига и объемного расширения материала при температуре T_0 , δ_{ij} – символ Кронекера; $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii} / 3$ – первый инвариант тензора деформации; $\varepsilon_T = \alpha_T (T - T_0)$ – тепловая деформация; α_T – коэффициент линейного расширения материала; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}$ – компоненты девиатора деформации. Функции пластичности

$$\omega = 1 - \frac{G^*}{G_0} \quad \text{и} \quad \omega_1 = 1 - \frac{K^*}{K_0}; \quad (2.57)$$

$$2G^* = \frac{S}{\Gamma}; \quad K^* = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 - \varepsilon_T}; \quad (2.58)$$

$\sigma_0 = 1/3 \sigma_{ii}$ – среднее нормальное напряжение; $S = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}$ – интенсивность касательных напряжений; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$ – компоненты девиатора напряжения; $\Gamma = \left(\frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \right)^{1/2}$ – интенсивность деформаций сдвига; e_{ij}^{1n} и ε_0^{1n} – значения необратимых деформаций составляющих компонент девиатора и средняя деформация в момент разгрузки элемента тела. При активном процессе нагружения элемента тела эти значения равны нулю, а при разгрузке –

$$e_{ij}^{1n} = e_{ij}^* - \frac{s_{ij}}{2G^1}; \quad \varepsilon_0^{1n} = \varepsilon_0^1 - \varepsilon_T^1 - \frac{\sigma_0^1}{K^*}. \quad (2.59)$$

Здесь индексом «1» обозначены значения соответствующих величин в момент разгрузки элемента тела при соответствующей его температуре. Предполагаем, что S и σ_0 в (2.57), (2.58) определяются из экспериментов, на основе которых строится мгновенная термомеханическая поверхность

$$S = F^*(\Gamma^*, T); \quad \sigma_0 = \Phi^*(\bar{\varepsilon}_0^*, T) \quad (2.60)$$

и сопряженные с ней диаграммы ползучести при различных фиксированных температурах и уровнях напряжений. Опыты проводятся на простое натружение трубчатых образцов с замерами продольной ε_{11} и окружной ε_{22} деформаций. Здесь – $\Gamma = \Gamma^* + \Gamma^c$, $\varepsilon_0 = \bar{\varepsilon}_0^* + \varepsilon^c + \varepsilon_T$, Γ^c и ε_0^c определяются указанными диаграммами ползучести $\Gamma^c \sim t$. В этих опытах

$$S = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}; \quad \Gamma^* = \frac{\varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{22}^*}{\sqrt{3}}; \quad \Gamma^c = \frac{\varepsilon_{11}^c - \varepsilon_{22}^c}{\sqrt{3}}; \quad \sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}; \quad \bar{\varepsilon}_0^* = \frac{\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*}{3} - \varepsilon_T; \quad \varepsilon_0^c = \frac{\varepsilon_{11}^c + 2\varepsilon_{22}^c}{3}; \quad (2.61)$$

σ – нормальное напряжение при растяжении образцов; $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^c$ – мгновенные деформации, $\bar{\varepsilon}_{ij}^* = \varepsilon_T \delta_{ij}$ – чисто силовые мгновенные деформации.

Функции пластичности (2.57) на основе сформулированных опытов определяются по этапам методом последовательных приближений в процессе решения краевой задачи. В первом приближении первого этапа нагружения и нагрева эти функции принимаются равными нулю, а на последующих этапах принимаются равными их значениями в последнем приближении предыдущего этапа. В каждом приближении функции пластичности принимаются из предыдущего приближения. Аналогично в начале первого этапа нагружения и нагрева принимаются равными нулю Γ^c и ε_0^c , а в начале последующих этапов эти величины принимают значения, полученные в последнем

приближении предыдущего этапа. В результате решения идеально упругой краевой задачи с дополнительными напряжениями (2.56) в первом приближении m -го этапа нагружения и нагрева определяются для каждого элемента тела интенсивность деформаций сдвига Γ_m и первый инвариант тензора деформаций ε_0^m в первом приближении в конце этого этапа для нагрузки и температуры конца этапа. Затем определяются соответствующие значения мгновенных величин $\Gamma_m^* = \Gamma_m - \Gamma_{m-1}^c$ и $(\bar{\varepsilon}_0^*)^m = \varepsilon_0^m - \varepsilon_T^m - (\varepsilon_0^c)_{m-1}$. По этим значениям для температуры каждого элемента тела в конце этапа, пользуясь уравнениями (2.60), определяем значения S_D^m и $(\sigma_0^m)_D$. С использованием этих значений и температуры соответствующего элемента тела определяется, путем интерполяции, соответствующая диаграмма ползучести. По этим диаграммам для времени этапа и за время его протекания определяем $\Delta_m \Gamma^c$, $\Delta_m \varepsilon_0^c$, а также интенсивность деформаций сдвига $\Gamma_m^c = \Gamma_{m-1}^c + \Delta_m \Gamma^c$ и первый инвариант $(\varepsilon_0^c)^m = (\varepsilon_0^c)_{m-1} + \Delta_m \varepsilon_0^c$ в первом приближении в конце m -го этапа нагружения и нагрева. После этого вычислим соответствующие полные значения интенсивности деформаций сдвига $\Gamma_m = \Gamma_m^* + \Gamma_m^c$ и первого инварианта тензора деформации $\varepsilon_0^m = (\varepsilon_0^*)^m + (\varepsilon_0^c)^m$, где $\varepsilon_0^* = \bar{\varepsilon}_0^* + \varepsilon_T$. Затем вычисляем значения секущих модулей G^* и K^* (2.58) и функции пластичности ω и ω_1 (2.57) в конце m -го этапа нагружения во втором приближении и так далее. Процесс последовательных приближений продолжим до тех пор, пока в каждом элементе тела интенсивность касательных напряжений $S = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}$ не станет равной (с определенной заданной точностью) ее значению, полученному по уравнениям мгновенной поверхности (2.60). После чего проверяем условие активного нагружения

$$s_{ij} \Delta e_{ij}^n > 0. \quad (2.62)$$

Если это условие для какого-то элемента тела не выполняется, то проводим расчет этого этапа нагружения с учетом (2.59) для компонент необратимых деформаций в конце предыдущего этапа. При этом предполагаем, что при разгрузке деформации ползучести не развиваются.

При линеаризации соотношений теории малых упругопластических деформаций методом переменных параметров упругости коэффициенты A_{ijmn} в определяющих уравнениях (1.1) принимают вид

$$A_{ijmn} = G^* (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) + \frac{1}{3} (K^* - 2G^*) \delta_{ij} \delta_{mn}, \quad (2.63)$$

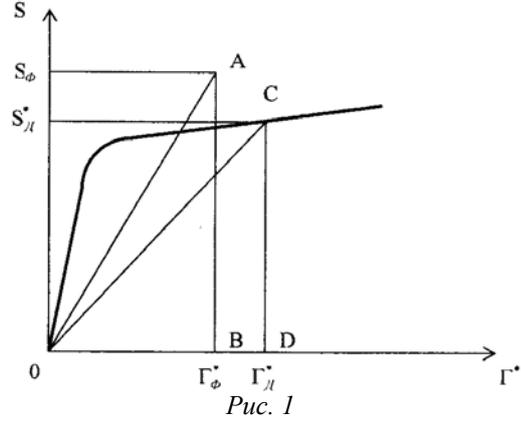
а дополнительные напряжения в этих уравнениях определяются равенствами

$$\sigma_{ij}^* = 2G^* e_{ij}^{1n} + K^* (\varepsilon_0^{1n} + \varepsilon_T) \delta_{ij}. \quad (2.64)$$

Алгоритм определения G^* , K^* , σ_{ij}^* остается прежним, как и в предыдущем случае линеаризации определяющих уравнений (1.1) методом упругих решений.

Для улучшения сходимости метода последовательных приближений предлагаем несколько другой способ определения секущих модулей и функций пластичности. Предлагаемый метод определения этих величин отличается от традиционного в способе определения S_D^m и $(\sigma_0^m)_D$, а также значений $\Gamma_m^* = (\Gamma_D^*)_m$, $(\varepsilon_0^*)^m = (\varepsilon_0^*)_D^m$ с использованием экспериментальных поверхностей (2.60). Способ определения этих ве-

личин проиллюстрируем на примере определения S_D^m и $\Gamma_m^* = (\Gamma_D^*)_m$. По зависимости $S = F^*(\Gamma^*, T_m)$ вычислим такую пару значений S_D^m , $\Gamma_m^* = (\Gamma_D^*)_m$, чтобы в каждом приближении выполнялось условие $S_\phi \cdot \Gamma_\phi^* = S_D \cdot \Gamma_D^*$. Здесь S_ϕ, Γ_ϕ^* – значение интенсивности касательных напряжений и значение интенсивности мгновенных деформаций сдвига, полученных в результате решения краевой



задачи термовязкопластичности в рассматриваемом приближении. Схема такого определения этих величин показана на рис. 1. Это условие выражает требование равенства площадей треугольников AOB и COD. По аналогичной схеме с использованием зависимости $\sigma_0 = \Phi^*(\varepsilon_0^*, T)$ определяем величины $(\sigma_0^m)_D$ и $(\varepsilon_0^*)_m = (\varepsilon_0^*)_D^m$. Полученные таким образом значения величин $S_D^m, (\sigma_0^m)_D, \Gamma_m^* = (\Gamma_D^*)_m, (\varepsilon_0^*)_m = (\varepsilon_0^*)_D^m$, используем в дальнейшем описанным ранее способом. В работе [99] на конкретных примерах показано, что внесенные таким образом изменения в общепринятый алгоритм построения последовательных приближений уменьшают количество приближений как в случае метода упругих решений, так и при линеаризации уравнений термовязкопластичности с помощью метода переменных параметров упругости более, чем на треть.

2.2.2. *Термовязкопластическое состояние изотропных тел при деформировании по траекториям малой кривизны.* В том случае, когда материал тела изотропный и для решения краевой задачи применяются соотношения теории термовязкопластического деформирования элемента тела по траекториям малой кривизны [87, 95, 144], линеаризованные методом дополнительных напряжений, коэффициенты A_{ijmn} в определяющих уравнениях (1.1) примут вид

$$A_{ijmn} = G(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) + \frac{1}{3}(K - 2G)\delta_{ij}\delta_{mn}, \quad (2.65)$$

а дополнительные напряжения σ_{ij}^* в этих уравнениях запишем в таком виде:

$$\sigma_{ij}^* = 2Ge_{ij}^n + K(\varepsilon_0^n + \varepsilon_T)\delta_{ij}, \quad (2.66)$$

где G и K – модули сдвига и объемного расширения материала. Они являются функциями температуры. Если представить эти модули упругости в виде

$$G = G_0(1 - \omega), \quad K = (1 - \omega_1), \quad (2.67)$$

то коэффициенты A_{ijmn} определяются выражениями (2.55), а дополнительные напряжения σ_{ij}^* равенствами

$$\sigma_{ij}^* = 2G_0\omega\varepsilon_{ij} + 2Ge_{ij}^n + [(K_0\omega_1 + 2G_0\omega)\varepsilon_0 + K(\varepsilon_0^n + \varepsilon_T)]\delta_{ij}. \quad (2.68)$$

Здесь G_0 и K_0 – значения модулей сдвига и объемного расширения материала при начальной температуре T_0 , а ω и ω_1 определяются равенствами

$$\omega = 1 - G/G_0; \quad \omega_1 = 1 - K/K_0. \quad (2.69)$$

Компоненты необратимой деформации e_{ij}^n и ε_0^n в конце m -го этапа нагружения определяются равенствами

$$\left(e_{ij}^n\right)_m = \sum_{k=1}^m \Delta_k e_{ij}^n = \sum_{k=1}^m \left\langle \frac{S_{ij}}{S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma^n; \quad \left(\varepsilon_0^n\right)_m = \sum_{k=1}^m \Delta_k \varepsilon_0^n. \quad (2.70)$$

Приращения $\Delta_k \Gamma^n$ и $\Delta_k \varepsilon_0^n$ за k -й этап нагружения определяем на основе выше сформулированных базовых опытов и уравнений (2.60) методом последовательных приближений в процессе решения краевой задачи. При этом определяем

$$\Delta_k \Gamma^n = \Delta_k \Gamma^p + \Delta_k \Gamma^c; \quad \Delta_k \varepsilon_0^n = \Delta_k \varepsilon_0^p + \Delta_k \varepsilon_0^c \quad (2.71)$$

и предполагаем, что вначале m -го этапа нагружения известны значения мгновенной деформации пластичности

$$\Gamma_{m-1}^p = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta_k \Gamma^p; \quad \left(\varepsilon_0^p\right)_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta_k \varepsilon_0^p, \quad (2.72)$$

которые получены в конце предыдущего $m - 1$ -го этапа. Тогда в первом приближении m -го этапа нагружения и нагрева полагаем, что $\Delta_m \varepsilon_{ij}^n$ и $\Delta_m \varepsilon_0^n$ равны нулю. Далее решаем краевую задачу, используя в уравнениях (1.1) для коэффициентов A_{ijmn} выражения (2.65) или (2.55) и соответствующие выражения для дополнительных напряжений σ_{ij}^* в форме (2.66) или (2.68) при известных значениях компонент необратимой деформации ε_{ij}^n и ε_0^n в конце предыдущего этапа. Определив затем интенсивность касательных напряжений $S_\phi = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}\right)^{1/2}$, среднее напряжение $\sigma_0^\phi = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$ и значения

$$\Gamma^* = \frac{S_\phi}{2G} + \Gamma_{m-1}^p; \quad \bar{\varepsilon}_0^* = \frac{\sigma_0^\phi}{K} - \varepsilon_T + \left(\varepsilon_0^p\right)_{m-1}, \quad (2.73)$$

используя уравнения (2.60) при соответствующей температуре элемента тела, определяем значения S_D и σ_0^D . Тогда во втором приближении имеем

$$\Delta_m \Gamma^p = \frac{S_\phi - S_D}{2G}; \quad \Delta_m \varepsilon_0^p = \frac{\sigma_0^\phi - \sigma_0^D}{K}. \quad (2.74)$$

Пользуясь соответствующими диаграммами ползучести для полученных значений S_D , σ_0^D и температуры T в конце этапа для времени этапа и за время Δt протекания этапа, определяем $\Delta_m \Gamma^c$, $\Delta_m \varepsilon_0^c$ и значения $\Delta_m \Gamma^n$, $\Delta_m \varepsilon_0^n$ (2.71), а также значения e_{ij}^n , ε_0^n (1.55) и Γ_m^p , $\left(\varepsilon_0^p\right)_m$ (2.72) в конце m -го этапа нагружения во втором приближении.

Аналогично определяем приращения необратимых деформаций в последующих приближениях. При этом во втором и последующих приближениях значения (2.74) являются уточнениями значений $\Delta_m \Gamma^p$, $\Delta_m \varepsilon_0^p$, а полные приращения равны сумме соответствующих величин, полученных в каждом приближении. Критерии прекращения процесса последовательных приближений являются такими же, как и в предыдущем случае. При активном процессе нагружения величины (2.59) положительны, а при разгрузке – отрицательны. В этом последнем случае полагаем, что $\Delta_m \Gamma^p = \Delta_m \varepsilon_0^p = 0$, а $\Delta_m \Gamma^c$ и $\Delta_m \varepsilon_0^c$ по-прежнему определяются диаграммами ползучести. Проверка направления процесса деформирования каждого элемента тела осуществляется после того, как сошелся процесс последовательных приближений в конце каждого этапа

нагружения. Если окажется, что в каком-то элементе тела на рассматриваемом этапе активное нагружение сменяется разгрузкой, то этот этап вычисляется повторно для значений необратимых деформаций, полученных в конце предыдущего этапа нагружения, и при $\Delta_m \Gamma^p$, $\Delta_m \varepsilon_0^p$ равными нулю.

Форму записи определяющих уравнений (1.1) удобно применять к решению пространственных задач термовязкопластичности для составных тел, изготовленных из изотропных и анизотропных материалов. При решении задач для тел, изготовленных только из изотропных материалов, уравнения (1.1) с учетом (2.55), (2.63) или (2.65) запишем в виде [95]

$$\sigma_{ij} = 2G' \varepsilon_{ij} + 3\lambda' \varepsilon_0 \delta_{ij} - \sigma_{ij}^* \left[\lambda' = \frac{1}{3}(K' - 2G') \right]. \quad (2.75)$$

В соотношениях теории малых упругопластических деформаций, линеаризованных методом упругих решений, $G' = G_0$, $K' = K_0$, σ_{ij}^* определяются равенствами (2.56), а в случае линеаризации этих уравнений методом переменных параметров упругости – $G' = G^*$, $K' = K^*$, σ_{ij}^* определяются равенствами (2.64). При использовании соотношений теории термовязкопластического деформирования по траектории малой кривизны, линеаризованных методом дополнительных напряжений, G' и K' являются модулями сдвига G и объемного расширения K либо их значениями G_0 и K_0 при начальной температуре T_0 . При этом σ_{ij}^* в первом случае определяются равенствами (2.66), а во втором – согласно (2.68).

В том случае, когда материал тела неупруго несжимаем, в предыдущих уравнениях все величины, которые характеризуют необратимое изменение объема, следует положить равными нулю. Вместо второго соотношения (2.60) следует принять

$$\sigma_0 = K(\varepsilon_0 - \varepsilon_T), \quad (2.76)$$

где K – модуль объемного расширения материала, зависящий от температуры, $K^* = K$ (2.67), ε_0 с индексами n и c равны нулю. В равенствах (2.61) $\varepsilon_{22}^* = -\nu^* \varepsilon_{11}^*$ и коэффициент поперечной деформации ν^* из условия упругого изменения объема определяется равенством [95] $\nu^* = \frac{1}{2} \frac{1-2\nu}{2E} \frac{\sigma}{\varepsilon^*}$, где ν – коэффициент Пуассона; E –

модуль упругости материала; σ и ε^* – нормальное напряжение и мгновенная силовая деформация, возникающая в образце при его растяжении в условиях различных фиксированных температур. Алгоритмы вычисления необратимых деформаций остаются прежними, за исключением того, что нет необходимости вычислять величины, характеризующие необратимое изменение объема.

Как и в случае применения теории малых упругопластических деформаций, при использовании уравнений теории термовязкопластичности, описывающей процессы деформирования по траекториям малой кривизны, предлагается несколько другой способ определения S_d , σ_0^d , $\Delta_k \Gamma^p$ и $\Delta_k \varepsilon_0^p$, отличный от традиционного. Отличие в подходах состоит в методике определения координат точки на термомеханических поверхностях $S = F^*(\Gamma^*, T)$, $\sigma_0 = \Phi^*(\bar{\varepsilon}_0^*, T)$ для продолжения процесса последовательных приближений при решении задачи термовязкопластичности.

Например, в этом случае S_d и приращение необратимой деформации $\Delta_k \Gamma^p$ вычисляется следующим образом (рис. 2). После решения задачи в k -ом приближении по известному напряженному состоянию определяется S_ϕ и значение накопленной интенсивности деформаций сдвига Γ^* (2.73), и по соответствующей диаграмме (2.60)

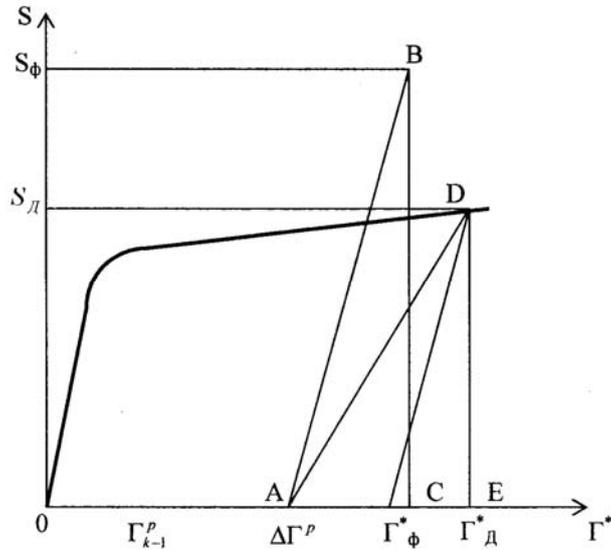


Рис. 2

при заданной температуре элемента тела определяется пара значений $S_{\Delta}^k, \Gamma_k^* = (\Gamma_{\Delta}^*)_k$, для которых в каждом приближении выполнялось условие $S_{\phi} \cdot (\Gamma_{\phi}^* - \Gamma_{m-1}^p) = S_{\Delta} \cdot (\Gamma_{\Delta}^* - \Gamma_{m-1}^p)$. Это условие определяется равенством площадей треугольников ABC и ADE. Тогда приращение $\Delta_m \Gamma^p$ для организации следующего приближения будет определяться соотношением $\Delta_m \Gamma^p = \Gamma_{\Delta}^* - \Gamma_{m-1}^p - \frac{S_{\Delta}}{2G}$ – вместо (2.73). Вычисление

σ_0^{Δ} и $\Delta_k \varepsilon_0^p$ осуществляется по аналогичной схеме. В дальнейшем полученные таким образом величины используются описанным ранее способом. Использование такого подхода при решении конкретных задач показало существенное сокращение необходимого количества приближений: почти в 2 раза при исследовании изотермического осесимметричного процесса нагружения оболочек вращения [100] и более чем на 25% – при решении неосесимметричной пространственной задачи термопластичности для трехслойного тела вращения в процессе его нагрева [137].

2.2.3. *Термовязкопластическое деформирование изотропных тел с учетом третьего инварианта девиатора напряжений.* Во всех приведенных ранее алгоритмах решения краевых задач при формулировании определяющих уравнений (связи между компонентами напряжений и деформаций) для описания упругопластического деформирования элементов твердого тела из изотропных материалов, как правило, предполагается, что связь между первыми и вторыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций не зависит от вида напряженного состояния и определяется из опытов на одноосное растяжение или кручение цилиндрических образцов, на основе которых строятся соответствующие мгновенные термомеханические поверхности (2.60). В действительности, как показывают эксперименты [31,41], существует целый ряд изотропных материалов, в которых соотношения между интенсивностями напряжения и деформации при растяжении, сжатии и кручении различные, т. е. зависит от вида напряженного состояния.

Понятие угла вида напряженного состояния вводится при определении компонентов главных напряжений, которые определяются путем решения с применением формулы Кардано кубического уравнения

$$s^3 - I_2(D_{\sigma})s - I_3(D_{\sigma}) = 0 \quad (2.77)$$

относительно компонентов девиатора главных напряжений: второго инварианта $I_2(D_\sigma) = s_{ij}s_{ij} / 2$ и третьего инварианта $I_3 = s_{zz}s_{rr}s_{\varphi\varphi} + 2s_{zr}s_{r\varphi}s_{z\varphi} - s_{zz}s_{r\varphi}^2 - s_{rr}s_{z\varphi}^2 - s_{\varphi\varphi}s_{zr}^2$ тензора девиаторов напряжений, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}$ – компоненты девиатора напряжений. Предполагается, что для главных значений девиатора напряжений выполняется условие $s_1 \geq s_2 \geq s_3$. Тогда корни уравнения (2.77) будут определяться следующим образом:

$$s_1 = \frac{2S}{\sqrt{3}} \cos \vartheta; \quad s_2 = \frac{2S}{\sqrt{3}} \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right); \quad s_3 = \frac{2S}{\sqrt{3}} \cos\left(\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right). \quad (2.78)$$

Здесь этот угол ϑ определяется через компоненты девиатора напряжений соотношением $3\vartheta = \arccos(3\sqrt{3} I_3 / 2S^3)$. Он изменяется в пределах $0 \leq \vartheta \leq \pi/3$: $\vartheta = 0$ соответствует одноосному растяжению, $\vartheta = \pi/6$ – кручению, а $\vartheta = \pi/3$ – одноосному сжатию цилиндрического образца и показывает ориентацию октаэдрического касательного напряжения в октаэдрической плоскости относительно проекции на эту плоскость главной оси, вдоль которой действует максимальное напряжение. Угол ϑ для конкретизации вида напряженного состояния используется в работах [19, 34, 52, 129 и др.].

В некоторых работах выражения для компонентов девиатора напряжений записываются через тригонометрические функции по-другому, в результате чего выражения для угла вида напряженного состояния принимает вид, отличный от (2.78). В частности, в работах [29, 76, 87] в качестве угла вида напряженного состояния вводится параметр ω_σ и корни кубического уравнения (2.77) определяются следующими соотношениями:

$$s_1 = \frac{2S}{\sqrt{3}} \cos(\omega_\sigma - \pi/3); \quad s_2 = \frac{2S}{\sqrt{3}} \cos(\omega_\sigma + \pi/3); \quad s_3 = -\frac{2S}{\sqrt{3}} \cos \omega_\sigma. \quad (2.79)$$

Угол ω_σ определяется через компоненты девиатора напряжений соотношением $3\omega_\sigma = \arccos(-3\sqrt{3} I_3 / 2S^3)$ и изменяется, как и угол ϑ , в пределах $0 \leq \omega_\sigma \leq \pi/3$: $\omega_\sigma = 0$ соответствует одноосному сжатию, $\omega_\sigma = \pi/6$ – кручению, а $\omega_\sigma = \pi/3$ – одноосному растяжению цилиндрического образца. Он показывает ориентацию октаэдрического касательного напряжения в октаэдрической плоскости относительно отрицательного направления проекции на эту плоскость главной оси, вдоль которой действует минимальное напряжение.

Другие авторы, например, В.В.Новожилов в качестве угла вида напряженного состояния вводит угол, характеризующий ориентацию октаэдрического касательного напряжения относительно биссектрисы угла между проекциями осей максимального и отрицательного минимального главных значений девиатора напряжений на октаэдрическую плоскость. Интерпретация параметров, которые вводятся разными авторами для описания вида напряженного состояния, подробно обсуждается в работе [158]. Более сложные выражения, учитывающие все три инварианты тензора напряжений, приведены в работе [161].

Уравнения состояния для изотропных материалов при простых процессах деформирования и процессах деформирования по траекториям малой кривизны, учитывающие вид напряженного состояния, по-видимому, впервые были предложены в работах [97, 156, 157]. Эти уравнения связывают условные напряжения и конечные относительные удлинения и содержат две нелинейные зависимости

$$\sigma_0 = \Phi^*(\varepsilon_0^*, T, \vartheta); \quad S = F^*(\Gamma^*, T, \vartheta). \quad (2.80)$$

Одна из них выражает связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций, а вторая – связь между вторыми инвариантами соответствующих де-

виаторов. При конкретизации этих зависимостей используются две серии базовых опытов на нагружение трубчатых образцов при различных постоянных значениях угла вида напряженного состояния и нескольких значениях температуры. В первой серии проводятся опыты на мгновенное деформирование образцов, т.е. со скоростями нагружения, при которых не проявляются реологические свойства материала. Во второй серии выполняются опыты на ползучесть, сопряженные с опытами первой серии по скоростям нагружения. Как показывают эксперименты, при малых деформациях (порядка 5 – 6%) связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций можно принимать линейной, т.е. объем элемента тела изменяется упруго.

Как и в предыдущих случаях, для описания неупругого деформирования элементов тела по различным траекториям соотношения между компонентами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} , линеаризованные теми или другими способами, представим в виде закона Гука с дополнительными слагаемыми σ_{ij}^* , учитывающими тепловую деформацию, отклонение материала от упругого, зависимость характеристик материала от вида напряженного состояния и температуры, а также методы линеаризации исходных нелинейных соотношений:

$$\sigma_{ij} = 2G^* \varepsilon_{ij} + (K - 2G^*) \varepsilon_0 \delta_{ij} - \sigma_{ij}^* \quad (i, j = z, r, \varphi). \quad (2.81)$$

Выражения для σ_{ij}^* и модуля G^* зависят от вида напряженного состояния, используемой теории и способа линеаризации исходных нелинейных уравнений.

В случае простых процессов деформирования, т.е. когда каждый элемент тела деформируется по прямолинейным траекториям или мало отклоняющихся от них, при линеаризации соотношений (2.81) методом упругих решений принимаем $G^* = G_0$, $K = K_0$ – соответственно, модуль сдвига и модуль объемного деформирования материала при нормальной температуре T_0 и некотором начальном значении угла вида напряженного состояния. При этом дополнительные напряжения σ_{ij}^* определяются равенствами (2.56).

При линеаризации соотношений термопластичности методом переменных параметров упругости в уравнениях (2.81) G^* соответствует секущему модулю, который зависит от неупругой деформации, температуры и вида напряженного состояния и определяется равенством (2.58), а дополнительные напряжения вместо (2.56) определяются выражением (2.64).

При использовании соотношений теории термопластичности, описывающих деформирование элементов тела по траекториям малой кривизны, после линеаризации методом дополнительных напряжений G^* соответствует модулю сдвига G при текущих значениях температуры тела и угла вида напряженного состояния, а компоненты дополнительных напряжений σ_{ij}^* определяются равенствами (2.66).

Линеаризация нелинейных уравнений состояния, как и в случае отсутствия зависимости свойств материала от вида напряженного состояния, осуществляется методом последовательных приближений с использованием мгновенных диаграмм деформирования (2.80) и диаграмм ползучести, соответствующих значениям заданной на этапе температуры и вычисленного на предыдущем приближении угла вида напряженного состояния:

$$\sigma_0 = \Phi^* (\bar{\varepsilon}_0^*, T_m, \vartheta_{k-1}); \quad S = F^* (\Gamma^*, T_m, \vartheta_{k-1}), \quad (2.82)$$

где m – номер рассматриваемого этапа, k – номер текущего приближения.

В процессе последовательных приближений при решении краевой задачи на основе теории простых процессов деформирования с использованием этих диаграмм деформирования вычисляется функция пластичности ω и секущий модуль G^* . При

вивалентное напряжение определяется с помощью одного из критериев прочности. При этом предполагается, что параметр повреждения является функционалом процесса нагружения. Методика его определения подробно описана в работах [51,111, 117 и др.]. При другом более упрощенном подходе за параметр повреждения предлагается принимать отношение текущего значения деформации ползучести к ее предельному значению. Оценку начала разрушения тела в данной точке элемента можно осуществлять как с использованием значения параметра повреждения, так и путем сравнения эквивалентных напряжений с значениями пределов прочности.

Методика организации последовательных приближений при решении краевых задач термовязкопластичности подробно описана в многочисленных работах авторов [36, 80, 95, 141 и др.].

Для ортотропных материалов на каждом этапе нагружения учет влияния повреждения на процессы деформирования тела будет осуществляться путем введения шести параметров повреждения, характеризующих уменьшение эффективных площадей сечений, на которых действуют соответствующие компоненты напряжений, и использования вместо условных напряжений их истинных значений [62, 63]:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - \omega_{ij}^p}, \quad (2.86)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора условных напряжений, т.е. напряжений, отнесенных к первоначальным, неповрежденным площадкам элемента тела; ω_{ij}^p – параметры, характеризующие повреждения соответствующих площадок тела. Такое введение параметров повреждения характеризует изменение в процессе деформирования первоначальной структуры материала, зарождение, развитие и слияние пор, образование микродефектов, что приводит к уменьшению эффективной площади сечений, по которым распределены компоненты напряжений. С помощью этих параметров повреждения можно объяснить нелинейность диаграмм растяжения, кручения или сдвига.

Для таких материалов при учете повреждения связь между напряжениями и деформациями можно записать в виде (2.12), в которых дополнительные члены σ_{ij}^* будут следующими:

для цилиндрически ортотропного материала

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^* = & A_{zzzz} \varepsilon_{zz}^T + A_{zzrr} \varepsilon_{rr}^T + A_{zz\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi}^T + A_{zzzz}^0 \omega_{zzzz} \varepsilon_{zz} + A_{zzrr}^0 \omega_{zzrr} \varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}^0 \omega_{zz\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \\ & + \omega_{zz}^p [A_{zzzz} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^T) + A_{zzrr} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^T) + A_{zz\varphi\varphi} (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^T)]; \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\sigma_{r\varphi}^* = (A_{r\varphi r\varphi}^0 \omega_{r\varphi r\varphi} + A_{r\varphi r\varphi} \omega_{r\varphi}^p) \varepsilon_{r\varphi};$$

для прямолинейно ортотропного материала

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^* = & (1 - \omega_{zz}^p) [A_{zzzz}^0 \omega_{zzzz} \varepsilon_{zz} + A_{zzrr}^0 \omega_{zzrr} \varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}^0 \omega_{zz\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} - \\ & - 2A_{zzr\varphi} (\varepsilon_{r\varphi} - \varepsilon_{r\varphi}^T) + A_{zzzz} \varepsilon_{zz}^T + A_{zzrr} \varepsilon_{rr}^T + A_{zz\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi}^T] + \omega_{zz}^p (A_{zzzz}^0 \varepsilon_{zz} + A_{zzrr}^0 \varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}^0 \varepsilon_{\varphi\varphi}); \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi}^* = & (1 - \omega_{r\varphi}^p) [A_{r\varphi r\varphi}^0 \omega_{r\varphi r\varphi} \varepsilon_{r\varphi} + A_{r\varphi r\varphi} \varepsilon_{r\varphi}^T - A_{zzr\varphi} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^T) - \\ & - A_{rrr\varphi} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^T) - A_{\varphi\varphi r\varphi} (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^T)] - A_{r\varphi}^0 \omega_{r\varphi}^p \varepsilon_{r\varphi}. \end{aligned}$$

Как соотношения (2.84) с учетом (2.85) для изотропного материала, так и соотношения (2.12) с учетом (2.87), (2.88) для ортотропного материала являются нелинейными. Эта нелинейность обусловлена тем, что компоненты пластической деформации

ε_{ij}^n и параметры повреждения ω^p, ω_{ij}^p , от которых зависят напряжения, в свою очередь зависят от напряженного состояния элементов тела. Линеаризация этих соотношений будет осуществляться с помощью метода последовательных приближений, вычисляя величину неупругой деформации ε_{ij}^n и параметры повреждения ω^p, ω_{ij}^p из предыдущего приближения. При этом для изотропного материала будет использована мгновенная термомеханическая поверхность $S = F^*(\Gamma^*, T)$, полученная при различных фиксированных температурах, а для ортотропного материала – шесть мгновенных термомеханических поверхностей $\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{ij}^*, T)$, полученных из опытов на растяжение-сжатие или кручение – сдвиг соответствующих образцов.

Методика вычисления параметров повреждения в ортотропном материале состоит в следующем. В первом приближении первого этапа нагружения и нагрева эти параметры принимаются равными нулю, а на последующих этапах принимаются равными их значениям в последнем приближении предыдущего этапа. При этом в каждом приближении параметры повреждения не могут быть меньше значений в последнем приближении предыдущего этапа, т.е. предполагается, что повреждения в материале не залечиваются. В результате решения упругой краевой задачи с дополнительными напряжениями в первом приближении k -го этапа нагружения получаем распределение напряжений σ_{ij} и ε_{ij} в каждом элементе тела, а также можем вычислить величину деформаций $\varepsilon_{ij}^* = \sigma_{ij} / [E_{ij}(1 - \omega_{ij}^{p(k-1)})]$, которая соответствует напряжениям σ_{ij} при одноосном нагружении. Здесь $E_{ij} = E_i$ при $i = j$ и $E_{ij} = 2G_{ij}$ при $i \neq j$, а $\omega_{ij}^{p(k-1)}$ – значения параметров повреждения на предыдущем этапе нагружения или в конце предыдущего приближения. Затем по диаграммам $\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{ij})$ для температуры T_k m -го этапа нагружения элемента тела, построенных путем линейной интерполяции по температуре мгновенных термомеханических поверхностей $\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{ij}, T)$, определим такие пары значений $\sigma_{ij}^D, \varepsilon_{ij}^D$, чтобы для каждой диаграммы $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ выполнялось условие $(\sigma_{ij}^D \cdot \varepsilon_{ij}^D) = (\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^*)_K$. По полученным парам значений $\sigma_{ij}^D, \varepsilon_{ij}^D$ параметры повреждения ω_{ij}^p определяются по формулам $(\omega_{ij}^p)_K = 1 - \frac{\sigma_{ij}^D}{E_{ij} \varepsilon_{ij}^D}$. Зная значения параметров повреждения, снова решаем краевую задачу по определению компонентов напряжений и деформаций и вычисляем новые значения параметров ω_{ij}^p . Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока для каждого элемента тела потенциальная энергия деформирования $U = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T) / 2$ будет мало отличаться от приближения к приближению.

Результаты исследования термонапряженного состояния тел вращения с учетом повреждения материала в процессе нагружения изложены в работах [62, 66, 111, 117, 133, 135, 141, 148 и др.].

§3. Вариационные уравнения нестационарной теплопроводности и термовязкопластичности для изотропных и ортотропных материалов.

В механике деформируемого твердого тела имеются довольно много вариационных уравнений и вариационных принципов, эквивалентных различным соотношениям, приведенных в §2. Многие из них подробно описаны в соответствующей литературе. Здесь же рассмотрим вариационные уравнение теплопроводности и уравнение Лагранжа, которые заменяют дифференциальное уравнение теплопроводности и граничные условия теплообмена с окружающей средой, уравнения равновесия и статические граничные условия и существуют независимо от того, в каком состоянии (упругим, пластическом или вязкопластическом) находится материал.

3.1. Вариационное уравнение теплопроводности. Для определения температуры в анизотропных составных элементах конструкций воспользуемся дифференциальным уравнением теплопроводности [95,132], которое имеет следующий вид:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{p}, \quad (3.1)$$

где $\vec{p} = -\lambda \operatorname{grad} T$ – вектор теплового потока в теле. Здесь c – коэффициент удельной массовой теплоемкости материала тела; t – время; ρ – плотность материала; $\lambda(\lambda_{ij})$ – тензор коэффициентов теплопроводности; T – температура.

При записи уравнения (3.1) предполагается, что в рассматриваемом теле отсутствуют источники тепла, и пренебрегается выделением тепла в результате его деформирования. Дифференциальное уравнение (3.1) следует решать при начальном $T = T_o$ (при $t = t_o$) и граничных $\vec{n} \cdot \vec{p} = \alpha(T - \theta) + \vec{n} \cdot \vec{p}^*$ условиях конвективного теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона на поверхности Σ , ограничивающей рассматриваемое составное тело. Здесь t_o и T_o – начальные значения времени и температуры; \vec{n} – внешняя нормаль к поверхности, ограничивающей составное тело; α – коэффициент теплоотдачи; θ – температура окружающей среды; \vec{p}^* – заданный внешний тепловой поток.

Умножая уравнение теплопроводности и граничные условия на вариацию температуры δT , интегрируя первое уравнение по объему тела V , а второе – по поверхности Σ , которая ограничивает этот объем, после их сложения и несложных преобразований получим вариационное уравнение теплопроводности

$$\int_V \left[c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \delta T - \vec{p} \cdot \delta \operatorname{grad} T \right] dV + \int_{\Sigma} \left[\alpha(T - \theta) + \vec{n} \cdot \vec{p}^* \right] \delta T d\Sigma. \quad (3.2)$$

Решение задачи теплопроводности строится в ортогональной криволинейной системе координат q_i ($i = 1, 2, 3$), не совпадающей с направлениями главных осей q_i' анизотропии теплофизических свойств ортотропного материала. Тогда, пользуясь формулами преобразования, компоненты тензора теплопроводности λ_{ij} в системе координат q_i можно выразить через главные их значения λ_n' следующим образом:

$$\lambda_{ij} = \lambda_n' l_m' l_{nj} \quad (n = 1, 2, 3). \quad (3.3)$$

В этой системе координат вариационное уравнение теплопроводности (3.2) для рассматриваемого материала примет следующий вид:

$$\int_V \left[c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \delta T + \frac{\lambda_{ij}}{H_i} \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \right] dV + \int_{\Sigma} \left[(\alpha(T - \theta) + p_n^*) \right] \delta T d\Sigma = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.4)$$

Здесь α – коэффициент теплоотдачи при конвективном теплообмене тела со средой температуры θ ; t – текущее время нагрева; p_n^* – проекция вектора заданного внешнего теплового потока на нормаль к поверхности тела; H_i – параметр Ламе системы координат q_i .

Как уже отмечалось ранее, в основном будем рассматривать составные элементы конструкций в виде тел вращения. Их решение будет строиться в цилиндрической системе координат для случая изотропных материалов, а также цилиндрически ортотропных материалов и материалов ортотропных в декартовой системе координат. Вариационное уравнение теплопроводности (3.4) в этом случае примет следующий вид:

$$\int_V \left[c \rho \frac{\partial T}{\partial t} \delta T - q_z \delta \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) - q_r \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) - q_\varphi \left(\frac{\partial T}{r \partial \varphi} \right) \right] dV + \int_\Sigma [(\alpha(T - \theta) + Q_n)] \delta T d\Sigma = 0, \quad (3.5)$$

где q_z, q_r, q_φ – тепловые потоки в соответствующих направлениях:

$$q_z = - \left(\lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_{zr} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{z\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right); \quad (3.6)$$

$$q_r = - \left(\lambda_{zr} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{r\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right); \quad q_\varphi = - \left(\lambda_{z\varphi} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_{r\varphi} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right);$$

Q_n – проекция вектора заданного теплового потока на нормаль к поверхности тела; λ_{ij} – компоненты тензора теплопроводности: для изотропного материала $\lambda_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij}$, а в случае прямолинейно ортотропного материала их значения определяются через главные значения $\lambda_{zz}, \lambda_{xx}, \lambda_{yy}$ тензора теплопроводности по формулам преобразования (при переходе от системы координат z, x, y к системе z, r, φ).

3.2. Вариационное уравнение Лагранжа. Запишем вариационное уравнение Лагранжа, определяющее напряженно-деформированное состояние твердого тела, которое заменяет дифференциальное уравнение равновесия

$$\operatorname{div} T_\sigma + \vec{K} = 0 \quad (3.7)$$

и статические граничные условия $\vec{t}_n = T_\sigma \cdot \vec{n}$ или в проекциях на оси координат $t_{\alpha n} = \sigma_{\alpha\beta} l_{\beta n}$. Здесь l_β (l_1, l_2, l_3) – направляющие косинусы внешней нормали \vec{n} к поверхности тела Σ_t ; $t_{\alpha n}$ (t_{1n}, t_{2n}, t_{3n}) – проекции поверхностных сил на ортогональные оси координат q_α ; точкой обозначено скалярное произведение тензора на вектор, а второе равенство связывает компоненты напряжений $t_{\alpha n}$, действующие на площадке с внешней нормалью \vec{n} , с компонентами $\sigma_{\alpha\beta}$, действующими на трех взаимно перпендикулярных площадках, которые совпадают с координатными поверхностями и примыкают к площадке с нормалью \vec{n} .

Предполагаем, что на части внешней поверхности Σ_t заданы поверхностные силы $\vec{t}_n(t_{in})$, а на части поверхности Σ_u – перемещения $\vec{u}(u_i)$. Тогда вариационное уравнение примет вид

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - \vec{K} \cdot \delta \vec{u}) dV - \int_{\Sigma_t} \vec{t}_n \cdot \delta \vec{u} d\Sigma = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.8)$$

Здесь поверхностный интеграл вычисляется на той части поверхности тела, где заданы только поверхностные силы, так как вариации перемещений на поверхности Σ_u равны нулю.

Подставляя (1.1) в вариационное уравнение (3.8) и предполагая, что дополнительное напряжение σ_{ij}^* и параметры A_{ijmn} не варьируются, так как являются известными функциями или постоянными величинами в каждом приближении, для определения напряженно-деформированного состояния получим вариационное уравнение

$$\delta \mathcal{D} = \delta \int_V \left(\frac{1}{2} A_{ijmn} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} - \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} - K_i u_i \right) dV - \delta \int_{\Sigma_t} t_m u_i d\Sigma = 0 \quad (i, j, m, n = 1, 2, 3). \quad (3.9)$$

При уравнениях состояния, записанных в форме (2.12), для определения напряженно-деформированного состояния в цилиндрической системе координат получим следующее вариационное уравнение:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = \delta \left\{ \int_V [0, 5(A_{zzzz}^0 \varepsilon_{zz}^2 + A_{rrrr}^0 \varepsilon_{rr}^2 + A_{\varphi\varphi\varphi\varphi}^0 \varepsilon_{\varphi\varphi}^2) + 2(A_{zrzr}^0 \varepsilon_{zr}^2 + A_{z\varphi z\varphi}^0 \varepsilon_{z\varphi}^2 + \right. \\ \left. + A_{r\varphi r\varphi}^0 \varepsilon_{r\varphi}^2) + A_{zzrr}^0 \varepsilon_{zz} \varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}^0 \varepsilon_{zz} \varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{rr\varphi\varphi}^0 \varepsilon_{rr} \varepsilon_{\varphi\varphi} - \right. \\ \left. - \sigma_{zz}^* \varepsilon_{zz} - \sigma_{rr}^* \varepsilon_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}^* \varepsilon_{\varphi\varphi} - 2\sigma_{zr}^* \varepsilon_{zr} - 2\sigma_{z\varphi}^* \varepsilon_{z\varphi} - 2\sigma_{r\varphi}^* \varepsilon_{r\varphi} - K_z u_z - \right. \\ \left. - K_r u_r - K_\varphi u_\varphi] rdzdrd\varphi - \int_{\Sigma_i} (t_{nz} u_z + t_{nr} u_r + t_{n\varphi} u_\varphi) r ds d\varphi \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если коэффициенты A_{ijkl} будут определяться выражениями (2.6), (2.7), а дополнительные напряжения σ_{ij}^* – выражениями (2.13), уравнение (3.10) будет вариационным уравнением для описания напряженно-деформированного состояния цилиндрически ортотропного материала. Для прямолинейно ортотропного материала коэффициенты A_{ijkl} в уравнении (3.10) определяются соотношениями (2.9), (2.10), а дополнительные напряжения – выражениями (2.14). При этом форма записи вариационного уравнения остается идентичной как для изотропных, так и ортотропных материалов. Это позволяет воспользоваться известными алгоритмами решения трехмерных задач термовязкопластичности для слоистых тел вращения, состоящих из неупруго деформирующихся изотропных материалов и упругих ортотропных материалов, при неосесимметричном термосиловом нагружении [95, 142].

Для элемента конструкции из изотропного материала при записи уравнений состояния в форме (2.75) вариационное уравнение термовязкопластичности имеет следующий вид [100]:

$$\delta \mathcal{E} = \delta \int_V \left(G' \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \lambda' \theta^2 - \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} - K_i u_i \right) rdzdrd\varphi - \delta \int_{\Sigma_i} t_{in} u_i d\Sigma = 0 \quad (i, j, m, n = 1, 2, 3). \quad (3.11)$$

Присоединяя к вариационным уравнениям (3.9) – (3.11) соотношения Коши и кинематические граничные условия на поверхности Σ_u , получаем полную систему уравнений, которая позволяет по этапам исследовать обширный класс процессов нагружения и нагрева различных элементов конструкций из изотропных и ортотропных материалов.

§4. Численное решение задачи теплопроводности и термовязкопластичности для составных тел.

Как отмечалось раньше, задача исследования трехмерного термонапряженного состояния составных тел сводится к последовательному решению задачи нестационарной теплопроводности по определению температурных полей в теле и задачи термопластичности по определению напряженно-деформированного состояния рассматриваемого тела. Выбирая за основные неизвестные температуру T и компоненты перемещений для их определения воспользуемся вариационным уравнением теплопроводности (3.4) и вариационным уравнением Лагранжа (3.8), дискретизацию, которых будем осуществлять с привлечением метода конечных элементов.

Остановимся на работах, в которых не накладывая никаких ограничений на форму тела, рассмотрено решение пространственной задачи термовязкопластичности в декартовой или цилиндрической системах координат. Применение той или иной системы координат определяется в первую очередь удобством при описании формы тела.

4.1. Решение задачи термовязкопластичности в декартовой системе координат. Методика построения решения пространственной задачи термовязкопластичности для призматических изотропных тел в декартовой системе координат содержится в работах [38 – 40, 36, 88, 95, 121]. Как и в предыдущем случае, решение задачи строим на основе вариационного уравнения (3.11), в котором $i, j = z, x, y$, методом конечных элементов. Для этого весь объем V , занятый телом, разбивается на M конечных элементов в виде треугольных пирамид. Тогда поверхность Σ , ограничивающая этот объем, аппроксимируется треугольниками, представляющими собой грани пирамид, совпадающими с поверхностью тела. Разбивка тела на конечные элементы осуществлялась следующим образом: сначала объем тела расчленяется на элементы в виде 8-угольных шестигранных элементов с прямолинейными ребрами, принадлежащих одному материалу, а затем каждый из них разбивался на пять тетраэдров без введения дополнительных узлов. В результате такой разбивки каждая пирамида состоит только из одного материала. За основные независимые переменные приняты значения $u_{i\alpha}$ ($i=1, 2, 3; \alpha = 1, 2, \dots, N$) в узлах, координаты которых будут $(x_1, x_2, x_3)_\alpha$. Их изменение в отдельном конечном элементе, вершины которого имеют номера α, β, k, q , аппроксимируется линейными функциями

$$u_i = a_0^i + a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + a_3^i x_3 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.1)$$

где $a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i$ – постоянные коэффициенты. Они выражаются через значения компонентов перемещения в соответствующих вершинах элемента и координаты этих вершин. Для этого необходимо подставить значения компонентов перемещения и соответствующие координаты вершин элемента в выражения (4.1). В результате получим три системы алгебраических уравнений четвертого порядка относительно неизвестных коэффициентов $a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i$, после решения которых получим

$$a_j^{i(m)} = \frac{1}{A^{(m)}} a_{jc}^{(m)} u_{jc}^{(m)} u_{ic}^{(m)} \quad (c = \alpha, \beta, k, q); < i = 1, 2, 3; j = 0, 1, 2, 3; m = 1, 2, \dots, M >, \quad (4.2)$$

где $A^{(m)}$ – определитель соответствующей системы уравнений; $a_{jc}^{(m)}$ – алгебраическое дополнение к j -ому столбцу определителя; m – номер конечного элемента.

Заменяя интегрирование по объему и поверхности рассматриваемого тела суммой соответствующих интегралов по объемам и совпадающим с поверхностью тела граням конечных элементов, для функционала \mathcal{E} получим выражение, представляющее собой функцию неизвестных дискретных значений компонентов перемещений в узловых точках данного разбиения тела на конечные элементы. Для их определения из условия экстремальности функционала \mathcal{E} получим систему $3N$ алгебраических уравнений относительно искомых дискретных значений компонентов перемещений в узловых точках

$$\sum_{m=1}^M [B_{1c}^{l\alpha(m)} u_{ic} + B_{2c}^{l\alpha(m)} u_{2c} + B_{3c}^{l\alpha(m)} u_{3c}] = D_{l\alpha} \quad < l=1, 2, 3 > \quad (c = \alpha, \beta, k, q); \quad (4.3)$$

$$\left\{ B_{jc}^{i\alpha(m)} = \frac{1}{6|A^{(m)}|} [\langle G' \rangle_m (a_{pc}^{(m)} a_{p\alpha}^{(m)} \delta_{ij} + a_{ic}^{(m)} a_{j\alpha}^{(m)}) + \langle \lambda' \rangle_m a_{i\alpha}^{(m)} a_{jc}^{(m)}] \quad (p = 1, 2, 3); \quad (4.4)$$

$$D_{l\alpha} = \sum_{m=1}^M (< \sigma_{ij} >_m a_{j\alpha}^{*(m)} + \frac{|A^{(m)}|}{24} < K_i >_m) + \frac{1}{3} \sum_{l=1}^L < t_{ni} >_l \Sigma_l \quad (j = 1, 2, 3); \quad (4.5)$$

$$a_{j\alpha}^{*(m)} = \left. \frac{|A^{(m)}|}{6A^{(m)}} a_{j\alpha}^{(m)} \right\}. \quad (4.6)$$

В выражениях (4.4), (4.5) угловыми скобками обозначены средние значения величин, заключенных в них. Первое суммирование в (4.5) ведется по всем конечным элементам, второе – по всем совпадающим с поверхностью тела треугольным граням элемента, одна из вершин которых имеет номер α .

По полученным в результате решения этой системы уравнений значениям компонентов узловых перемещений вычисляем с использованием (4.1), (4.2) компоненты деформаций и напряжений для каждого конечного элемента. В силу принятого закона изменения компонентов перемещений в пределах каждого элемента деформации и напряжения являются постоянными величинами и определяются только значениями компонентов узловых перемещений в элементах и координатами его вершин. Поэтому, как правило, предполагается, что они соответствуют центру тяжести конечного элемента. Деформации и напряжения во внутренних узловых точках тела вычисляем как средние значения в элементах, сходящихся в данной точке.

Используя разработанную методику, исследовано термоупругопластическое напряженно-деформированное состояние кубообразных тел, находящихся под действием силового и теплового нагружения [38 – 40, 88, 95]; напряженное состояние четырехугольного стакана с коническим отверстием в центре доньшка при нагреве с внутренней поверхности [40, 121] и др.

4.2. Решение задачи термовязкопластичности в цилиндрической системе координат. Если в декартовой системе координат удобнее строить решение для призматических тел, то цилиндрическую систему координат целесообразно применять для описания напряженно-деформированного состояния частей тела вращения, полученных пересечением координатных поверхностей с телом.

Как и в случае задачи термовязкопластичности в декартовой системе координат решение задачи в цилиндрической системе координат строится на основе соответствующего вариационного уравнения (3.11) методом конечных элементов. Для этого разбивается весь объем V , занятый телом, N узловыми окружностями и соответствующими H меридиональными сечениями на M кольцевых элементов в виде криволинейных призм треугольного поперечного сечения. Общее количество узловых точек при такой разбивке – $N^* = N \cdot H$. В этом случае поверхность Σ , ограничивающая этот объем, разбиваем на L площадок, представляющих собой грани конечного элемента, которые совпадают с поверхностью тела. Выбор конечного элемента в виде криволинейной в окружном направлении треугольной призмы позволяет при небольшом их количестве довольно хорошо аппроксимировать тело вращения произвольного меридионального сечения или часть его, отсеченную двумя меридиональными сечениями (незамкнутое тело вращения).

Обозначим через z_i, r_i, φ_i координаты, а через $u_{\beta i}$ ($i = 1, 2, \dots$) – значения компонентов перемещения узла с номером i ($\beta = z, r, \varphi; i = 1, 2, \dots, N^*$ – номер узловой точки). Компоненты узловых перемещений примем за основные неизвестные.

Предполагаем, что их изменение в произвольном i -том конечном элементе (рис. 3) с номерами вершин i, j, k, l, p, s можно представить в виде билинейной функции

$$u_{\beta} = b_1^{\beta} + b_2^{\beta} z + b_3^{\beta} r + \varphi (b_4^{\beta} + b_5^{\beta} z + b_6^{\beta} r) \quad \langle \beta = z, r, \varphi \rangle, \quad (4.7)$$

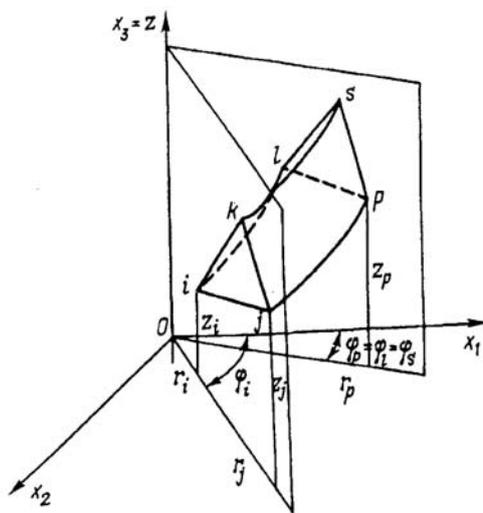


Рис. 3

где b_n^β – постоянные коэффициенты для рассматриваемого конечного элемента. Они могут быть выражены через значения соответствующих компонентов перемещения $u_{\beta i}, u_{\beta j}, u_{\beta k}, u_{\beta l}, u_{\beta p}, u_{\beta s}$ в вершинах рассматриваемого конечного элемента. Для этого, подставляя эти значения компонентов перемещений и соответствующие значения координат вершин в (4.7), получим систему алгебраических уравнений 6-го порядка, после решения которой получим

$$b_n^{\beta(m)} = a_{nc}^{(m)} u_{\beta c} \quad < \beta = z, r, \varphi; \quad n = 1, 2, \dots, 6 > \quad (c = i, j, k, l, p, s), \quad (4.8)$$

где $a_{nc}^{(m)}$ – элементы матрицы, обратной к матрице системы, из которой определялись коэффициенты b_n^β .

Заменим интегрирование по объему V и поверхности Σ рассматриваемого тела суммами соответствующих интегралов по объемам и поверхностям конечных элементов. При этом следует иметь в виду, что с поверхностью тела может совпадать как треугольная грань i, j, k или l, p, s , так и четырехугольная: i, j, p, l , i, k, s, l или j, p, s . Учитывая в каждом элементе билинейную зависимость компонентов перемещения (4.7), после использования соотношений Коши и выражений (4.8) функционал Э в вариационном уравнении (3.12) можно представить в виде функции неизвестных дискретных значений компонентов перемещений в узловых точках данной разбивки тела на конечные элементы. Для их определения из условия экстремальности этого выражения получим систему $3N^*$ линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M [B_{zc}^{\beta i(m)} u_{zc} + B_{rc}^{\beta i(m)} u_{rc} + B_{\varphi c}^{\beta i(m)} u_{\varphi c}] = D_{\beta i}, \quad (4.9)$$

$$< \beta = z, r, \varphi >, \quad (c = i, j, k, l, p, s), \quad < i = 1, 2, \dots, N^* >, \quad \dots$$

где

$$B_{zc}^{zi(m)} = \int_{V_m} [(2G' + \lambda') c_{zz}^{zi} c_{zz}^{zc} + 4G' (c_{zr}^{zi} c_{zr}^{zc} + c_{z\varphi}^{zi} c_{z\varphi}^{zc})] r dz dr d\varphi;$$

$$B_{rc}^{zi(m)} = \int_{V_m} [4G' c_{zr}^{zi} c_{zr}^{rc} + \lambda' c_{zz}^{zi} (c_{rr}^{rc} + c_{\varphi\varphi}^{rc})] r dz dr d\varphi; \quad B_{\varphi c}^{zi(m)} = \int_{V_m} [4G' c_{z\varphi}^{zi} c_{z\varphi}^{\varphi c} + \lambda' c_{zz}^{zi} c_{\varphi\varphi}^{\varphi c}] r dz dr d\varphi;$$

$$\dots \dots \dots (4.10)$$

$$D_{zi} = \sum_{m=1}^M \left[< \sigma_{\rho q} >_m C_{\rho q}^{zi(m)} + \frac{1}{6} < K_z >_m V_m \right] + \sum_{l=1}^L \left[< t_{nz} >_l \left(\frac{\Sigma_l^0}{4} + \frac{\Sigma_l^A}{3} \right) \right] (z, r, \varphi), (\rho, q = z, r, \varphi);$$

$$c_{zz}^{zc} = a_{2c} + a_{5c} \varphi; \quad c_{zr}^{zc} = \frac{1}{2} (a_{3c} + a_{6c} \varphi); \quad c_{z\varphi}^{zc} = \frac{1}{2r} (a_{4c} + a_{5c} z + a_{6c} r);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_{zz}^{zc(m)} = \int_{V_m} c_{zz}^{zc} r dz dr d\varphi; \quad C_{zr}^{zc(m)} = \int_{V_m} c_{zr}^{zc} r dz dr d\varphi, \quad (4.11)$$

$$\dots \dots \dots$$

В выражении (4.10) первое суммирование ведется по всем конечным элементам, второе – по всем граням конечных элементов, совпадающих с поверхностью тела, одна из вершин которых имеет номер i . Если одна из совпадающих с поверхностью тела граней является четырехугольной, в выражении (4.10) $\Sigma_i^A = 0$, а в случае треугольной – $\Sigma_i^0 = 0$, где Σ^A, Σ^0 – площади соответствующих граней конечного элемента.

Изложенная методика была применена к исследованию термоупругопластического напряженного состояния незамкнутых в окружном направлении тел вращения в виде неравномерно нагретого цилиндрического сектора, свободного от внешнего силового воздействия [72 – 75, 88], а также неравномерно нагретого конического сектора при смешанных граничных условиях [75, 95, 152] и др.

4.3. Решение задачи термовязкопластичности в цилиндрической системе координат полуаналитическим методом конечных элементов. Применение трехмерных конечных элементов к расчету напряженно-деформированного состояния замкнутых тел вращения является трудоемким и экономически неоправданным. Предлагаемая ниже методика позволяет свести решение трехмерных задач теплопроводности и термовязкопластичности для составных тел вращения из изотропных и ортотропных материалов к решению ряда двумерных задач в меридиональном сечении тела. Суть этого метода состоит в представлении разрешающих функций в одном направлении по некоторой системе непрерывных гладких базисных функций и в конечно-элементной дискретизации в плоскости, перпендикулярной данному направлению. При этом исходная трехмерная задача может быть сведена к решению ряда двумерных. Практическая ограниченность этого подхода может зависеть от того, насколько хорошо можно аппроксимировать заданную нагрузку и искомые разрешающие функции несколькими членами ряда. Наибольшая эффективность такого подхода достигается при решении задач термовязкопластичности для осесимметричных объектов. В этом случае, принимая за основные неизвестные температуру и компоненты перемещений u_z, u_r, u_φ , как при решении задачи теплопроводности по определению распределения температуры в исследуемом теле, так и при решении краевой задачи по определению напряженно-деформированного состояния составного тела вращения будет использован полуаналитический метод конечных элементов [36, 61, 91, 95, 131, 137 и др.], в котором решение ищем в виде тригонометрических рядов

$$T(z, r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{T}_m(z, r, t) \cos m\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{T}_m^*(z, r, t) \sin m\varphi ; \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} u_z(z, r, \varphi, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} u_z^{-(m)}(z, r, t) \cos m\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} u_z^{=(m)}(z, r, t) \sin m\varphi \quad (z, r) ; \\ u_\varphi(z, r, \varphi, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} u_\varphi^{-(m)}(z, r, t) \sin m\varphi + \sum_{m=0}^{\infty} u_\varphi^{=(m)}(z, r, t) \cos m\varphi . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Коэффициенты этих рядов определяются с помощью метода конечных элементов в меридиональном сечении тела на основе соответствующих вариационных уравнений: вариационного уравнения теплопроводности (3.5) и вариационного уравнения Лагранжа (3.8).

Для определения стационарных значений функционалов (3.5), (3.8) область F меридионального сечения тела разбиваем N узловыми точками на M треугольных конечных элементов. Тогда контур, ограничивающий эту область, будет разбит на N_1 участков, представляющих собой стороны треугольников, совпадающих с контуром. Разбивка осуществлялась таким образом, чтобы каждый элемент соответствовал только одному материалу. За основные неизвестные принимались значения температуры и компонентов перемещений в узловых точках.

Предполагалось, что в пределах каждого конечного элемента с номерами вершин i, j, k температура и компоненты перемещения могут быть с достаточной точностью аппроксимированы линейными функциями

$$T = b_1^T + b_2^T z + b_3^T r ; \quad (4.14)$$

$$u_\alpha = a_1^\alpha + a_2^\alpha z + a_3^\alpha r \quad (\alpha = z, r) , \quad (4.15)$$

где $b_1^T, b_2^T, b_3^T, a_1^\alpha, a_2^\alpha, a_3^\alpha$ – постоянные коэффициенты. Они выражаются через температуру T_i, T_j, T_k и компоненты перемещения u_{ai}, u_{aj}, u_{ak} в вершинах элемента следующим образом:

$$b_p^T = \frac{a_{pc}^{(m)} T_c}{2F_m^*} \quad (4.16)$$

$$\left[a_p^\alpha = \frac{a_{pc}^{(m)} u_{ac}}{2F_m^*} \quad (c = i, j, k); \quad \langle p = 1, 2, 3, \quad \alpha = z, r; \quad m = 1, 2, \dots, M \rangle \right]. \quad (4.17)$$

Постоянные $a_{pc}^{(m)}$ и F_m^* , входящие в (4.16), (4.17) выражаются через координаты вершин элемента с помощью соотношений

$$a_{1i}^{(m)} = z_j r_k - z_k r_j; \quad a_{2i}^{(m)} = r_j - r_k; \quad a_{3i}^{(m)} = z_k - r_j \quad (i, j, k); \quad (4.18)$$

$$2F_m^* = z_i(r_j - r_k) + z_j(r_k - r_i) + z_k(r_i - r_j).$$

Заменяем интегрирование по площади F и контуру L суммой соответствующих интегралов по площади F_m элементов и сторонам L_i , совпадающих с контуром L_i области. После подстановки значений температуры (4.14) или перемещений (4.15) и деформаций, полученных согласно соотношениям Коши, в соответствующие вариационные уравнения и предполагая, что величины, характеризующие поверхностное воздействие, изменяются между узлами линейно, выражение для функционалов представляется в виде функции дискретных значений температуры или компонентов перемещения в узловых точках рассматриваемой разбивки области на конечные элементы.

Входящие в вариационное уравнение (3.5) коэффициенты теплопроводности λ_{ij} зависят от температуры и изменяются как в окружном направлении, так и в меридиональном сечении. После представления коэффициента теплопроводности λ_{ij} в виде $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^0 (1 - \omega_{ij}^T)$ и предположения, что в некоторый фиксированный момент времени коэффициент теплоотдачи α , температура окружающей среды θ , а также произведение $c\rho$ являются известными функциями координат и не варьируются, вариационное уравнение (3.5) можно записать следующим образом:

$$\delta \left\{ \int_V \left[\int_{T_0}^T c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dT + \frac{\lambda_{zz}^0}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + \frac{\lambda_{rr}^0}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{\lambda_{\varphi\varphi}^0}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - q_z^* \frac{\partial T}{\partial z} - q_r^* \frac{\partial T}{\partial r} - q_\varphi^* \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right] r dz dr d\varphi + \int_\Sigma \frac{\alpha T}{2} (T - 2\theta) r ds d\varphi \right\} = 0. \quad (4.19)$$

Здесь через $q_z^*, q_r^*, q_\varphi^*$ обозначены величины:

$$q_z^* = \lambda_{zz}^0 \omega_{zz}^T \frac{\partial T}{\partial z}; \quad q_r^* = \lambda_{rr}^0 \omega_{rr}^T \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{r\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}; \quad q_\varphi^* = \lambda_{r\varphi} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{\varphi\varphi}^0 \omega_{\varphi\varphi}^T \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}. \quad (4.20)$$

(они предполагаются известными функциями координат).

Представляя температуру окружающей среды θ и дополнительные члены (4.20) в виде тригонометрических рядов Фурье, исходная трехмерная задача теплопроводности (4.19) сводится к решению ряда двумерных вариационных задач относительно неизвестных значений коэффициентов в рядах (4.12), которые затем можно опреде-

лечь с помощью метода конечных элементов. В качестве конечных элементов выберем в меридиональном сечении тела треугольные конечные элементы с линейным законом изменения коэффициентов \bar{T}_m, \bar{T}_m в них. Для определения коэффициентов \bar{T}_m в вершинах (i, j, k) элементов, в которых сторона ij совпадает с поверхностью тела, получим в случае явной разностной схемы следующие рекуррентные соотношения, позволяющие вычислить соответствующие значения коэффициентов \bar{T}_m в момент времени $t + \Delta t$ через их значения в момент t :

$$\begin{aligned} \bar{T}_{mi}(t + \Delta t) = & \bar{T}_{mi}(t) + \frac{\Delta t}{\sum_{q=1}^M \langle c\rho \rangle_q H_i^{(q)}} \sum_{q=1}^M [A_{ij} \bar{\theta}_{mi}(t + \Delta t) + B_{ij} \bar{\theta}_{mj}(t + \Delta t) - \\ & -(D_{ii} + m^2 N_{ii} + A_{ij}) \bar{T}_{mi}(t) - (D_{ij} + m^2 N_{ij} + B_{ij}) \bar{T}_{mj}(t) - (D_{ik} + m^2 N_{ik}) \bar{T}_{mk}(t) + \\ & + L_i (\bar{q}_z^{*(m)}(t) - \bar{q}_{z\varphi}^{*(m)}(t))_i + P_i (\bar{q}_r^{*(m)}(t) - \bar{q}_{r\varphi}^{*(m)}(t))_i - m R_i \bar{q}_{\varphi i}^{*(m)}(t)]_q, \end{aligned} \quad (4.21)$$

а в случае решения задачи по неявной разностной схеме – систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^M [(D_{ii} + m^2 N_{ii} + \frac{1}{\Delta t} \langle c\rho \rangle H_i + A_{ij}) \bar{T}_{mi}(t + \Delta t) + (D_{ij} + m^2 N_{ij} + B_{ij}) \bar{T}_{mj}(t + \Delta t) + \\ + (D_{ik} + m^2 N_{ik}) \bar{T}_{mk}(t + \Delta t)]_q = \sum_{q=1}^M \left[\frac{1}{\Delta t} \langle c\rho \rangle H_i \bar{T}_{mi}(t) + A_{ij} \bar{\theta}_{mi}(t + \Delta t) + B_{ij} \bar{\theta}_{mj}(t + \Delta t) + \right. \\ \left. + L_i (\bar{q}_z^{*(m)}(t) - \bar{q}_{z\varphi}^{*(m)}(t))_i + P_i (\bar{q}_r^{*(m)}(t) - \bar{q}_{r\varphi}^{*(m)}(t))_i - m R_i \bar{q}_{\varphi i}^{*(m)}(t) \right]_q \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь m – номер гармоники, N – количество узловых точек, M – количество треугольных элементов в меридиональном сечении тела, q – номер треугольного элемента, $\bar{\theta}_{mi}, \bar{\theta}_{mj}$ – значения коэффициентов разложения температуры окружающей среды в аналогичные (4.12) тригонометрические ряды в соответствующих точках;

$$\begin{aligned} H_i = & b_{1i} \int_{\Delta} r dz dr + b_{2i} \int_{\Delta} z r dz dr + b_{3i} \int_{\Delta} r^2 dz dr; \quad D_{ij} = \lambda_{zz}^0 b_{2i} b_{2j} \int_{\Delta} r dz dr + \lambda_{rr}^0 b_{3i} b_{3j} \int_{\Delta} r dz dr; \\ N_{ij} = & \lambda_{\varphi\varphi}^0 [b_{1i} (b_{1j} \int_{\Delta} \frac{1}{r} dz dr + b_{2j} \int_{\Delta} \frac{z}{r} dz dr + b_{3j} \int_{\Delta} dz dr) + \\ & + b_{2i} (b_{1j} \int_{\Delta} \frac{z}{r} dz dr + b_{2j} \int_{\Delta} \frac{z^2}{r} dz dr + b_{3j} \int_{\Delta} z dz dr) + b_{3i} (b_{1j} \int_{\Delta} dz dr + b_{2j} \int_{\Delta} z dz dr + b_{3j} \int_{\Delta} r dz dr)]; \\ A_{ij} = & \text{sign} F_{\Delta} \frac{l_{ij}}{10} \left[\alpha_i \left(2r_i + \frac{r_j}{2} \right) + \alpha_j \left(\frac{r_i}{2} + \frac{r_j}{3} \right) \right]; \quad B_{ij} = \text{sign} F_{\Delta} \frac{l_{ij}}{10} \left[\alpha_i \left(\frac{r_i}{2} + \frac{r_j}{3} \right) + \alpha_j \left(\frac{r_i}{3} + \frac{r_j}{2} \right) \right]; \\ L_i = & b_{2i} \int_{\Delta} r dz dr; \quad P_i = b_{3j} \int_{\Delta} r dz dr; \quad R_i = b_{1i} \int_{\Delta} dz dr + b_{2i} \int_{\Delta} z dz dr + b_{3i} \int_{\Delta} r dz dr; \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$b_{1j} = \frac{z_k r_i - z_i r_k}{2F_\Delta}; \quad b_{2j} = \frac{r_k - r_i}{2F_\Delta}; \quad b_{3j} = \frac{z_i - z_k}{2F_\Delta}; \quad (4.24)$$

$$F_\Delta = \frac{1}{2}[z_i(r_j - r_k) + z_j(r_k - r_i) + z_k(r_i - r_j)]; \quad l_{ij} = \sqrt{(z_i - z_j)^2 + (r_i - r_j)^2}.$$

При построении вариационных уравнений для вычисления в отдельности каждого амплитудного значения температуры и последующих их дискретизации с помощью метода конечных элементов использован метод последовательных приближений, для чего предполагается, что дополнительные члены q_z^* , q_r^* , q_φ^* , известны из предыдущего временного шага или предыдущего приближения. Однако, учитывая, что шаг Δt интегрирования по времени уравнения теплопроводности весьма мал, входящие в правую часть амплитудные значения температуры и осредненные по каждому конечному элементу дополнительные члены определяются на предыдущем временном шаге.

Коэффициенты $\bar{\bar{T}}_m$ определяются аналогичными (4.21), (4.22) выражениями, в которых m необходимо заменить на $-m$, а все величины с чертой – на соответствующие им значения с двумя чертами и наоборот.

Зная \bar{T}_m и $\bar{\bar{T}}_m$ во всех точках конечно элементной разбивки меридионального сечения тела, значения температуры в теле определяются путем вычисления тригонометрического ряда (4.12).

При решении задачи термовязкопластичности для составных тел вращения из изотропных и ортотропных материалов с использованием полуаналитического метода конечных элементов проекции поверхностной t_{ni} и объемной K_i сил, а также функции σ_{ij}^* представляем в виде аналогичных (4.13) рядов. Подставляя эти ряды, а также (4.13) и выражения для компонентов деформаций, полученные из (4.13) с помощью соотношений Коши, в вариационное уравнение (3.10), для определения амплитудных значений $\bar{u}_i^{(m)}$, $\bar{\bar{u}}^{(m)}$ искомых перемещений получим совокупность уравнений

$$(1 + \delta_{0m})\pi\delta\bar{\bar{\mathcal{E}}}_m = 0; \quad (1 + \delta_{0m})\pi\delta\bar{\mathcal{E}}_m = 0; \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_m = \int_F \left[\frac{1}{2} (A_{zzzz}^0 \bar{\mathcal{E}}_{zz}^{-(m)2} + A_{rrrr}^0 \bar{\mathcal{E}}_{rr}^{-(m)2} + A_{\varphi\varphi\varphi\varphi}^0 \bar{\mathcal{E}}_{\varphi\varphi}^{-(m)2}) + 2(A_{zrzr}^0 \bar{\mathcal{E}}_{zr}^{-(m)2} + A_{z\varphi z\varphi}^0 \bar{\mathcal{E}}_{z\varphi}^{-(m)2} + \right. \\ \left. + A_{r\varphi r\varphi}^0 \bar{\mathcal{E}}_{r\varphi}^{-(m)2}) + A_{zzrr}^0 \bar{\mathcal{E}}_{zz}^{-(m)} \bar{\mathcal{E}}_{rr}^{-(m)} + A_{zz\varphi\varphi}^0 \bar{\mathcal{E}}_{zz}^{-(m)} \bar{\mathcal{E}}_{\varphi\varphi}^{-(m)} + A_{rr\varphi\varphi}^0 \bar{\mathcal{E}}_{rr}^{-(m)} \bar{\mathcal{E}}_{\varphi\varphi}^{-(m)} - \sigma_{zz}^* \bar{\mathcal{E}}_{zz}^{-(m)} - \right. \\ \left. - \sigma_{rr}^* \bar{\mathcal{E}}_{rr}^{-(m)} - \sigma_{\varphi\varphi}^* \bar{\mathcal{E}}_{\varphi\varphi}^{-(m)} - 2\sigma_{zr}^* \bar{\mathcal{E}}_{zr}^{-(m)} - 2\sigma_{z\varphi}^* \bar{\mathcal{E}}_{z\varphi}^{-(m)} - 2\sigma_{r\varphi}^* \bar{\mathcal{E}}_{r\varphi}^{-(m)} - \bar{K}_z \bar{u}_z^{-(m)} - \right. \\ \left. - \bar{K}_r \bar{u}_r^{-(m)} - \bar{K}_\varphi \bar{u}_\varphi^{-(m)} \right] rdzdr - \int_S (\bar{t}_{nz}^{-(m)} \bar{u}_z^{-(m)} + \bar{t}_{nr}^{-(m)} \bar{u}_r^{-(m)} + \bar{t}_{n\varphi}^{-(m)} \bar{u}_\varphi^{-(m)}) rds \quad (m = 0, 1, \dots). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь через $\bar{K}_i^{(m)}$, $\bar{t}_{ni}^{(m)}$, $\sigma_i^{*(m)}$ обозначены коэффициенты в разложении соответствующих величин в тригонометрические ряды по окружной координате; F – площадь половины меридионального сечения тела, а S – его контур. Аналогично записываются выражения и для $\bar{\bar{\mathcal{E}}}_m$. В этом случае вариационное уравнение относительно $\bar{\mathcal{E}}_0$ описывает осесимметричное напряженное состояние без кручения, а уравнение относительно $\bar{\bar{\mathcal{E}}}_0$ – напряженное состояние тела при его кручении.

Для определения стационарных значений функционалов (4.26) воспользуемся методом конечных элементов. Как и при решении задачи теплопроводности в качестве конечного элемента в плоскости меридионального сечения тела выбираем треугольный конечный элемент с линейной аппроксимацией коэффициентов рядов (4.13). В результате для определения коэффициентов $\bar{u}_\alpha^{(m)}$, $\bar{u}_\alpha^{(m)}$ ($\alpha = z, r, \varphi$) в вершинах (i, j, k) треугольных элементов q меридионального сечения тела в каждом приближении получим систему $3N$ линейных алгебраических уравнений для каждой гармоники в отдельности:

$$\sum_{q=1}^M (B_{zp}^{\beta i(q)} u_{zp} + B_{rp}^{\beta i(q)} u_{rp} + B_{\varphi p}^{\beta i(q)} u_{\varphi p}) = D_{zi} \quad \langle \beta = z, r, \varphi \rangle, \quad (4.27)$$

$$(p = i, j, k), \quad \langle i = 1, 2, \dots, N \rangle.$$

Таких систем будет столько, сколько членов сохраняется в решении (4.13).

Элементы матрицы системы (4.27) вычисляются через значения коэффициентов физических уравнений (2.12) и координаты вершин элементов в меридиональной плоскости, а правая часть системы – через амплитудные значения дополнительных напряжений σ_{ij}^* , а также объемных и поверхностных нагрузок в соответствующих точках меридионального сечения.

Для отдельного треугольного элемента с вершинами i, j, k они будут иметь следующий вид:

$$B_{zj}^{zi} = \int_{F_\Delta} (A_{11}^0 b_{2i} b_{2j} + A_{44}^0 b_{3i} b_{3j} + m^2 A_{55}^0 \Delta_{1i} \Delta_{1j}) r dz dr;$$

$$B_{rj}^{zi} = \int_{F_\Delta} (A_{44}^0 b_{3i} b_{2j} + A_{12}^0 b_{2i} b_{3j} + A_{13}^0 b_{2i} \Delta_{1j}) r dz dr; \quad B_{\varphi j}^{zi} = m \int_{F_\Delta} (-A_{55}^0 b_{2j} \Delta_{1i} + A_{13}^0 b_{2i} \Delta_{1j}) r dz dr;$$

.....

$$B_{\varphi j}^{\varphi i} = \int_{F_\Delta} (A_{55}^0 b_{2i} b_{2j} + A_{66}^0 \Delta_{2i} \Delta_{2j} + m^2 A_{33}^0 \Delta_{1i} \Delta_{1j}) r dz dr; \quad (4.28)$$

$$D_{zi} = \sum_{q=1}^M \int_{F_\Delta} [\sigma_{zz}^* b_{2i} + \sigma_{zr}^* b_{3i} - (m\sigma_{z\varphi}^* - K_z \cdot z) \Delta_{1i}] r dz dr +$$

$$+ \sum_{l=1}^L \frac{l_{ij}}{12} \text{sign} F_\Delta [t_{nz_i} (3r_i + r_j) + t_{nz_j} (r_i + r_j)]; \quad (4.29)$$

.....

$$\Delta_{1j} = b_{3j} + b_{2j} \frac{z}{r} + b_{1j} \frac{1}{r}; \quad \Delta_{2j} = b_{2j} \frac{z}{r} + b_{1j} \frac{1}{r}. \quad (4.30)$$

Первое суммирование в (4.29) ведется по всем конечным элементам, а второе – по всем, совпадающим с контуром меридионального сечения тела, сторонам соответствующих элементов, одна из вершин которых имеет номер i . Недостающие коэффициенты в (4.27) могут быть получены из (4.28) заменой индекса j соответственно на i или k .

Определив в результате решения систем (4.27) амплитудные значения перемещений, по формулам (2.23), (4.23), (4.27) вычисляются компоненты перемещений, деформаций и напряжений в каждом приближении для рассматриваемого момента вре-

мени. Количество необходимых приближений определяется из условия, чтобы в двух последовательных решениях относительное изменение напряженно-деформированного состояния оказывалось меньше заданного параметра.

§5. Осесимметричные задачи нестационарной теплопроводности и задачи термовязкопластичности для составных элементов конструкций в виде тел вращения.

Остановимся сначала на работах [35, 54, 89, 90, 91 и др.], посвященных решению осесимметричных задач термовязкопластичности для тел из изотропных материалов, напряженно-деформированное состояние в которых определяется компонентами перемещений u_z, u_r , компонентами напряжений $\sigma_{zz}, \sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zr}$ и соответствующими компонентами деформаций. В этих работах приведено два метода решения указанных задач в зависимости от формы исследуемого тела вращения. В случае тел вращения канонического вида, в частности полых и сплошных цилиндров, решение строится в аналитическом виде. При исследовании напряженно-деформированного состояния тел вращения произвольного меридионального сечения решение задачи термовязкопластичности строится с использованием метода конечных элементов.

5.1. Аналитическое решение задачи термопластичности для цилиндров конечной длины. Методика с использованием в каждом приближении аналитического решения соответствующей задачи термоупругости и результаты решения такого класса краевых задач термовязкопластичности для цилиндров конечной длины содержатся в работах [5, 6, 10 – 14, 77 – 79, 91, 106]. В этих работах решение осесимметричной задачи термовязкопластичности для цилиндра ($0 \leq z \leq l, r_0 \leq r \leq R$) строится в перемещениях в цилиндрической системе координат. Температурное поле цилиндра предполагается известным в произвольный момент времени. Цилиндр вращается с угловой скоростью $\Omega(t)$ и находится под действием уравновешенной системы поверхностных нагрузок, являющихся известными функциями координат z, r .

Решение задачи термовязкопластичности для короткого кругового цилиндра для произвольного момента времени сведено в каждом приближении к решению системы двух дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонентов перемещения u_z, u_r с некоторыми дополнительными объемными и поверхностными силами, которые определяются напряженно-деформированным состоянием цилиндра в предыдущем приближении. На каждом приближении общее решение этой системы определяем в аналитической форме в виде суммы общего решения однородной системы уравнений и частных решений, соответствующих внешнему нагружению и дополнительным объемным силам. При этом общее решение однородной системы уравнений записывается в виде бесконечных рядов по функциям Бесселя первого рода J_0, J_1 нулевого и первого порядка и функциям Бесселя второго рода Y_0, Y_1 тех же порядков, умноженных на синус или косинус соответствующих углов. Для получения частных решений, соответствующих дополнительным объемным силам, последние раскладываются в двойные ряды по полным ортогональным системам функций Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядка и тригонометрические функции. Сумма этих двух решений позволяет точно удовлетворить граничным условиям на цилиндрических поверхностях и интегрально – на его торцах. Для более точного удовлетворения граничным условиям на торцах короткого цилиндра используются однородные решения Лурье – Прокопова [51]. Тогда аналитическое решение задачи термопластичности для полого цилиндра, не изменяющее свой вид от приближения к приближению и имеющее место на различных стадиях процесса нагружения, представляется в виде [13, 92]

$$u_z(z, r) = D_0 z - \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \alpha_i r I_1(k_i r) + \left(\alpha_i + 4 \frac{1-\nu}{k_i} \gamma_i \right) I_0(k_i r) + \beta_i r K_1(k_i r) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\beta_i + 4 \frac{1-\nu}{k_i} \delta_i \right) K_0(k_i r) \left\{ \sin k_i z + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ B_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \Phi_0(\lambda_j r) \right\} \sin k_i z + \right. \\
& + \sum_{s=1}^{N_1} \left\{ \operatorname{Im} [N_s^* w_1(r)] \cos k_s(l-z) - \operatorname{Re} [N_s^* w_1(r)] \sin k_s(l-z) \right\} + \\
& \left. + \sum_{s=1}^{N_2} \left\{ \operatorname{Im} [N_s w_1(r)] \cos k_s z - \operatorname{Re} [N_s w_1(r)] \sin k_s z \right\} ; \quad (5.1)
\end{aligned}$$

$$u_r(z, r) = \frac{A_0}{r} + B_0 r + \frac{\gamma r^3 \Omega^2}{g 16 G_0} \frac{1-2\nu}{1-\nu} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \alpha_i r I_0(k_i r) + \gamma_i I_1(k_i r) + \beta_i r K_0(k_i r) + \delta_i K_0(k_i r) \right\} \cos k_i z + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \Phi_1(\lambda_j r) \cos k_i z + \\
& + \sum_{s=1}^{N_1} \left\{ \operatorname{Re} [N_s^* u_1(r)] \cos k_s(l-z) - \operatorname{Im} [N_s^* u_1(r)] \sin k_s(l-z) \right\} + \\
& + \sum_{s=1}^{N_2} \left\{ \operatorname{Re} [N_s u_1(r)] \cos k_s z - \operatorname{Im} [N_s u_1(r)] \sin k_s z \right\} .
\end{aligned}$$

Здесь через $\Phi_0(\lambda_j r)$, $\Phi_1(\lambda_j r)$ обозначены функции

$$\Phi_i(\lambda_j r) = J_1(\lambda_j) Y_i(\lambda_j r) - Y_1(\lambda_j) J_i(\lambda_j r) \quad (i=0, 1), \quad (5.2)$$

где λ_j являются корнями уравнения $\Phi_1(\lambda r_0) = 0$.

Функции $w_1(r)$, $u_1(r)$, входящие в однородные решения, выражаются через модифицированные функции Бесселя первого I_0 , I_1 и второго K_0 , K_1 рода нулевого и первого порядка следующим образом:

$$\begin{aligned}
w_1(r) &= r \left[\mu_2 I_1(k_s r) - \mu_4 K_1(k_s r) \right] + \left(4 \frac{1-\nu}{k_s} \mu_2 - \mu_1 \right) I_0(k_s r) + \left(4 \frac{1-\nu}{k_s} \mu_4 + \mu_3 \right) K_0(k_s r); \\
u_1(r) &= \mu_1 I_1(k_s r) + \mu_3 K_1(k_s r) - r \left[\mu_2 I_0(k_s r) + \mu_4 K_0(k_s r) \right]. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Зная выражения для компонентов перемещений (5.1), можно записать с помощью соотношений Коши выражения для компонентов деформации, а используя соотношения (1.60), – и для напряжений.

Произвольные постоянные, входящие в выражения для перемещений (5.1), определяются из граничных условий: постоянные A_0 , B_0 , D_0 , α_i , β_i , γ_i , δ_i – из граничных условий на цилиндрических поверхностях с учетом разложения их в ряды Фурье по z и условия равенства равнодействующей осевого напряжения заданной силе; комплексные постоянные N_s^* , N_s определяются из граничных условий на торцах, в частности, из условия совпадения напряжений σ_{zz} , σ_{zr} с заданными на границе значениями в конечном числе точек N_1 на правом и N_2 – на левом торцах цилиндра или из условия минимума квадратичного отклонения полученных компонентов напряжений σ_{zz} и σ_{zr} от заданных в этих точках граничных условий.

Решение задачи термовязкопластичности для сплошного цилиндра может быть получено из соотношений (5.1) путем замены функций $\Phi_0(\lambda_j r)$, $\Phi_1(\lambda_j r)$ на $J_0(\lambda_j r)$, $J_1(\lambda_j r)$ при $A_0 = \beta_i = \delta_i = 0$. Функции (5.3), входящие в однородные решения, упрощаются и принимают вид

$$w_1(r) = \gamma_s I_0(k_s r) + g_s \left(r + 4 \frac{1-\nu}{k_s} \right) I_1(k_s r); \quad u_1(r) = g_s r I_0(k_s r) + \gamma_s I_1(k_s r), \quad (5.4)$$

где g_s , γ_s – комплексные постоянные, связанные со значениями модифицированных функций Бесселя $I_0(Rk_s)$, $I_1(Rk_s)$.

Таким образом, задача термовязкопластичности для полых и сплошных цилиндров сведem на каждом этапе нагружения и последовательному вычислению дополнительных поверхностных и объемных нагрузок, разложению их в соответствующие ряды и вычислению постоянных интегрирования в решении (5.1). Полученные решения будут точно удовлетворять граничным условиям на цилиндрических поверхностях и приближенно, с указанной выше точностью, на торцах. На их основе исследовано напряженно-деформированное состояние сплошных цилиндров при различных условиях нагружения и нагрева как при простом деформировании [6, 10 – 14, 79, 91, 106], так и в случае деформирования по траекториям малой кривизны [6, 91, 106].

5.2. Численное решение задач термовязкопластичности для составных тел вращения произвольного меридионального сечения. Рассмотрим цикл работ [7, 18, 25–27, 35, 42–47, 54, 64, 67 – 71, 88, 94, 95, 114, 127, 144, 146], в которых с использованием метода конечных элементов получены решения осесимметричных задач термовязкопластичности для слоистых (составных) тел вращения произвольного меридионального сечения. В этих работах предполагается, что на общих границах различных частей тела выполняются условия идеального термосилового контакта и деформирование происходит без скольжения и отрыва его отдельных частей, изготовленных из различных материалов. Используя определяющие уравнения в форме (2.75), решение строится в цилиндрической системе координат z, r, φ на основе вариационного уравнения Лагранжа (3.11), в котором в случае осесимметричной задачи термовязкопластичности необходимо положить равными нулю компоненты K_φ и $t_{n\varphi}$ объемной и поверхностной нагрузок, а также u_φ , $\varepsilon_{z\varphi}$ и $\varepsilon_{r\varphi}$. Присоединяя к этому вариационному уравнению соотношения Коши и кинематические граничные условия, получаем полную систему уравнений, которая позволяет поэтапно проследить весь процесс деформирования тела и определить перемещения, деформации и напряжения в произвольной точке тела.

Для определения стационарных значений функционала (3.11) область F меридионального сечения тела разбиваем N узловыми точками на M треугольных конечных элементов. Тогда контур, ограничивающий эту область, будет разбит на N_1 участков, представляющих собой стороны треугольников, совпадающих с контуром. Разбивку осуществляем таким образом, чтобы каждый элемент соответствовал только одному материалу. За основные неизвестные принимаем значения компонентов перемещений в узловых точках.

Предполагаем, что в пределах каждого конечного элемента с номерами вершин i, j, k компоненты перемещения могут быть с достаточной точностью аппроксимированы линейными функциями

$$u_\alpha = a_1^\alpha + a_2^\alpha z + a_3^\alpha r \quad (\alpha = z, r), \quad (5.5)$$

где $a_1^\alpha, a_2^\alpha, a_3^\alpha$ – постоянные коэффициенты. Они выражаются через перемещения $u_{\alpha i}, u_{\alpha j}, u_{\alpha k}$ вершин элемента следующим образом:

$$a_p^\alpha = \frac{a_{pc}^{(m)} u_{ac}}{2F_m^*} \quad (c = i, j, k); \quad \langle p = 1, 2, 3; \alpha = z, r; m = 1, 2, \dots, M \rangle. \quad (5.6)$$

Постоянные $a_{pc}^{(m)}$ и F_m^* , входящие в (5.6), выражаются через координаты вершин элемента с помощью соотношений

$$a_{1i}^{(m)} = z_j r_k - z_k r_j; \quad a_{2i}^{(m)} = r_j - r_k; \quad a_{3i}^{(m)} = z_k - r_j \quad ((i, j, k));$$

$$2F_m^* = z_i(r_j - r_k) + z_j(r_k - r_i) + z_k(r_i - r_j). \quad (5.7)$$

Заменяя интегрирование по площади F и контуру L суммой соответствующих интегралов по площади F_m элементов и сторонам L_i , совпадающих с контуром L_i области, после подстановки значений перемещений (5.5) и деформаций, полученных согласно соотношениям Коши, в (3.11) и предположения, что компоненты поверхностной нагрузки изменяются между узлами линейно, выражение для функционала \mathcal{E} представляется в виде функции дискретных значений компонентов перемещения в узловых точках рассматриваемой разбивки области на конечные элементы. Для их определения из условия экстремальности этого выражения получим систему $2N$ линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M (B_{zp}^{zi(m)} u_{zp} + B_{rp}^{zi(m)} u_{rp}) = D_{zi};$$

$$\sum_{m=1}^M (B_{zp}^{ri(m)} u_{zp} + B_{rp}^{ri(m)} u_{rp}) = D_{ri} \quad (p = i, j, k), \quad \langle i = 1, 2, \dots, N \rangle, \quad (5.8)$$

где для m -го треугольного элемента с вершинами i, j, k введены обозначения

$$B_{zj}^{zi(m)} = \frac{1}{4F_m^2} \int_{F_m} ((2G' + \lambda') a_{2i} a_{2j} + G' a_{3i} a_{3j}) r dz dr;$$

..... (5.9)

$$B_{rj}^{ri(m)} = \frac{1}{4F_m^2} \int_{F_m} [((2G' + \lambda') a_{3i} a_{3j} + \Delta_{1i} \Delta_{1j}) + G' a_{2i} a_{2j} + \lambda' (a_{3i} \Delta_{1j} + a_{1i} a_{3j})] r dz dr;$$

$$D_{zi} = \sum_{m=1}^M \frac{1}{2F_m^*} \int_{F_m} [\sigma_{zz}^* a_{2i} + \sigma_{zr}^* a_{3i} + K_z z \Delta_{1i}] r dz dr + \sum_{i=1}^{N_i} \frac{l_{ij}}{12} \text{sign} F_m^* [t_{nz_i} (3r_i + r_j) + t_{nz_j} (r_i + r_j)]; \quad (5.10)$$

.....

$$F_m = |F_m^*|; \quad \Delta_{1j} = a_{3j} + a_{2j} \frac{z}{r} + a_{1j} \frac{1}{r}; \quad l_{ij} = \sqrt{(z_i - z_j)^2 + (r_i - r_j)^2}. \quad (5.11)$$

Недостающие коэффициенты могут быть получены из (5.10) заменой индекса j , соответственно, на i или k . Определив в результате решения системы (5.8) компоненты узловых перемещений, а следовательно и распределение компонентов перемещений (5.5) в каждом конечном элементе, получим согласно соотношениям Коши компоненты тензора деформации, а затем по формулам (2.75) вычислим и компоненты напряжений для каждого конечного элемента.

Пользуясь данной методикой, можно осуществить процесс последовательных приближений по вычислению компонентов перемещений, деформаций и напряжений

в теле вращения, находящемся под действием заданных внешних сил и неравномерного нагрева. Процесс последовательных приближений в элементах тела на отдельном этапе нагружения осуществляем так, как это описано ранее в §2 для различных траекторий деформирования. При этом линеаризация определяющих уравнений термовязкопластичности при решении конкретных задач осуществлена методом упругих решений, методом переменных параметров упругости или методом дополнительных напряжений.

Изложенная методика была применена к решению конкретных задач термовязкопластичности для различных элементов машиностроительных конструкций. В частности, исследовано напряженно-деформированное состояние: коротких полых и сплошных цилиндров, находящихся под действием кольцевой нагрузки или неравномерного нагрева [45, 94, 114]; ротора пятой ступени низкого давления турбины К-300-240 [45, 90]; цельнокованого ротора газовой турбины при ее запуске [42, 94]; поршня двигателя внутреннего сгорания [64]; определены напряжения натяга при посадке толстого диска на вал [46] и исследована их релаксация в процессе эксплуатации [26, 44]; определены напряжения в седле клапана вдува ракетного двигателя как двухслойного тела вращения при его неравномерном нагреве посредством конвективного теплообмена с окружающей средой [69]; исследовано напряженное состояние заслонки клапана вдува ракетного двигателя при ступенчатом законе изменения во времени условий нагружения и нагрева [32, 67, 144, 146]; рассмотрено термонапряженное состояние диска турбины газотурбинного двигателя транспортного самолета [91] и диска турбины реактивного двигателя истребителя [66] при учете переменности термосилового нагружения на всем промежутке времени от взлета до посадки и др.

Анализ результатов исследования напряженно-деформированного состояния в заслонке клапана, а также в дисках турбин показал, что учет истории нагружения существенно влияет на значения и характер изменения напряжений вблизи поверхностей подвода тепла, где результаты, полученные с учетом истории нагружения и без ее учета, отличаются между собой не только величиной, но и знаком. В частности, в области обода диска на 300 сек нагрева учет истории нагружения приводит к уменьшению окружных напряжений почти в 2 раза, а на внешней поверхности заслонки клапана вдува учет возникающей разгрузки приводит к появлению на внешней поверхности растягивающих напряжений, по абсолютной величине равных или даже превышающих величину сжимающих напряжений, полученных без учета истории нагружения.

При решении конкретных задач особое внимание уделялось также анализу применимости использованных уравнений состояния к описанию исследуемых процессов неизоэрического нагружения, что осуществлялось путем построения траекторий деформирования в пятимерном пространстве Ильющина [21] и анализу их формы. Разработанные методики и алгоритмы решения осесимметричных задач термопластичности были реализованы в виде пакетов прикладных программ [18, 35, 54, 74, 94], отличающихся используемыми уравнениями состояния и различным уровнем автоматизации при проведении расчетов и представлении результатов.

В качестве примера представим результаты исследования осесимметричного термовязкопластического состояния диска турбины газотурбинного двигателя транспортного самолета [67, 95], половина меридионального сечения которого приведена на рис. 4. Расчеты были проведены с использованием соотношений теории термовязкопластичности, описывающей процессы нагружения по траекториям деформирования малой кривизны как с учетом, так и без учета возникающих при этом деформаций ползучести.

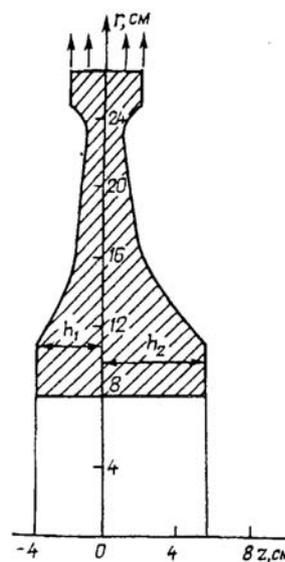


Рис. 4

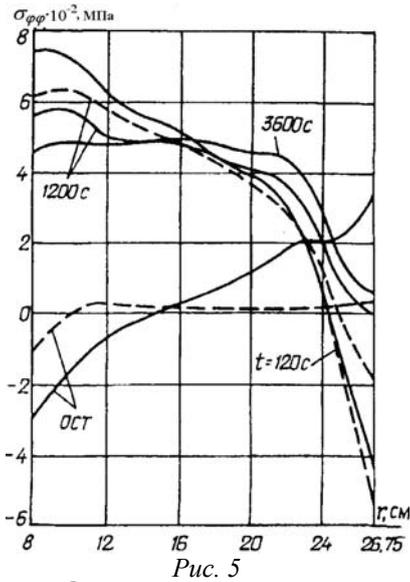


Рис. 5

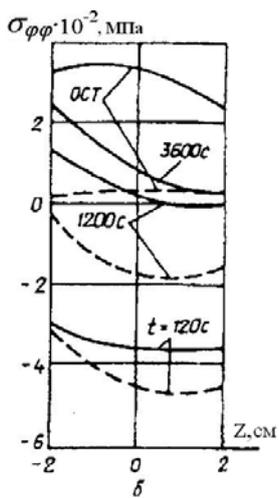
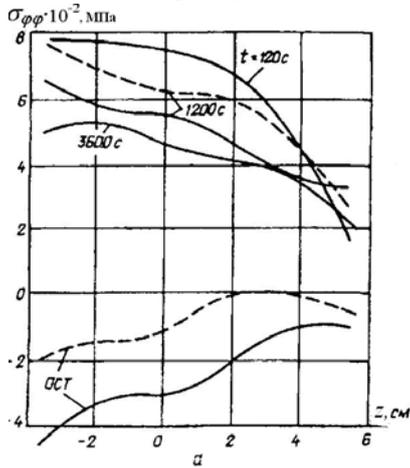


Рис. 6

Предполагалось, что в начальный момент времени диск находился при температуре $T_0 = 20^\circ \text{C}$ в естественном ненапряженном состоянии, а затем подвергался действию объемных и поверхностных сил, вызванных его вращением и неравномерным нагревом набегающим газовым потоком. Температура газа со стороны лопаток максимальна и равна 750°C , на боковой поверхности диска при $z = -h_1(r)$ температура равна 350°C , а при $z = h_2(r) - 550^\circ \text{C}$. Коэффициенты теплоотдачи на боковых поверхностях одинаковы и равны $0,02$, а на ободе диска — $0,1 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{К})$. Угловая скорость диска изменялась во времени до 60-й сек по линейному закону, а затем оставалась постоянной и равной 1150 сек^{-1} . Действие на обод диска отброшенных лопаток при расчете заменялось изменяющейся по времени равномерно распределенной нагрузкой, которая на 60-й сек также достигала своего максимального значения 120 МПа . Диск турбины изготовлен из стали ЭИ437, механические характеристики которой приведены в [96]. Разбивка меридионального сечения диска осуществлялась неравномерно со сгущением сетки конечных элементов к ободе диска и в местах резкого изменения геометрии. Распределение температуры в разные моменты времени определялось путем решения соответствующей нестационарной задачи теплопроводности [35, 54, 91, 95].

Анализ возникающих в диске температурных полей показывает, что на начальной стадии нагрева изменение температуры по толщине носит явно выраженный нелинейный характер с постепенным выравниванием температуры по мере прогрева. Стационарное распределение температуры наступает на 1200 сек , при этом максимальный перепад температуры по радиусу становится равным 285° , а по толщине — 450° . При вычислении напряжений весь исследуемый процесс разбивался на этапы различной продолжительности.

Распределение в меридиональном сечении диска напряжений показано на рис. 5–7, где приведены эпюры окружных $\sigma_{\phi\phi}$ (рис. 5, 6) и радиальных σ_{rr} (рис. 7) напряжений в диске с учетом деформаций ползучести (сплошные линии), а также без их учета (штриховые линии) для разных моментов времени. При этом штриховые линии для $t = 1200 \text{ сек}$ и 3600 сек совпадают. Там же приведены эпюры остаточных напряжений в диске после снятия оборотов и медленного его остывания.

На рис. 5, 7 показано изменение напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{rr} в диске при $z = 0$, а на рис. 6 – изменение по толщине диска окружных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ вблизи внутренней цилиндрической поверхности ($r = 8,5$ см) и обода диска ($r = 26,5$ см).

Расчеты свидетельствуют, что учет деформаций ползучести на стационарном участке нагружения приводит к увеличению окружных напряжений в области обода диска в 3,5 раза. При этом за счет ползучести диаметр диска увеличивается на 0,54 мм.

Проекции траектории деформирования на плоскость $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ пятимерного пространства Ильюшина [21, 93] для трех точек меридионального сечения диска приведены на рис. 8: 1 – для точки с координатами $z = 0$, $r = 8$ см, лежащий на внутренней поверхности диска; 2 – для точки с $z = 17,06$ см, лежащей посередине полотна диска; 3 – для точки с $z = 26,75$ см, на обода диска. Ввиду малости величин \mathcal{E}_3 проекции на другие плоскости не приведены.

Анализируя приведенные траектории, установлено, что на внутренней поверхности диска (кривая 1) наблюдается процесс нагружения, близкий к простому. В области обода диска (кривая 3) траектория деформирования до 240 сек работы двигателя является траекторией малой кривизны, а затем наступает разгрузка. Радиус кривизны траектории деформирования в средней части полотна диска (кривая 2), соответствующей промежутку процесса нагружения $t = 240$ сек – 600 сек, значительно меньше следа запаздывания векторных свойств рассматриваемого материала. Это указывает на то, что полученные результаты в этом промежутке исследуемого процесса нагружения являются приближенными и необходимо учитывать запаздывание векторных свойств материала, из которого изготовлен диск. Для остальных моментов времени применяемые в расчете соотношения теории термовязкопластичности с достаточной точностью описывают рассматриваемый процесс нагружения.

Для оценки влияния учета вида напряженного состояния на результаты решения задачи пластичности было исследовано напряженное и деформированное состояние конического диска под действием центробежных сил, половина меридионального сечения которого показана на рис. 9. В качестве материала диска выбран металл, который по своим упругим механическим характеристикам близок к чугуна СЧ 12-28 с плотностью $\gamma / g = 0,785$ Па $\text{с}^2/\text{см}^2$.

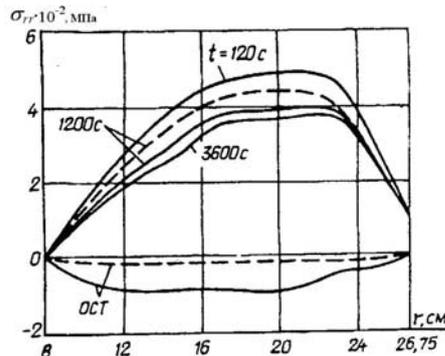


Рис. 7

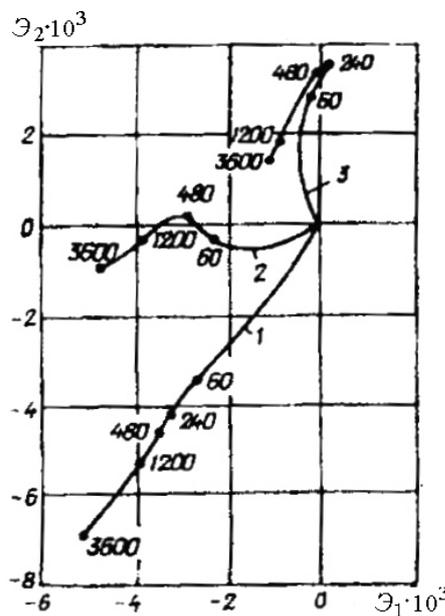


Рис. 8

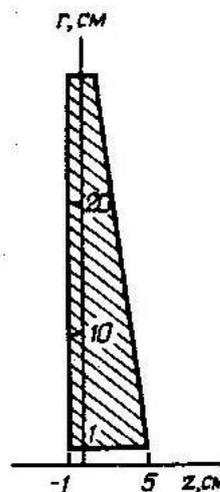


Рис. 9

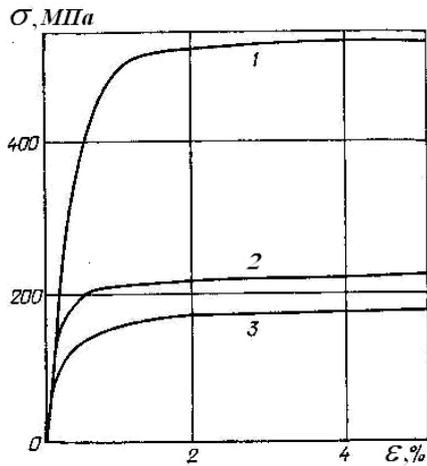


Рис. 10

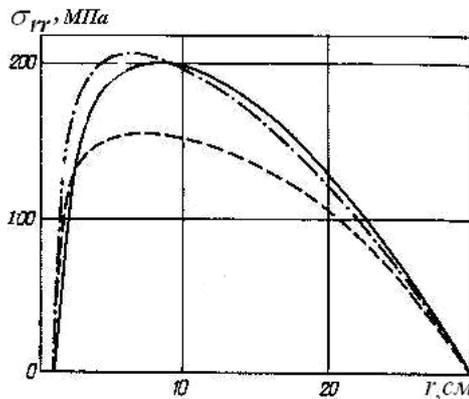


Рис. 12

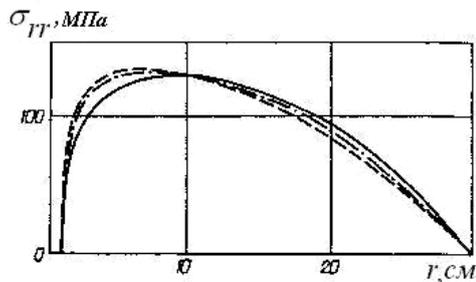


Рис. 14

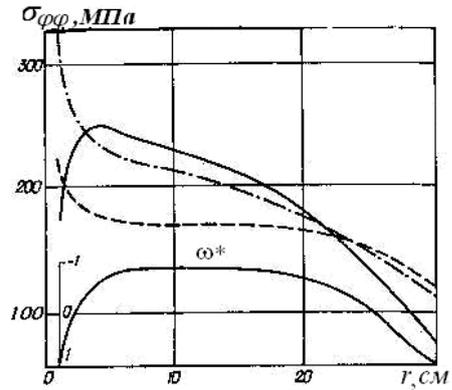


Рис. 11

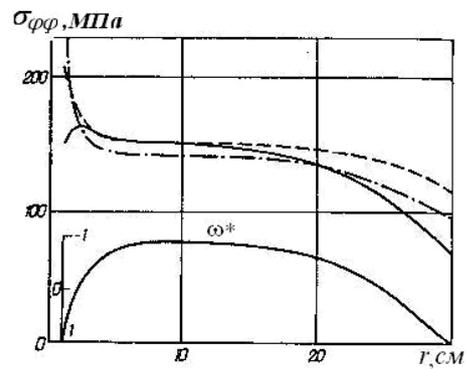


Рис. 13

Его упругие свойства при различных углах вида напряженного состояния в расчетах приняты следующими [1, 41]: при растяжении – $E = 9,326 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,25$; при кручении – $E = 10,878 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,25$; при сжатии – $E = 10,878 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,25$. Диаграммы $\sigma - \varepsilon$, полученные в результате сжатия, кручения или растяжения цилиндрических образцов из рассматриваемого материала, приведены на рис. 10 (соответственно кривые 1, 2, 3).

При температуре 20°C диск находится в не напряженном состоянии, а затем подвергается действию объемных сил,

вызванных его вращением с угловой скоростью $836,76 \text{ сек}^{-1}$. Выход диска на заданное число оборотов осуществляется таким образом, что в нем имеют место активные процессы нагружения по прямолинейным траекториям деформирования. Это предположение позволяет решить задачу пластичности за один этап.

Напряжения в диске распределены таким образом, что угол вида напряженного состояния существенно изменяется по радиусу.

Проведены также расчеты с использованием различных диаграмм, полученных при растяжении цилиндрических образцов, при кручении и при сжатии. Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 11 – 16. На этих рисунках сплошные кривые соответствуют расчету с учетом вида напряженного состояния, штриховые – расчету с использованием только диаграмм растяжения образцов, а штрих-пунктирные – расчету с использованием только диаграмм, полученных при сжатии образцов. Изме-

ние по радиусу диска окружных и радиальных напряжений показано на рис. 11 – 14 (на рис. 11, 12 – вблизи поверхности $z = -1$ см., а на рис 13, 14 – в срединной плоскости диска). Изменение по радиусу параметра вида напряженного состояния $\omega^* = 3\sqrt{3} I_3 / 2S^3$ показано на рис. 11, 13. На рис. 15 показано изменение напряжений по толщине диска при $r = 2,5$ см.

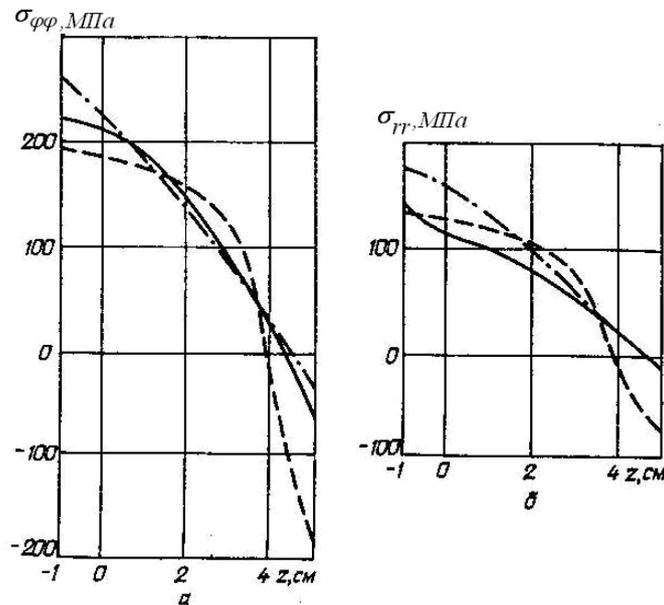


Рис. 15

Анализ результатов показал, что использование в расчетах диаграмм деформирования, соответствующих разному виду напряженного состояния, приводит к существенному различию результатов. В частности, если компоненты напряжений $\sigma_{\varphi r}$ при этом могут отличаться почти в два раза (рис. 11), то компоненты пластических деформаций – почти на порядок (рис. 16). На рис. 16 приведены кривые изменения по толщине интенсивности пластических деформаций при $r = 2,5$ см, полученные в расчетах с учетом вида напряженного состояния и при использовании только диаграмм растяжения.

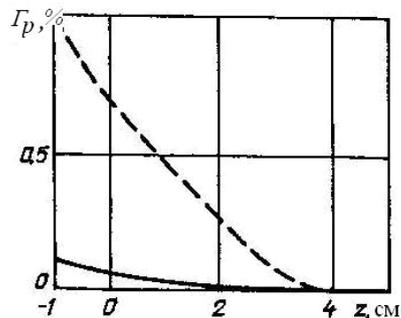


Рис. 16

Также была проведена оценка скорости сходимости процесса последовательных приближений при решении краевой задачи по предложенной методике и по общепринятой. В частности, при расчете напряженного состояния диска с использованием только диаграмм растяжения в первом случае процесс последовательных приближений сошелся после 41 приближения, а во втором случае – после 79.

Таким образом, учет третьего инварианта тензора девиаторов напряжений при исследовании напряженно-деформированного состояния составных тел вращения приводит к существенному уточнению решения соответствующей краевой задачи теории пластичности.

Для апробации предложенной в §2 методики учета в расчетах повреждений материала было исследовано напряженно-деформированное состояние и проведена оценка прочности диска турбины реактивного двигателя истребителя с учетом системы

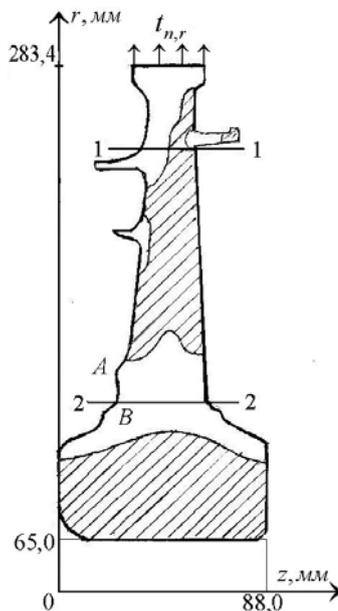


Рис. 17

сил [66], которые действуют на диск от взлета самолета до его посадки. Расчетная схема такого расчета приведена на рис. 17.

В начальный момент времени диск находится при температуре 20°C . Затем он подвергается воздействию объемных сил, которые возникают при вращении диска, и действию равномерно распределенных по ободу диска поверхностных сил, величина которых определяется воздействием отброшенных лопаток. Величина поверхностных сил зависит от числа оборотов следующим образом: $t_{nr} = 174 (n/n_{\max})^2$ МПа, где n , n_{\max} – соответственно текущее значение числа оборотов и его максимальное значение, которое равняется в данном случае 13300 об/мин.

Программа изменения во времени числа оборотов на протяжении цикла между взлетом и приземлением самолета приведена на рис. 18. Температурное поле для этого же промежутка времени для нескольких значений радиуса было получено экспериментально при помощи термодатчиков. Температура для других значений радиуса определялась путем линейной интерполяции. Предполагалось, что температура по толщине диска постоянная.

На поверхности АВ (рис. 17) задавались граничные условия, которые не позволяли смещению диска вдоль оси вращения (осевые перемещения u_z и касательные напряжения t_{zr} принимались равными нулю).

На поверхности АВ (рис. 17) задавались граничные условия, которые не позволяли смещению диска вдоль оси вращения (осевые перемещения u_z и касательные напряжения t_{zr} принимались равными нулю).

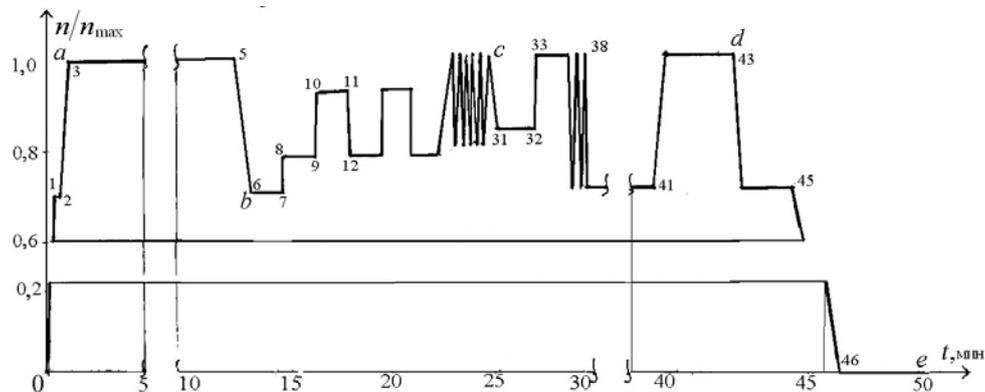


Рис. 18

Весь промежуток времени между взлетом самолета и его приземлением разбивался в соответствии с программой изменения оборотов диска на 48 этапов. При этом на последнем этапе обороты были равными нулю при достаточно высокой температуре диска. Остаточные напряжения и перемещения были определены после полного остывания двигателя при $n = 0$ и температуре диска $T = 20^\circ\text{C}$. Номера этапов отмечены цифрами на рис. 18.

Проведенные расчеты показали, что пластические деформации в диске возникают уже в момент времени, который на рис. 18 обозначен буквой *a*, в сечении 1-1 (рис. 17) возле правой боковой поверхности диска. Со временем работы двигателя они распространяются вглубь. На рис. 17 заштрихована та часть поперечного сечения диска, где имеют место пластические деформации на протяжении всего цикла нагружения, т.е. до 48 этапа. По форме области пластичности можно сделать вывод, что под действием вращения и приложенного поверхностного нагружения происходит изгиб диска.

Температура диска и время работы двигателя на протяжении одного цикла такие, что деформации ползучести почти не развиваются. А как отмечено в работе [53], расчеты с учетом деформаций ползучести имеет смысл проводить тогда, когда деформации будут превышать мгновенные деформации более, чем на 10%.

Некоторые результаты расчета представлены на рис. 19, 20. На рис. 19 приведены графики радиальных и окружных напряжений в сечении 1-1 (а) и 2-2 (б) для моментов времени, которые на рис. 18 обозначены буквами *b*, *d*, *e*. Там же штриховыми линиями изображены остаточные напряжения после полного остывания диска в первом цикле нагружения.

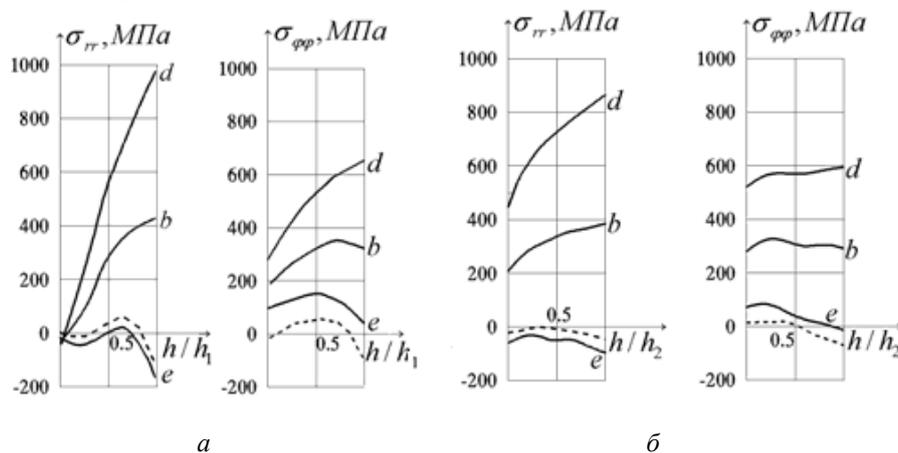


Рис. 19

Распределение остаточных радиальных *u* и осевых *w* перемещений на поверхности обода диска (а) и на поверхности центрального отверстия (б) показано на рис. 20. На этих рисунках h_1, h_2, h_3, h_4 обозначают толщину диска в сечениях 1-1 и 2-2, а также на обода диска и отверстия, соответственно.

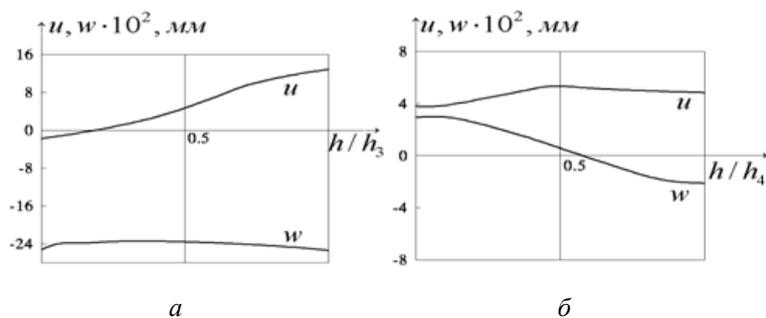


Рис. 20

Для оценки изменения напряженно-деформированного состояния с ростом числа циклов нагружения были проведены расчеты поведения диска при нагружении по упрощенной программе. Упрощение программы проводилось таким образом, что на этапах 18 – 30 и 34 – 39 исключались отрезки, на концах которых значения числа оборотов одинаковое и разница температуры меньше 5 – 7 градусов. Такие отрезки при проведении расчетов заменялись одной точкой с температурой, средней на отрезке. Результаты таких расчетов в трех циклах нагружения посередине меридионального сечения диска на внутреннем отверстии приведены ниже в таблице (деформация $\epsilon_{\varphi\varphi}$ и интенсивность деформаций сдвига Γ приведены в процентах, а напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ и интенсивность касательных напряжений S – в МПа).

Номер этапа	1-й цикл нагружения				2-й цикл нагружения				3-й цикл нагружения			
	$\varepsilon_{\text{фр}}$	Γ	$\sigma_{\text{фр}}$	S	$\varepsilon_{\text{фр}}$	Γ	$\sigma_{\text{фр}}$	S	$\varepsilon_{\text{фр}}$	Γ	$\sigma_{\text{фр}}$	S
41	0,5364	0,1410	331	207	0,5946	0,2034	121	79	0,5990	0,2076	117	77
42	0,8491	0,3876	683	423	0,8755	0,4145	623	388	0,8795	0,4184	618	385
43	0,9752	0,4600	736	452	0,9784	0,4682	737	455	0,9800	0,4698	736	456
44	0,6831	0,2840	318	196	0,7469	0,2882	314	194	0,7469	0,2890	313	193

Из приведенных результатов видно, что учет цикличности нагружения проявляется только во втором и третьем циклах. Уже в четвертом цикле влияние предварительно накопленных пластических деформаций не проявляется.

Результаты этих исследований свидетельствуют о том, что напряженно-деформированное состояние вблизи обода и в ступице диска имеют ярко выраженный пространственный характер. Поэтому исследование состояния диска на основе плоской теории или теории оболочек приведет к существенным погрешностям. Еще большую погрешность в результаты внесет неучет изменения числа оборотов диска в процессе работы двигателя при полете. В то же время при повторном нагружении диска, т.е. при дальнейшей работе двигателя по той же самой программе, уже после третьего цикла напряженно-деформированное состояние стабилизируется. Оценка прочности при работе диска по данной программе свидетельствует о том, что отношение максимального значения интенсивности касательных напряжений к величине допустимого значения не достигает 0,6 – 0,7. Это указывает на достаточный запас прочности диска.

§6. Неосесимметричные задачи нестационарной теплопроводности и задачи термовязкопластичности для составных элементов конструкций из изотропных и анизотропных материалов.

Рассмотрим цикл работ, в которых решения трехмерных задач термовязкопластичности строятся с помощью полуаналитического метода конечных элементов. Этот подход к решению неосесимметричной задачи термовязкопластичности для изотропных тел вращения сложного меридионального сечения реализован в работах [15 – 17, 61, 64, 91, 95, 108, 126, 137 и др.]. В этих работах представлены результаты исследования напряженно-деформированного состояния: коротких полых цилиндров, находящихся под действием кольцевой нагрузки или неравномерного нагрева, изменяющихся в окружном направлении [16, 95, 108]; заслонки клапана вдува ракетного двигателя при неосесимметричном нагреве [16]; седла клапана вдува ракетного двигателя как двухслойного [15, 16], так и трехслойного тела вращения [137] при неосесимметричном нагреве; составного в окружном направлении тела вращения [126] и др.

В качестве примера представим результаты исследования напряженно-деформированного состояния седла клапана вдува ракетного двигателя как трехслойного изотропного тела вращения в процессе его нагрева от начальной температуры 20°C за счет конвективного теплообмена с окружающей средой температуры $\theta = 3000(1 + 0,1 \cos \varphi)^\circ\text{C}$. Половина меридионального сечения изображена на рис. 21.

Механические и теплофизические характеристики материалов слоев приведены в работе [137]. Принято, что поверхность тела на участке ADC теплоизолирована; коэффициент теплоотдачи между средой и поверхностью тела на участке АВ задан изменяющимся по линейному закону от 0 в точке А до 0,35 Вт/см² в точке В, а на участке ВС – постоянным и равным 0,35 Вт/см². Температурное поле тела в процессе нагрева определялось путем решения нестационарной задачи теплопроводности по методике [67, 91, 93]. При

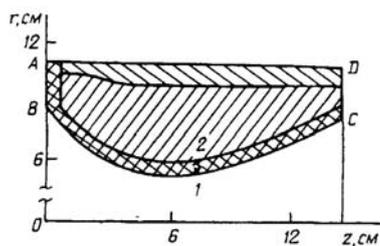


Рис. 21

решении задачи меридиональное сечение тела было разбито на 1508 треугольных конечных элементов. В тригонометрических рядах (4.13) использовано 5 членов, т.е. в каждом приближении произвольного этапа нагружения задача сведена к решению пяти линейных систем алгебраических уравнений 2391 порядка, которые решаем методом Гауса. В качестве уравнений состояния были использованы соотношения термовязкопластичности, описывающие процессы деформирования по траекториям малой кривизны. При их линеаризации использована как предложенная методика построения последовательных приближений, так и традиционная.

Расчеты напряженно-деформированного состояния тела были проведены на 30 этапах нагружения с переменным шагом по времени нагрева: на этапах 1 – 4 шаг принимался равным 0,05 сек, на 5 – 7 этапах – 0,1 сек, на 8 – 16 этапах – 0,25 сек, на 18 – 30 этапах – 0,5 сек. Очень мелкий шаг в начале исследуемого процесса был выбран в связи с тем, что в теле у внутренней поверхности за счет контакта со средой очень высокой температуры в соседних элементах тела возникают значительные температурные градиенты. Анализ результатов расчетов (рис. 22) напряженно-деформированного состояния показал, что в покрывающей внутреннюю часть тела оболочке возникают значительные пластические деформации: интенсивность накопленных пластических деформаций сдвига в окрестности точки 1 меридионального сечения тела в конце исследуемого процесса достигает 1,5%, а ее рост происходит аналогично росту температуры. В окрестности точки 2 интенсивность накопленных пластических деформаций ниже и достигает 0,4%. Их изменение в процессе нагрева в точках 1, 2 приведено на рис. 22.

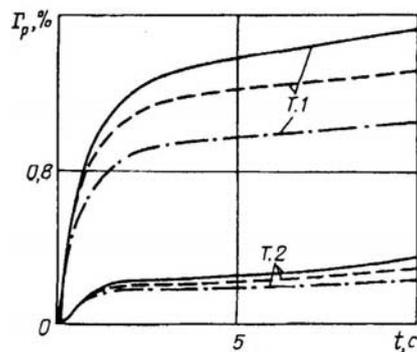


Рис. 22

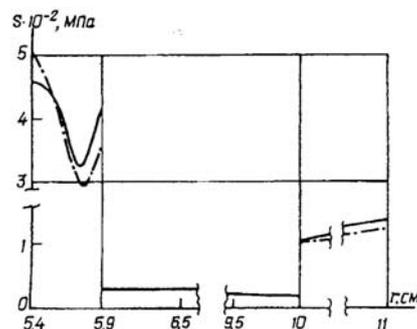


Рис. 23

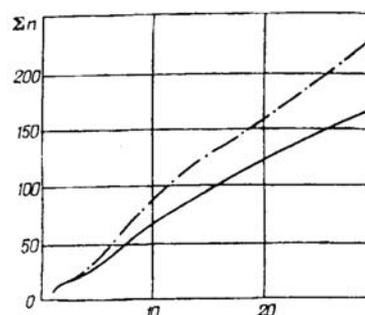


Рис. 24

Изменение интенсивности касательных напряжений в сечении тела, проходящем через точки 1 и 2 перпендикулярно оси вращения, на 10 сек нагрева приведено на рис. 23. На этих рисунках сплошные кривые соответствуют $\varphi = 0$, штриховые – $\varphi = \pi/2$, штрихпунктирные – $\varphi = \pi$. Отсутствие штриховых или штрихпунктирных линий на рис. 23 указывает на то, что они совпадают со сплошными.

На рис. 24 показано суммарное количество последовательных приближений Σn , необходимое для решения задачи по двум методикам с заданной точностью 1%, в зависимости от номера этапа l . Сплошная кривая на этом рисунке соответствует модифицированной методике, а штрихпунктирная – общепринятой. Как следует из полученных результатов, изменение способа вычисления приращения интенсивности пластических деформаций позволяет уменьшить общее количество приближений на 30 этапах нагружения с 235 до 170, т.е. более чем на 25%.

Таким образом, сопоставление результатов расчетов по двум методикам линеаризации уравнений состояния позволяет сделать вывод о целесообразности применения предложенного способа модификации метода дополнительных напряжений к реше-

нию неосесимметричных пространственных задач термопластичности, требующих для своего решения длительной работы компьютера.

Использование композитных материалов в многослойных элементах носовой части спускаемых космических аппаратов, в сопловых блоках ракет, в параболических антеннах спутников связи и др. потребовало разработки эффективных алгоритмов и численных методов исследования термонапряженного состояния многослойных (составных) тел вращения из изотропных и анизотропных материалов при неосесимметричном силовом нагружении и нагреве. Для этого, как и в случае изотропных материалов, решение неосесимметричных задач осуществлено на основе полуаналитического метода конечных элементов [36, 61, 91, 95, 131 и др.].

Для проверки точности предложенного метода исследования напряженно-деформированного состояния тел вращения из ортотропных материалов рассмотрены тестовые задачи [141], для которых существуют аналитические решения, полученные другими авторами.

Известно [32, 129], что напряженное состояние вращающегося сплошного тонкого прямолинейно ортотропного диска, находящегося в условиях плоского напряженного состояния, является осесимметричным и в цилиндрической системе координат определяется соотношениями

$$\sigma_{rr} = \frac{\omega^2 \rho R^2}{2} (1 - \beta) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right); \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + \omega^2 \rho \beta r^2,$$

где ω – угловая скорость диска, R – его внешний радиус.

Анизотропия механических характеристик материала диска характеризуется безразмерным параметром

$$\beta = \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} \right) / \left(\frac{3}{E_x} + \frac{3}{E_y} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} + \frac{1}{G_{xy}} \right).$$

Также рассмотрено напряженное состояние тонкой прямолинейно ортотропной круглой пластины, вызванное неравномерным осесимметричным нагревом. В случае плоского напряженного состояния, когда температура пластины изменяется по квадратичному закону и $E_x = E_y$; $\alpha_{xx}^T = \alpha_{yy}^T$, в нем реализуется осесимметричное напряженное состояние, которое в цилиндрической системе координат определяется соотношениями [120]

$$\sigma_{rr} = \beta \frac{E_x \alpha_{xx}^T T_1}{(1 - \nu_{xy})} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right); \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \beta \frac{E_x \alpha_{xx}^T T_1}{1 - \nu_{xy}} \left(1 - \frac{3r^2}{R^2} \right); \quad \left[\beta = (1 - \nu_{xy}) / \left(3 - \nu_{xy} + \frac{E_x}{2G_{xy}} \right) \right].$$

Сравнение результатов свидетельствует об удовлетворительном совпадении вычисленных напряжений с точным решением, что позволяет применять разработанную методику к расчету термонапряженного состояния конкретных элементов конструкций в виде ортотропных тел вращения.

Решению такого класса задач по определению термонапряженного состояния тел вращения посвящены работы [93, 125, 131, 132, 136, 137, 139, 149, 150, 151 и др.]. В этих работах рассмотрены криволинейно ортотропные материалы двух типов: анизотропный, в котором одно из главных направлений анизотропии совпадает с направлением оси φ цилиндрической системы координат, а два других расположены в плоскости $z\theta r$ и повернуты вокруг координатного направления φ на некоторый угол, а также цилиндрически ортотропные материалы, в которых главные оси анизотропии совпадают с направлениями цилиндрической системы координат и прямолинейно ортотропные материалы, одна из главных осей анизотропии которых совпадает с осью вращения тела.

Исследовано напряженно-деформированное состояние составного цилиндрического элемента конструкции в месте соединения изотропного и криволинейно ортотропного материалов при действии внутреннего давления и осевого ускорения [93, 150]. Также было исследовано: термонапряженное состояние двухслойного сплошного цилиндра, внутренний слой которого изготовлен из изотропного материала, а внешний – из цилиндрически ортотропного, при неосесимметричном нагреве [131]; термоупругопластическое состояние трехслойного элемента конструкции сложного меридионального сечения, в котором внешний слой изготовлен из цилиндрически ортотропного материала, а два других – из изотропных материалов при неосесимметричном нагреве [138]; неосесимметричное термонапряженное состояние седла клапана вдува ракетного двигателя как трехслойного тела вращения, в котором внутренний слой изготовлен из изотропного материала, средний слой – из углерод-углеродного композитного материала с прямолинейной ортотропией механических и теплофизических свойств, а внешний слой из цилиндрически ортотропного материала, при осесимметричном нагреве [125], а также неосесимметричном [139] и др.

В работе [125], в частности, показано, что при осесимметричных условия нагрева из-за переменности механических характеристик в окружном направлении, в прямолинейно ортотропном материале наблюдается существенная неосесимметричность как в распределении температуры, так и компонентов напряжений и деформаций. Возникающие при этом касательные напряжения σ_{zr} и $\sigma_{r\varphi}$ достигают уже на второй секунде нагрева около 10% величины максимальных значений нормальных напряжений σ_{zz} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ не только в углерод-углеродном композитном материале, но и в соседнем изотропном материале.

Если выше отмеченные работы посвящены исследованию напряженно-деформированного состояния составных тел вращения из неупруго деформирующихся изотропных материалов и упругих анизотропных, то в работе [149] приведены результаты исследования осесимметричного напряженно-деформированного состояния конструктивного элемента, представляющего собой тело вращения, состоящее из соединенных друг с другом (с помощью отрезка тонкостенной трубки) двух цилиндров из изотропного материала и цилиндрически ортотропного материала с нелинейной сдвиговой характеристикой при осевом силовом воздействии в трех режимах равномерной температуры.

В качестве примера представим результаты исследования [139] термонапряженного состояния седла клапана вдува ракетного двигателя, как трехслойного тела вращения (рис. 21), в котором внутренний слой оставался изотропным, а остальные материалы были заменены композитными: графит заменен углерод-углеродным композитным материалом, изготовленным путем плетения пространственного (в декартовой системе координат) каркаса из взаимно ортогональных углеродных волокон с последующим насыщением углеродом пространства между ними; внешняя цилиндрическая оболочка – цилиндрически ортотропным материалом. Условия нагружения и нагрева остаются такими же, как и в предыдущем примере. В расчетах принято, что углерод-углеродный композитный материал является однородным и прямолинейно ортотропным с главными направлениями осей декартовой системы координат. Теплофизические и механические характеристики материалов слоев приведены в работе [139]. Температурное поле на протяжении 30 сек от начала нагрева определено путем решения соответствующей задачи теплопроводности по методике [132]. Весь исследуемый процесс был разбит на 24 этапа нагружения с переменным шагом во времени: сначала с более мелким, а после 10-й секунды, когда градиенты во внутреннем слое существенно уменьшились, с шагом 5 секунд. На каждом этапе для описания деформирования изотропного материала использованы определяющие уравнения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны, линеаризованные методом дополнительных напряжений. При решении задачи использовано 11 членов в тригонометрических рядах (4.13). В результате расчетов установлено, что в рассматриваемом

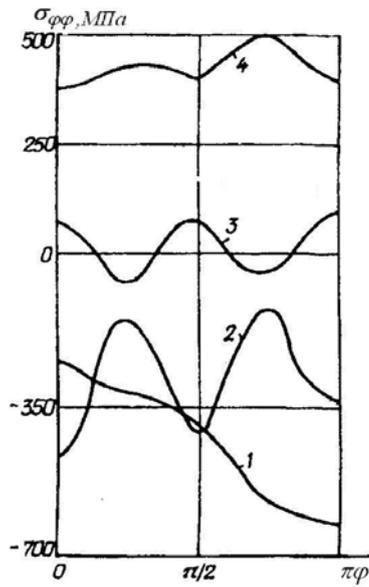


Рис. 25

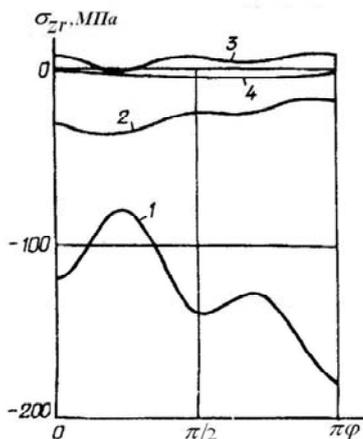


Рис. 26

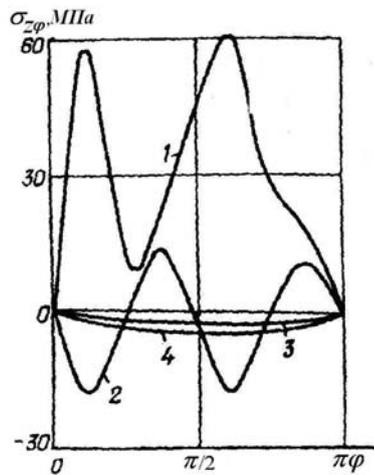


Рис. 27

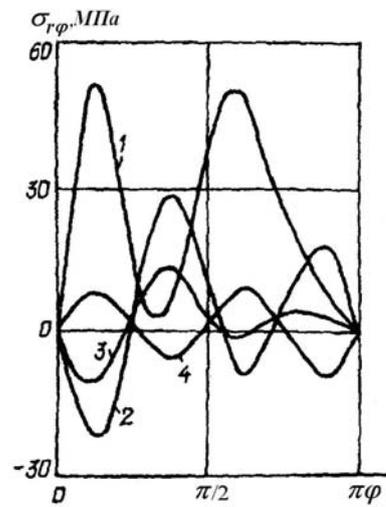


Рис. 28

элементе конструкции возникает трехмерное напряженно-деформированное состояние, в котором все шесть компонентов напряжений соизмеримы. Однако, при данных условиях нагрева и заданных свойствах материала слоев максимальными являются окружные напряжения $\sigma_{\phi\phi}$ и касательные напряжения $\sigma_{z\phi}, \sigma_{r\phi}$, вызванные в основном наличием прямолинейной ортотропии одного из материалов слоев. Некоторые результаты расчета напряженного состояния тела вращения при $z = 12,875$ см (рис. 21) после 30 сек нагрева приведены на рис. 25 – 28. На этих рисунках в виде кривых 1 – 4 показано изменение в окружном направлении нормальных $\sigma_{\phi\phi}$ и касательных напряжений $\sigma_{zr}, \sigma_{z\phi}, \sigma_{r\phi}$ в четырех точках при следующих значениях радиуса: точка 1 соответствует радиусу $r = 7,875$ см и расположена посередине внутреннего слоя, точки 2 и 3 расположены во втором материале при $r = 8,27$ см и $r = 9,35$ соответственно, точка 4 расположена во внешнем слое при $r = 10,25$ см (рис. 27, 28).

Анализ результатов расчетов показывает, что изменение в окружном направлении механических характеристик в углерод-углеродном материале приводит к существенному увеличению неосесимметричности напряженного состояния во всем теле. При этом учет влияния неосесимметричности условий нагрева оказывается меньше, чем учет ортотропии в углерод-углеродном материале. Возникающие при этом касательные напряжения $\sigma_{z\phi}$ и $\sigma_{r\phi}$ достигают в рассматриваемом сечении величин, соразмеримых с величинами σ_{rr} и σ_{zr} . Проведенный расчет напряженно-деформированного состояния рассматриваемого элемента конструкции на 30 сек

нагрева за один этап показал, что учет истории нагружения уточняет распределение компонентов напряжений во внутреннем изотропном слое примерно на 30 – 40% в сторону их уменьшения. В то же время в двух остальных слоях компоненты напряжений незначительно (до 10%) повышаются.

Заключение.

Таким образом, из анализа упомянутых выше работ следует, что в настоящее время разработаны эффективные численные методы решения трехмерных задач термовязкопластичности для различных элементов конструкций, изготовленных из изотропных и ортотропных материалов, при сложных неизоотермических процессах нагружения по прямолинейным траекториям и траекториям деформирования малой кривизны с учетом истории протекания этих процессов и деформаций ползучести.

При решении конкретных задач повышенное внимание уделено проверке адекватности используемых уравнений состояния исследуемым процессам, что осуществлялось путем анализа траекторий деформирования, построенных в пятимерном пространстве Ильюшина [21. 95].

Исследование в этих работах влияния учета истории нагружения, деформаций ползучести, вида напряженного состояния, а также применяемых уравнений состояния теории термовязкопластичности на результаты расчетов напряженно-деформированного состояния показало, что учет влияния истории нагружения может привести к качественно иному распределению напряжений и деформаций в теле, в то время как учет других факторов приводит, как правило, только к количественным изменениям в напряжениях и деформациях.

Результаты исследования напряженного состояния составных тел вращения, изготовленных из изотропных и ортотропных материалов, свидетельствуют о том, что прямолинейная ортотропия одного из материалов оказывает существенное влияние на напряженное состояние во всех частях тела. В частности, при осесимметричном нагреве слоистого тела вращения, один из слоев которого прямолинейно ортотропный, возникающие касательные напряжения $\sigma_{z\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$ оказываются соизмеримыми с другими напряжениями.

Применение разработанных методов к исследованию конкретных элементов конструкций получило свое воплощение на практике, являясь той научной предпосылкой, на основе которой усовершенствованы конструктивные формы исследуемых объектов, проведены работы по уменьшению материалоемкости, определены критические параметры неизоотермического нагружения и др.

Вместе с тем отметим ряд проблем термовязкопластичности, которые представляются, на наш взгляд, актуальными и могут составлять предмет для будущих исследований. К ним относятся следующие направления исследований:

- разработка методов решения задач термовязкопластичности на основе уравнений состояния, учитывающих геометрию траекторий деформирования элементов тела;
- разработка методов решения задач термовязкопластичности в области больших деформаций и решение технологических задач с учетом контактного взаимодействия;
- исследование динамических процессов в задачах термовязкопластичности;
- разработка методов решения задач термовязкопластичности слоистых анизотропных материалов с учетом разрушения отдельных слоев;
- разработка методов решения задач термовязкопластичности при повторно-переменном воздействии с учетом термомеханической связности материала и др.

РЕЗЮМЕ. Наведено методи і результати дослідження тривимірного в'язкопластичного напружено-деформованого стану елементів машинобудівних конструкцій при термосиловому навантаженні. Розглянуто наступні класи задач термов'язкопластичності: осесиметричні задачі; неосесиметричні задачі для тіл обертання; тривимірні задачі для тіл довільної форми; тривимірні задачі для ізотропних та анізотропних тіл обертання.

1. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. – М.: Наука. – 1982. – 320с.
2. Амелянчик А.В., Лантева В.Т., Мельникова З.Л., Струнина Е.Л. Расчет полей напряжений и перемещений в сварных соединениях трубопроводов при упругопластических деформациях и ползучести на ЭЦВМ «Урал-2» // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1969. – Вып. 8. – С. 171 – 176.
3. Амелянчик А.В., Лантева В.Т., Струнина Е.Л. Расчет на прочность цельнокованных многодисковых роторов тепловых турбин с помощью ЭВМ «Урал-2» // Динамика и прочность машин. – 1967. – Вып. 5. – С. 80 – 85.
4. Амелянчик А.В., Лантева В.Т., Струнина Е.Л. Решение двумерных осесимметричных задач теории упругости, упругопластических деформаций и ползучести на ЭВМ «Урал-2» // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 18 – 23.
5. Бабешко М.Е. Напряженное состояние короткого сплошного цилиндра при неизотермическом нагружении // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1971. – Вып. 11. – С. 121 – 127.
6. Бабешко М.Е. Термопластическое напряженное состояние коротких цилиндров с учетом истории нагружения: Автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. Ин-т механики им. С. П. Тимошенко НАНУ. – Киев, 1975. – 13 с.
7. Бабешко М.Е., Пискун В.В., Савченко В.Г., Шевченко Ю.Л. Исследование упругопластического состояния элементов машиностроительных конструкций при сложных неизотермических процессах нагружения // Общие задачи и методы исследования пластичности и вязкоупругости материалов и конструкций. – Свердловск, 1986. – С. 3 – 9.
8. Бабешко М.О., Савченко В.Г. Математичне моделювання експлуатаційного і граничного стану елементів у вигляді тіл обертання при повторному термосиловому навантаженні // Збірник наукових праць Дніпродзержинського держ. техн. ун-ту (технічні науки) / Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2015. – Вып. 1(26). – С. 3 – 9.
9. Бабешко М.Е., Савченко В.Г. Модификация методов последовательных приближений в краевых задачах термопластичности // Вестник нац. техн. ун-та ХПИ / Сб. научн. Трудов «Динамика и прочность машин». – 2002. – 9. – С. 39 – 42.
10. Бабешко М.Е., Стрюк В. К. Анализ упругопластического напряженного состояния коротких сплошных цилиндров при неравномерном нагреве // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1973. – Вып. 13. – С. 28 – 32.
11. Бабешко М.Е., Стрюк В.К. К расчету упругопластического напряженного состояния короткого сплошного цилиндра при неравномерном нагреве // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1974. – Вып. 14. – С. 28 – 33.
12. Бабешко М.Е., Стрюк В.К. Термопластическое напряженное состояние несимметрично нагруженного по длине цилиндра // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1975. – Вып. 15. – С. 49 – 53.
13. Бабешко М.Е., Стрюк В.К. Термопластичность цилиндров конечной длины // Вычисл. и прикл. математика. – 1982. – Вып. 48. – С. 119 – 127.
14. Бабешко М.Е., Стрюк В.К. Термоупругопластическое напряженное состояние составных цилиндров // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1978. – Вып. 18. – С. 40 – 43.
15. Бобырь В.И. Напряженное состояние клапана двигателя при неосесимметричном нагреве // Тр. XI науч. конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР. – К., 1986. – Ч. 3. – С. 439 – 443. – Деп. в ВИНТИ 28.07.86, № 5507–В86.
16. Бобырь В.И. Термоупругопластическое состояние тел вращения при неосесимметричных процессах нагружения по траекториям малой кривизны: Авторефер. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Ин-т механики им. С. П. Тимошенко НАНУ. – К., 1988. – 21 с.
17. Бобырь В.И., Ищенко Д.А. Неосесимметричное деформирование тел вращения при простых процессах нагружения // Неклассические и смешанные задачи механики деформируемого тела. Материалы семинара молодых ученых Института механики АН УССР. – К., 1985. – С. 6 – 8. – Деп. в ВИНТИ 29.07.85, № 5531–85ДЕП.
18. Бобырь В.И., Ищенко Д.А., Савченко В.Г., Сахацкая И.К. Программа исследования с учетом вторичных пластических деформаций осесимметричного упругопластического напряженно-деформированного состояния элементов конструкций при переменном силовом нагружении и нагреве. – К., 1986. – 130 с. – Зарег. в ФАН АН УССР 26.02.86, инв. № АП0092. – Вкл. в Госфонд, № 50860000641.
19. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: Физматлит, 2004 – 144 с.
20. Ильюшин А.А. Об одной теории длительной прочности // Изв. АН СССР. МТТ. – 1967. – № 3. – С. 21 – 35.
21. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.

22. *Ионов В.Н.* Расчет напряжений в цилиндрических телах произвольного поперечного сечения // Изв. вузов. Машиностроение. – 1959. – № 11. – С. 55 – 63.
23. *Ионов В.Н.* Об одном методе решения пространственных задач // Изв. вузов. Машиностроение. – 1960. – № 1. – С. 3 – 9.
24. *Ионов В.Н., Огибалов П.М.* Прочность пространственных элементов конструкций. – М.: Высш. шк., 1972. – 752 с.
25. *Ищенко Д.А.* Решение осесимметричной задачи термопластичности при циклическом нагружении // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 7. – С. 108 – 111.
26. *Ищенко Д.А.* Упругопластическое состояние тел вращения при циклическом осесимметричном тепловом и силовом нагружении: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Ин-т механики им. С. П. Тимошенко НАНУ. – К., 1984. – 21 с.
27. *Ищенко Д.А., Савченко В.Г.* Кинетика вязкопластического контактного взаимодействия диска с валом в роторе турбины // Пробл. прочности. – 1988. – № 4. – С. 21 – 24.
28. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
29. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 324 с.
30. *Ковальчук Б. И.* К теории пластического деформирования анизотропных материалов // Пробл. прочности. – 1975. – № 9. – С. 8 – 12.
31. *Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашувский В.П.* Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / Под ред. академика НАН Украины А.А.Лебедева. – К.: Издательский дом «Ин Юре», 2003. – 540 с.
32. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Наука, 1957. – 464 с.
33. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
34. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400с.
35. *Методические рекомендации «Метод и программа расчета на ЭВМ нестационарной теплопроводности и упругопластического напряженно-деформированного состояния элементов конструкций типа тел вращения при осесимметричных силовых и тепловых нагрузках»* / Сост. Ю.Н.Шевченко, В.Г.Савченко, Д.А.Ищенко. – К.: Ин-т механики АН УССР, 1988. – 42 с.
36. *Механика композитов: В 12-ти т/ Под общ. ред. А.Н.Гузя. Т.11. Численные методы* / Я.М.Григоренко, Ю.Н.Шевченко, ..., В.Г.Савченко и др. – К.: «А.С.К.», 2002. – 448 с.
37. *Наместников И.В., Шестериков С.А.* Векторное представление параметра поврежденности // Деформирование и разрушение твердых тел, – М.: Из-во МГУ, 1985 – С. 43 – 52.
38. *Павлычко В.М.* Решение трехмерных задач термопластичности при простых процессах нагружения // Пробл. прочности. – 1986. – № 1. – С. 77 – 81.
39. *Павлычко В.М.* Решение трехмерных задач термопластичности при простых процессах нагружения с учетом истории // Тр. X науч. конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР. – К., 1984. – С. 113 – 117. – Деп. в ВИНТИ 30.07.84, № 5535-84 Деп.
40. *Павлычко В.М.* Трехмерное термоупругопластическое напряженно-деформированное состояние тел сложной формы при простых процессах нагружения / Авторефер. дис.... канд. физматем наук. Ин-т механики им. С. П. Тимошенко НАНУ. – К., 1988. – 15 с.
41. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с.
42. *Пискун В.В., Савченко В.Г.* Изменение деформаций в роторе сложной формы при его упругопластическом деформировании // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1976. – Вып. 16. – С. 85 – 89.
43. *Пискун В. В., Савченко В.Г.* Применение метода конечных элементов к определению термопластического состояния тел вращения // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1973. – Вып. 13. – С. 23 – 28.
44. *Пискун В.В., Савченко В.Г.* Релаксация напряжений натяга в составном роторе // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1978. – Вып. 18. – С. 34 – 36.
45. *Пискун В.В., Савченко В.Г., Шевченко ЮН.* Решение пространственной осесимметричной задачи термопластичности применительно к толстым турбинным дискам // Пробл. прочности. – 1974. – № 5. – С. 8 – 13.
46. *Пискун В.В., Савченко В.Г., Шевченко ЮН.* Напряженное состояние составного ротора с учетом напряжений натяга // Пробл. прочности. – 1977. – № 6. – С. 93 – 95.
47. *Пискун В. В., Савченко В.Г., Шевченко ЮН.* О применении метода конечных элементов для определения термонапряжений в дисках // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1975. – Вып. 15. – С. 54 – 57.

48. Подгорный А.Н. Дифференциальные уравнения равновесия толстостенного цилиндра конечной длины с учетом ползучести // Прикл. механика. – 1963. – 9, № 1. – С. 77 – 85.
49. Подгорный А.Н. Ползучесть толстостенного цилиндра конечной длины // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1965. – Вып. 5. – С. 260 – 269.
50. Подгорный А.Н. Установившаяся и неустойчивая ползучесть цилиндра конечной длины // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1969. – Вып. 8. – С. 236 – 243.
51. Прокопов В.К. Однородные решения теории упругости и их приложения к теории тонких пластинок // Тр. Второго Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Механика твердого тела. – М.: Наука. – 1966. – С. 253 – 259.
52. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 744 с.
53. Работнов Ю.Н., Милейко С.Т. Кратковременная ползучесть. – М.: Наука, 1970 – 224с.
54. Расчеты и испытания на прочность. Метод и пакет прикладных программ расчета на ЭВМ нестационарной теплопроводности и упругопластического напряженно-деформированного состояния элементов конструкций типа тел вращения при осесимметричных силовых и тепловых нагрузках: Рекомендации Р 54-284-90 / Сост.: Ю.Н.Шевченко, В.Г.Савченко, Д.А.Ищенко, В.М.Павлычко. – М.: ВНИИНМАШ, 1990. – 58 с.
55. Савченко В.Г. Исследование осесимметричного неупругого деформирования тел вращения с учетом вида напряженного состояния // Збірник наукових праць Дніпродзержин. держ. техн. ун-ту: (техн. науки). Тематичний випуск «Математичні проблеми технічної механіки» / Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2012. – Випуск 2 (19). – С. 13 – 17.
56. Савченко В.Г. Неосесимметричное термонапряженное состояние ортотропных составных тел вращения с учетом разномодульности при растяжении и сжатии // Третя Всеукр. наук. конф. «Математичні проблеми техн. механіки», (Дніпродзержинськ, 22 – 24 квітня 2003р.). – 2003. – С. 38.
57. Савченко В.Г. Неосесимметричное термонапряженное состояние составных тел вращения из упругих ортотропных материалов с учетом разномодульности при растяжении и сжатии // Региональный межведомственный сборник «Системні технології». – Вып. 4(33). – Днепропетровск, 2004. – С. 39 – 44.
58. Савченко В.Г. Неосесимметричное термонапряженное состояние тел вращения из прямолинейно ортотропных материалов с учетом разномодульности при растяжении и сжатии // Регіональний міжвузівський збірник «Системні технології». – Вип. 4(57). – Днепропетровск, 2008. – С.9 – 14.
59. Савченко В.Г. О деформировании составных тел вращения из прямолинейно ортотропных разномодульных при растяжении и сжатии материалов // Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки-2008» (Дніпропетровськ – Дніпродзержинськ, 21 – 24 квітня 2008р.). – 2008. – С. 15.
60. Савченко В.Г. О некоторых подходах при решении неосесимметричных задач упругости для тел вращения из ортотропных разномодульных при растяжении и сжатии материалов // Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки-2009» (Дніпродзержинськ – Дніпропетровськ, 20 – 23 квітня 2009р.). – 2009. – С. 16.
61. Савченко В.Г. Об одном методе решения пространственной неосесимметричной задачи термопластичности // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1978. – Вып. 18. – С.24 – 29.
62. Савченко В.Г. Об одном методе учета поврежденного материала при исследовании неосесимметричного термонапряженного состояния ортотропных тел вращения // Системні технології. – Днепропетровск, 2003. – Вып.2(25). – С.134 – 138.
63. Савченко В.Г. Об одном способе учета поврежденного ортотропного материала в задачах термомеханики для составных тел вращения // International Conference «Dynamical System Modelling and Stability Investigation» (Kyiv, 27 – 30 may 2003). – 2003. – P. 352.
64. Савченко В.Г. Определение температурных полей и упругопластического напряженного состояния поршня двигателя внутреннего сгорания // Динамика и прочность машин. – 1982. – Вып. 35. – С. 55 – 58.
65. Савченко В.Г. О способах построения матрицы податливостей для разномодульных ортотропных материалов // Збірник наукових праць Дніпродзержинського держ. техн. ун-ту: (технічні науки). Тематичний випуск «Математичні проблеми технічної механіки» / Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2012. – Вип. 2 (19). – С. 17 – 23.
66. Савченко В.Г. Термов'язкопластичний стан тіл обертання при неосесиметричному термосиловому навантаженні із врахуванням пошкодження матеріалу при повзучості / Збірник наук. праць Дніпродзержинського держ. техн. ун-ту (технічні науки). – 2014. – Вип.1(24). – С.170 – 174.
67. Савченко В.Г. Упругопластическое деформирование тел вращения при сложных неосесимметричных процессах нагружения: Автореф. дис... д-ра техн. наук. Ин-т механики им. С. П. Тимошенко НАНУ. – К., 1983. – 33 с.

68. Савченко В.Г. Численное исследование неосесимметричного деформирования тел вращения с учетом вида напряженного состояния. / Региональный міжвузівський збірник «Системні технології». – Вип. 4(51). – Дніпропетровськ, 2007. – С. 59 – 64.
69. Савченко В.Г., Пискун В.В., Бабешко М.Е., Прохоренко И.В. Численный метод решения осесимметричных задач теплопроводности и термопластичности для тел вращения // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1979. – Вып. 19. – С. 38 – 43.
70. Савченко В.Г., Шевченко Ю.Н. Пространственные задачи термовязкопластичности. – Успехи механики: В 6-ти томах / Под общей редакцией А.Н. Гузя. Т. 1. – К.: «АСК», 2006. – С. 625 – 660.
71. Савченко В.Г., Шевченко Ю.Н. Упругопластическое состояние толстых круглых пластин со ступенчатым изменением геометрии при неизотермическом нагружении // Тр. XII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек, т. 3: изд-во Ереван. ун-та, 1980. – С. 192 – 198.
72. Сахацкая И.К. Исследование термоупругопластического напряженного состояния цилиндрического сектора // Тр. X Науч. конф. молод. ученых Ин-та механики АН УССР. – К., 1984. – Ч. 1. – С. 141 – 145. – Деп. в ВИНТИ 30.07.84, № 5535-84Деп.
73. Сахацкая И.К. Решение задачи термопластичности для тел вращения, незамкнутых в окружном направлении // Прикл. механика. – 1983. – 19, № 9. – С. 113 – 117.
74. Сахацкая И.К. Термоупругопластическое напряженно-деформированное состояние цилиндрического сектора с учетом истории нагружения // Тр. XI Науч. конф. молод. ученых Ин-та механики АН УССР. – К., 1986. – С. 582 – 587. – Деп. в ВИНТИ 27.07. 86, № 5507- В86 Деп.
75. Сахацкая И.К. Упругопластическое напряженное состояние тел вращения при неосесимметричных неизотермических процессах нагружения: Автореф. дис... канд. физ.-матем. наук. Ин-т механики им. С. П. Тимошенко НАНУ. – К., 1984. – 21 с.
76. Соколовский В.В. Об одной форме представления компонент напряжений в теории пластичности // Докл. АН СССР – 1948. – 61, №2. – С. 86 – 94.
77. Стрюк В.К. Термоупругопластическое напряженное состояние толстостенного цилиндра конечной длины // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1970. – Вып. 10. – С. 57 – 67.
78. Стрюк В.К. Упругопластическое напряженное состояние короткого цилиндра // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1970. – Вып. 9. – С. 183 – 191.
79. Стрюк В.К. Упругопластическое напряженное состояние коротких цилиндров при неизотермическом нагружении: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Ин-т механики им. С. П. Тимошенко НАНУ. – К., 1973. – 15 с.
80. Успехи механики: В 6-ти т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т.1. Пространственные задачи термовязкопластичности / Савченко В.Г., Шевченко Ю.Н. – К.: «АСК», 2006. – 776 с. – С. 625 – 660.
81. Успехи механики: В 6-ти т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т.2. Исследование закономерностей термовязкопластического деформирования твердого тела при неизотермических сложных процессах нагружения 1 / Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г. – К.: «АСК», 2006. – С. 218 – 248.
82. Успехи механики: В 6-ти т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т.2. Исследование закономерностей термовязкопластического деформирования твердого тела при неизотермических сложных процессах нагружения 2 / Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г. – К.: «АСК», 2006. – С. 415 – 446.
83. Успехи механики: В 6-ти т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т.2. Термовязкоупругопластическое состояние оболочек вращения при процессах осесимметричного деформирования по различным плоским траекториям / Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е. – К.: «АСК», 2006. – С. 539 – 573.
84. Фомин В.Л. Упругопластическое равновесие полого цилиндра под действием осесимметричного температурного поля // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. – 1961. – № 5. – С. 127 – 128.
85. Хажинский Г.М. О теории ползучести и длительной прочности металлов // МТТ. – 1971. – № 6. – С. 29 – 36.
86. Шевченко Ю.Н. Деформационная теория термовязкопластического деформирования ортотропного тела, учитывающая историю нагружения // Проблемы прочности. – 2000. – № 5. – С. 74 – 84.
87. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях. – К.: Наук. думка, 1970. – 272с.
88. Шевченко Ю.Н. Численные методы решения прикладных задач. – К.: Наук. думка, 1986. – 272 с. – (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6-ти т.; Т. 6).
89. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В. и др. Решение осесимметричной задачи термопластичности для тонкостенных и толстостенных тел вращения на ЕС ЭВМ. – К.: Наук. думка, 1980. – 196 с.
90. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В. и др. Решение осесимметричных задач термопластичности на ЭЦВМ // Прикл. проблемы прочности и пластичности – 1975. – Вып. 1. – С. 67 – 76.

91. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В., Савченко В.Г. Пространственные задачи термопластичности. – К.: Наук. думка, 1980. – 264 с.
92. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 328 с.
93. Шевченко Ю.Н., Пискун В.В., Коваленко В.А. Программа решения задач о термоупругом осесимметричном напряженно-деформированном состоянии криволинейно-ортотропных многослойных тел вращения. – К., 1985. – 92с. – Зарег. в ГФАП, № 50850001048.
94. Шевченко Ю.Н., Пискун В.В., Савченко В.Г. Решение осесимметричной пространственной задачи термопластичности на ЭЦВМ типа М-220. – К.: Наук. думка, 1975. – 108с.
95. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Термовязкопластичность: Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т. – К.: Наук. думка, 1987. – Т. 2. – 264с.
96. Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г. Физические уравнения термовязкопластичности. – К.: Наук. думка, 1982. – 240 с.
97. Шевченко Ю.Н., Тормахов Н.Н., Определяющие уравнения термопластичности для процессов пропорционального нагружения с учетом вида напряженного состояния // Математичні проблеми технічної механіки / Збірн. наук. праць Дніпродзержинського держ. техн. ун-ту. – Дніпродзержинськ, 2012. – Вип. 2(19). – С. 69 – 73.
98. Altenbach H. Creep Theory Present-Day Problems and Applications// Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, N 6. – P. 631 – 655.
99. Babeshko M.E., Savchenko V.G. Method of Successive Approximation in Boundary-Value Problems of Thermoplasticity // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 3. – P. 232 – 238.
100. Babeshko M.E., Savchenko V.G. Improving the convergence of the additional-strain method in thermoplasticity boundary problems with deformation along small curvature trajectories // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 8. – P. 771 – 776.
101. Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N. Describing the Thermoelastoplastic Deformation of Compound Shells under Axisymmetric Loading with Allowance for the Third Invariant of Stress Deviator // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 12. – P. 1362 – 1371.
102. Babeshko M.E., Shevchenko Yu. N. Elastoplastic Stress-Strain State of Flexible Layered Shells Made of Isotropic and Transversely Isotropic Materials with Different Moduli and Subjected to Axisymmetric Loading // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 11. – P. 1208 – 1217.
103. Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N. Method of successive approximations for solving boundary-value problems of plasticity with allowance for the stress mode// Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 7. – P. 744 – 752.
104. Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N. Constitutive equations of elastoplastic isotropic materials that allow for the stress mode // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 11. – P. 1189 – 1195.
105. Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N. Approximate description of the inelastic deformation of an isotropic material with allowance for the stress mode // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 2. – P. 139 – 148.
106. Babeshko M.E., Stryuk V.K. Calculating the Stress State of a Solid Cylinder on the Basis of the Theory of Flow with Isotropic Hardening // Sov. Appl. Mech. – 1974. – **10**, N 6. – P. 587 – 591
107. Baltov A. Materials Sensitive to the Type of the Process // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 4. – P. 361 – 369.
108. Bobyr V.I. Thervoelasticity Problem for Solids of Revolution with a Nonaxisymmetric Load over a Small-Curvature Deformation Trajectory // Sov. Appl. Mech. – 1986. – **22**, N 7. – P. 636 – 639
109. Jones R.M. Stress – Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // AIAA Journal. – 1977. – **15**, N 1. – P. 16 – 23.
110. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials // AIAA Journal. – 1980. – **18**, N 8. – P. 995 – 1001.
111. Galishin A.Z. Determining the Thermoviscoplastic State of Shells of Revolution Subject to Creep Damage // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 5. – P. 537 – 545.
112. Hencky H. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen // ZAMM. – 1924. – **4**, N4. – P. 323 – 334.
113. Hill R. Mathematical theory of plasticity. – Oxford: University Press, 1950. – 348 с.
114. Ishchenko D.A., Savchenko V.G. Influence of Taking Account of Secondary Plastic Deformations on the Solution of the Axisymmetric Thermoplasticity Problem // Sov. Appl. Mech. – 1988. – **24**, N 3. – P. 229 – 233.
115. Khoroshun L.P., Shikula E.N. To the Theory of Short-Time Microdamage of Composite Materials of the Granular Structure Under a Temperature Action // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 1. – P. 60 – 67.
116. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Time Microdamage of Layered Materials Under the Temperature Action // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 4. – P. 432 – 439.

117. *Lelyukh Yu.I.* Analyzing Methods to Allow for the Damage of Material in Thermoviscoelastoplastic Deformation // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 12. – P. 1396 – 1405.
118. *Lelyukh Yu.I., Shevchenko Yu.N.* On Finite – Element Solution of Spatial Thermoviscoelastoplastic Problems // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 5. – P. 507 – 515
119. *Lode W.* Versuche uber den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metals – Eisen, Kupfer und Nickel // *Z. Physik.* – 1926. – **36**. – P. 913 – 939.
120. *Pardoen G.C.* Improved structural analysis technique for orthogonal weave carbon-carbon materials // *AIAA Jornal.* – 1995. – **13**, N6. – P.756 –761.
121. *Pavlychko V.M.* Numerical Solution of Three-Dimensional Thermoplasticity Problems for Bodies of Complex Shape // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 8. – P. 748 – 752
122. *Podgornyi A.N.* Thermal Creep of a Cylinder of Finite Length // *Soviet Applied Mechanics* – 1970. – **6**, N 12. – P. 1314 – 1317
123. *Prandtl L.* Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz uber das plastische Gleichgewicht // *ZAMM.* – 1923. – **3**, N 6. – P. 401 – 406.
124. *Reuss A.* Berucksichtigung der elastischen Formanderung in der Plastizitatstheorie // *ZAMM.* – 1930. – **10**, N 3. – P. 266 –274.
125. *Savchenko V.G.* Calculation of Nonaxisymmetric Thermally Stressed State of Discrete Homogeneous Bodies of Revolution with Orthotropic Layers // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 2. – P. 122 – 127.
126. *Savchenko V.G.* Calculating the Stress-Strain State of Solids of Revolution that are Sectional in the Circumferential Direction // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 7. – P. 518 – 523.
127. *Savchenko V.G.* Elastic - Plastic State of Bodies of Revolution under Variable Nonisothermal Loading, Taking Account of Creep // *Sov. Appl. Mech.* – 1982. – **18**, N 12. – P. 1053 – 1058.
128. *Savchenko V.G.* Influence of the direction of principal anisotropy in a rectilinearly orthotropic material on the stress state of a compound solid of revolution subject to nonaxisymmetric heating // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 6. – P.713 – 720.
129. *Savchenko V.G.* A Method to Study the Nonaxisymmetric Plastic Deformation of Solids of Revolution with Allowance for the Stress Mode // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 9. – P. 975 – 981.
130. *Savchenko V.G.* Nonaxisymmetric Deformation of Solids of Revolution Made of Elastic Orthotropic Materials with Different Tensile and Compressive Moduli // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 7. – P. 748 – 756.
131. *Savchenko V.G.* Nonaxisymmetric Temperature and Thermostress in Isotropic and Curved Orthotropic Layered Solids of Revolution // *Int. Appl. Mech.* – 1993. – **29**, N 8. – P. 602 – 609.
132. *Savchenko V.G.* Nonaxisymmetric Thermal and Stressed State of Layered Bodies of Revolution with Rectilinearly Orthotropic Layers // *Int. Appl. Mech.* – 1994. – **30**, N 9. – P. 650 – 656.
133. *Savchenko V.G.* Numerical Nonaxisymmetric Thermostress Analysis of Compound Solids of Revolution with Damage // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 3. – P. 275 – 282.
134. *Savchenko V.G.* On Influence of Anisotropy Principal Axes Directions of a Rectilinear Orthotropic Material on Stress State of the Compound Body of Revolution Under Nonaxisymmetric Heating // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 6. – P. 713 – 720.
135. *Savchenko V.G.* Stress State of Compound Solids of Revolution Made of Damaged Orthotropic Materials with Different Tensile and Compressive Moduli // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 11. – P. 1246 – 1255.
136. *Savchenko V.G.* Thermal Stress State of Laminated Solids of Revolution of Isotropic and Linearly Orthotropic Materials // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, N 4. – P. 249 –254.
137. *Savchenko V.G., Babeshko M.E.* Solution of Nonaxisymmetric Three-dimensional Thermoplasticity Problem by the Secondary-Stress Method // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 12. – P. 1207 – 1213.
138. *Savchenko V.G., Babeshko M.E.* The Nonaxisymmetric Elastoplastic State of Isotropic and Cylindrically Orthotropic Solids of Revolution Under Nonisothermal Loading // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 2. – P. 216 – 224.
139. *Savchenko V.G., Babeshko M.E.* The Nonaxisymmetric Thermostressed State of Laminated Isotropic and Rectilinearly Orthotropic Solids of Revolution // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 4. – P. 501 – 508.
140. *Savchenko V.G., Shevchenko Yu.N.* Methods for Investigating Thermoviscoplastic Deformation of Three - Dimensional Structural Members (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 1993. – **29**, N 9. – P. 677 – 691.
141. *Savchenko V.G., Shevchenko Yu.N.* Nonaxisymmetrical thermal stressed state of laminated bodies of revolution of orthotropic materials under nonisothermic loading // *Mech. of Compos. Mater.* – 2004. – **40**, N 6. – P. 731 – 751.
142. *Savchenko V.G., Shevchenko Yu.N.* Spatial Thermoviscoplastic Problems // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 11. – P. 1399 – 1433.

143. *Shevchenko Yu.N.* Determining Equations of Thermoviscoplasticity Describing the Strain Processes Experienced by an Element of an Orthotropic Body Along Low-Curvature Trajectories // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 10. – P. 1042 – 1048.
144. *Shevchenko Yu.N.* Study of Thermoviscoelastoplastic Processes in the Deformation of Structural Elements // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 9. – P. 861 – 870.
145. *Shevchenko Yu.N.* Thermoviscoplasticity Boundary Problems with Complex Nonisothermal Loading Processes // *Sov. Appl. Mech.* – 1985. – **21**, N 4. – P. 413 – 420.
146. *Shevchenko Yu.N.* Transformation of thermoviscoelastoplastic stress-deformed state of some constructions elements depending on heating regime // *Third International Congress on Thermal Stresses – THERMAL STRESSES'99*, June 13 – 17, 1999. - Cracow, Poland. – P. 223 – 226.
147. *Shevchenko Yu.N., Goikhman M.I.* Study of Laws Governing the Elastoplastic Deformation of Transversely Isotropic Bodies // *Sov. Appl. Mech.* – 1990. – **26**, N 9. – P. 643 – 845.
148. *Shevchenko Yu.N., Mazur V.N.* Solution of Plane and Axisymmetric Boundary-Value Problems of Thermoviscoplasticity with Allowance for Creep Damage to the Material // *Sov. Appl. Mech.* – 1986. – **22**, N 8. – P. 695 – 704.
149. *Shevchenko Yu. N., Piskun V.V.* Thermoelastoplastic State of Discretely Inhomogeneous Orthotropic Bodies of Revolution with a Nonlinear Shear Characteristic // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, N 6. – P. 441 – 447.
150. *Shevchenko Yu. N., Piskun V.V., Kovalenko V.A.* Elastoplastic States of Axisymmetrically Loaded Laminated Bodies on Revolution Made of Isotropic and Orthotropic Materials // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 1. – P. 25 – 32.
151. *Shevchenko Yu. N., Piskun V.V., Kovalenko V.A.* The most stress State of Curvilinear Orthotropic Inhomogeneous Bodies of Revolution // *Sov. Appl. Mech.* – 1983. – **19**, N 7. – P. 567 – 573
152. *Shevchenko Yu.N., Sakhatskaya I.K.* Mixed Thermoplasticity Problem for Open Solids of Revolution // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 6. – P. 535 – 539
153. *Shevchenko Yu.N., Savchenko V.G.* Numerical Modeling of Process of Heat Treatment of Details with the Use of Equations of Thermoviscoplasticity // *European Mech Collog. 263. The Effect of Phase Transform. in Sol. on Constitutive Laws: Abstracts.* – Vienna, 1990. – P. 16.
154. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G.* Studying the Laws of the Thermoviscoplastic Deformation of a Solid under Nonisothermal Complex Loading. Part 2 // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 6. – P. 701 – 727.
155. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N.* Linear Relationship between the First Invariants of the Stress and Strain Tensors Theories of Plasticity with Strain Hardening // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 3. – P. 291 – 302.
156. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N.* Elastoplastic Deformation of Elements of an Isotropic Solid along Paths of Small Curvature: Constitutive Equations Incorporating the Stress Mode // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 6. – P. 621 – 630.
157. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N.* Constitutive Equations for Describing the Elastoplastic Deformation of Elements of a Body along Small-Curvature Paths in View of the Stress Mode // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 4. – P. 421 – 430.
158. *Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N.* Constitutive Equations of Thermoplasticity Including the Third Invariant // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 6. – P. 613 – 624.
159. *Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N.* Thermoviscoplastic Deformation along Paths of Small Curvature: Constitutive Equations Including the Third Deviatoric Stress Invariant // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 6. – P. 688 – 699.
160. *Weiner J.H., Huddleston J.V.* Transient and residual stresses in heat-treated cylinders // *Paper. Amer. Soc. Mech. Engns.* – 1958. – N A-21, 9pp.
161. *Zyczkowski M.* Combined Loadings in the Theory of Plasticity. – PWN – Polish Scientific Publishers, 1981. – 714 p.

Поступила 18.01.2016

Утверждена в печать 31.03.2016