

Н. П. Плахтиенко, А. Г. Забуга

**ФРИКЦИОННО-УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ
УПРУГО СВЯЗАННЫХ ТЕЛ С ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТЬЮ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua*

Abstract. The design and corresponding mechanical-mathematical models are constructed for a system of three rigid bodies. These bodies are at a synchronously translational motion, fall on a rough rigid plane and after short-term sliding bounce off from this plane. The system of three autonomous differential equations is obtained and analytically solved. It model three stages of the realized by system plane motion. The exact solution is also modeled numerically. Results of this modeling are shown in the paper.

Key words: rigid bodies, rough rigid plane, slanting blow, multi-cyclical plane motion, analytical solution, power reaction, finite function, impulsive loading.

Введение.

Классическая теория ударного взаимодействия твердых тел [3, 7, 9 – 11] использует теорему об изменении количества движения материальной точки. В количественном соотношении существо ударного взаимодействия имеет прозрачное объяснение для случая удара материальной точки массой m о твердую неподвижную плоскую поверхность достаточно массивного тела. Согласно второму закону Ньютона для движущейся массы имеем следующее уравнение динамики $d(mv)/dt = F$, где F – сила ударного взаимодействия движущейся массы с поверхностью твердого тела, $v = dr/dt$, r – радиус-вектор точечной массы в инерциальной системе координат. Проинтегрируем уравнение динамики на интервале $t \in [0, \tilde{\tau}]$, принимая, что F может быть представлена как функция времени. В результате, используя теорему о среднем, получим $mv - mv_0 = \bar{F}\tilde{\tau}$, $\bar{F} = \frac{1}{\tilde{\tau}} \int_0^{\tilde{\tau}} F(t) dt$. Здесь \bar{F} – среднее значение ударной силы на промежутке $[0, \tilde{\tau}]$, где $\tilde{\tau}$ – очень малая величина, которая для механических систем измеряется десятками микросекунд.

В теории ударного взаимодействия абсолютно твердых тел длительность удара принимается величиной бесконечно малой. Следствием этого допущения является тот факт, что перемещение точки на интервале удара – также величина бесконечно малая, которой можно пренебречь. При попытках вычислить работу ударных сил при многочисленных ударно-импульсных перемещениях даже точечной массы возникают затруднения принципиального характера. Они состоят в том, что такая работа вычисляется по формуле $A = \int_0^{\Delta r} F(s) \cdot ds$, где перемещение Δr является бесконечно малой величиной. Ударная сила F (под знаком интеграла) может быть разложена на нормальную и тангенциальную составляющие по отношению к поверхности, о которую со-

вершается удар. Нормальная составляющая ударной силы представляет собой силу упругости, которая обусловлена деформацией как тела, так и поверхности, о которую совершается удар. Тангенциальная составляющая ударной силы обусловлена силой трения скольжения или трения покоя и тангенциальной составляющей силы упругости. Для идеально гладкой поверхности отличной от нуля будет только нормальная составляющая ударной силы. А для поверхности с трением будут присутствовать как нормальная, так и тангенциальная составляющие, причем последняя может иметь переменную структуру (в процессе удара возможен переход от трения скольжения к трению покоя и наоборот). Ясно, что рассматривая удар в допущении $\Delta t \rightarrow 0$, исследовать указанные особенности ударной силы и, тем более, вычислить работу каждой из ее составляющих невозможно.

При исследовании систем без трения изменение скорости движения точечной массы при ударе о неподвижную поверхность принято описывать с помощью гипотезы Ньютона [3]. Согласно этой гипотезе, изменение нормальной составляющей скорости движения точечной массы во время удара может быть описано с помощью коэффициента восстановления ε , который для случая удара материальной точки о неподвижную поверхность определяется, как отношение модуля нормальной составляющей скорости точки после удара к модулю нормальной составляющей скорости точки до удара. Следует отметить, что в случае систем без трения ударный импульс направлен по нормали к поверхности. Следовательно, тангенциальная составляющая скорости точки при ударе о поверхность без трения остается неизменной.

При рассмотрении системы с трением необходимо учитывать нормальную и касательную (тангенциальную) к поверхности составляющие вектора количества движения. Обобщением гипотезы Ньютона в случае систем с трением есть гипотеза Рауса [9]. Она основывается на допущении о том, что между нормальной J_n и тангенциальной J_τ составляющими ударного импульса существует такая же связь, как и между нормальной и касательными составляющими реакции неидеальной связи в законе Амонтона – Кулона.

Следует отметить, что в реальных системах, в отличие от приведенных выше моделей, удар происходит за ограниченный промежуток времени. Это приводит к тому, что при косом ударе, по крайней мере, вначале имеет место скольжение. Скольжение во время косого удара будет иметь место до тех пор, пока сила трения скольжения не перейдет в силу трения покоя (ясно, что это будет совершаться не при произвольном косом ударе, а только при выполнении определенных условий). Следовательно, косой удар без скольжения также является идеализацией.

§1. Постановка задачи и построение механико-математической модели описанной системы тел.

Рассмотрим плоское поступательное движение под действием силы тяжести системы двух тел (рис. 1), связанных пружиной. Эту систему условно назовем цилиндр – поршень.

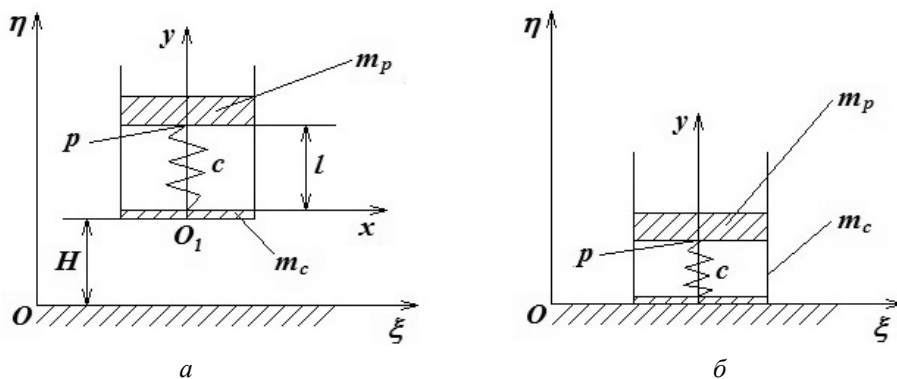


Рис. 1

Цилиндр имеет перфорированное днище. Это значит, что между поршнем и днищем цилиндра сжатие воздуха не происходит. Силу трения, которое возникает между боковой поверхностью цилиндра и поршнем, предполагаем пропорциональной его относительной скорости. Обозначим массу поршня через m_p , а массу цилиндра вместе с днищем – через m_c . Декартова система координат $O\xi\eta$ является инерциальной, а система осей O_1xy связана с цилиндром и имеет начало в точке O_1 . Длина ненапряженной пружины равна ℓ , а ее жесткость обозначим через C . Формально массу цилиндра разместим в точке O_1 днища, а массу поршня примем сконцентрированной в точке крепления к нему пружины. Произвольную конфигурацию системы будем определять координатами точки $O(\xi, \eta)$ и координатой y точки p поршня. Движение системы тел ограничено односторонней связью $\Phi(\xi, \eta) = \eta \geq 0$.

Во время движения примем оси $O\xi\eta$, O_1xy параллельными, т.е. цилиндр и поршень рассматриваем как точечные материальные тела.

Предположим, что масса поршня существенно больше массы цилиндра: $m_p \gg m_c$. Примем также, что мгновенный контакт цилиндра со связью является абсолютно неупругим. Это значит, что днище цилиндра принимаем абсолютно пластичным. Следовательно, при движении поршня в направлении днища цилиндра и сжатии пружины отскока цилиндра от связи не происходит. Явление отскока цилиндра от связи будем связывать с движением поршня в направлении от днища и растяжением пружины.

При наличии трения движение системы со временем прекратится. Движение до остановки будет насчитывать несколько однотипных циклов. Каждый из них будет содержать не более трех стадий. Рассмотрим такие стадии движения исследуемой системы: 1) свободное равноускоренное падение на интервале $[0, t_1]$ центра масс системы с высоты H с заданными начальными условиями; 2) после достижения цилиндром в момент времени $t = t_1$ связи $\eta = 0$ возникает реакция связи $N(t)$ и происходит скользящее замедленное движение цилиндра по ее поверхности на интервале времени $t \in (t_1, t_2]$; 3) отскок цилиндра от связи в момент времени, когда реакция связи превращается в нуль и наступает замедленное движение центра масс системы вверх с некоторой начальной кинетической энергией до максимальной высоты $G = \eta(t_3) < H$, $t_3 > t_2$.

За один цикл движения на интервале $[0, t_3]$ несущий цилиндр вместе с поршнем переместится на величину $\Delta\xi$ вдоль горизонтальной оси $O\xi$. После реализации k циклов при отсутствии отскока движение системы заканчивается скольжением несущего цилиндра по связи до его остановки.

Очевидно, что может иметь место случай, когда реакция связи в нуль не превращается и значит $k \leq 1$. Следовательно, движение системы будет насчитывать всего две стадии. Тогда ясно, что $k = 0$, в этом случае величины G и t_3 не существуют.

Кинематические характеристики каждого цикла движения системы определяются по идентичным формулам. Поэтому ниже основное внимание сосредоточено на вычислении кинематических и динамических характеристик первого цикла движения рассматриваемой системы: η , $\dot{\eta} = \mathcal{G}_\eta$; ξ , $\dot{\xi} = \mathcal{G}_\xi$; y , $\dot{y} = \mathcal{G}_y$.

Величины высоты и горизонтальной скорости H , $\mathcal{G}_\xi(t) \Big|_{t \in (0, t_1)}$ задаем как начальные значения: $\xi(0) = 0$; $\dot{\xi}(0) = \mathcal{G}_{\xi 0}$; $\eta(0) = H$; $\dot{\eta}(0) = \mathcal{G}_{\eta 0}(0) = 0$; $y(0) = y_0$; $\dot{y}(0) = \mathcal{G}_{y 0}$. Отметим, что на первой и третьей стадиях первого цикла, при $t \in [0, t_1]$ и

$t \in [t_2, t_3]$, контакт днища цилиндра с плоскостью отсутствует и в горизонтальном направлении нет действия активных сил. Это значит, что на первой и третьей стадиях движения имеем $\mathcal{G}_\xi(t) = \mathcal{G}_{\xi 0} = \text{const}$ при $t \in [0, t_1]$ и $t \in [t_2, t_3]$. Такие величины, как горизонтальная компонента скорости тел в конце второй стадии движения $\mathcal{G}_\xi(t_2)$, значения реакций связи $N(t) \forall t \in (t_1, t_2)$ и высоты отскока цилиндра $G = \eta(t_3)$, также необходимо рассчитывать.

Для следующих циклов движения все вышеотмеченные параметры являются расчетными величинами. Их можно пронумеровать следующим способом: $H_k, t_{1k},$

$$\mathcal{G}_\xi(t_{1k}), t_{2k}, N_k(t) \Big|_{t \in (t_{1k}, t_{2k})}, \mathcal{G}_{\xi k}(t_{2k}), t_{3k}, G_k = \eta(t_{3k}), (k = 2, 3, \dots).$$

Для определения параметров первого цикла движения следует построить механико-математическую модель описанной системы тел. Составим систему дифференциальных уравнений, которые отображают поступательное движение рассматриваемой системы для случая $\eta > 0$, когда она имеет три степени свободы. Воспользуемся аппаратом уравнений Лагранжа II рода. Вычислим функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, где T, Π – функции кинетической и потенциальной энергии, соответственно: $T = 0,5m_c(\dot{\eta}^2 + \dot{\xi}^2) + 0,5m_p((\dot{\eta} + \dot{y})^2 + \dot{\xi}^2)$; $\Pi = m_c g \eta + m_p g (y + \eta) + 0,5C(\ell - y)^2 + \text{const}$; $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i$ ($i = 1, 2, 3$); $q_1 = \xi, q_2 = \eta, q_3 = y$.

В результате вычисления оператора Эйлера – Лагранжа имеем такие уравнения:

$$\begin{aligned} M \ddot{\xi} &= F_1; \quad M \ddot{\eta} + m_p \ddot{y} + Mg = F_2; \quad M = m_p + m_c; \\ m_p (\ddot{\eta} + \ddot{y}) + C(y - \ell) + m_p g &= F_3. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь F_i ($i = 1, 2, 3$) – обобщенные силы непотенциальной природы [4, 5, 8]. Для сил этого рода в случае $\eta > 0$ учтем только силу трения поршня о стенки цилиндра. Ее примем пропорциональной скорости движения поршня относительно цилиндра \dot{y} : $F_3 = -2n\dot{y}$; силы F_1 и F_2 зададим так:

$$F_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta > 0, \\ F_T & \text{при } \eta = 0; \end{cases} \quad F_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta > 0, \\ N & \text{при } \eta = 0, \end{cases}$$

где F_T – сила трения скольжения; N – реакция связи, которую следует определить.

Решим систему уравнений (1.1) относительно вторых производных. В результате получим

$$\ddot{\xi} = F_1 / M; \quad \ddot{\eta} = \frac{2n\dot{y}}{m_c} + \frac{C}{m_c}(y - \ell) - g + F_2 / m_c; \quad \ddot{y} = -\frac{2nM}{m_p m_c} \dot{y} - \frac{CM}{m_p m_c}(y - \ell) - \frac{F_2}{m_c}. \quad (1.2)$$

Ниже используются такие обозначения: $\frac{nM}{m_p m_c} = \delta_y$; $\frac{n}{m_c} = \delta_c$.

§2. Исследование свободного падения систем упруго связанных тел.

Анализируем первую стадию движения, которая отвечает свободному падению тел. Согласно уравнениям (1.2) получаем следующее: если в начале движения $\eta(0) = H_1 = H$; $\dot{\eta}(0) = 0$; $y(0) = \ell$; $\dot{y}(0) = 0$; $\xi(0) = 0$; $\dot{\xi}(0) = \mathcal{G}_{\xi 0}$, тогда при $F_1 = F_2 = 0$ имеем $\ddot{\xi} = 0$, $\ddot{\eta} = -g$, $\ddot{y} = 0$. Следовательно, цилиндр вместе с поршнем движется равномерно в

направлении горизонтальной оси $O\xi$, равноускоренно в отрицательном направлении оси $O\eta$. Поршень при этом является неподвижным относительно стенок цилиндра.

Если начальное значение координаты $y \neq \ell$, т.е. пружина сжата или растянута, тогда поршень будет падать, выполняя относительно стенок цилиндра колебательные движения в окрестности подвижного положения равновесия $y = \ell$. Согласно третьему уравнению системы (1.2) период осцилляции координаты y имеет на первой стадии величину T_y

$$T_y = 2\pi/\bar{\omega}_y; \quad \bar{\omega}_y = \omega_y \sqrt{1 - \varepsilon_y^2}; \quad \omega_y = \sqrt{CM/(m_p m_c)};$$

$$\varepsilon_y^2 = \frac{n^2 M}{C m_p m_c}; \quad T_y = 2\pi \sqrt{\frac{m_p m_c}{CM}} + O(n^2), \quad (2.1)$$

где $O(n^2)$ – величина второго порядка малости относительно малого параметра n .

Следовательно, при больших значениях жесткости пружины C и малых значениях отношения $m_p \cdot m_c / M$ величина T_y является достаточно малой. Сравним теперь величину T_y с временным отрезком движения системы двух тел в вертикальном направлении под действием только силы веса. Эта система падает с высоты положения поршня $\eta(0) = H$ (с такими начальными условиями: $\dot{\eta}(0) = 0$, $y(0) = \ell$, $\dot{y}(0) = 0$, $F_2 = 0$) к поверхности $\eta(t_1) = 0$, когда цилиндр только коснется поверхности $\eta = 0$. Согласно третьему уравнению имеем $\ddot{y} = 0$. При $t < t_1$ первые два слагаемых правой части второго уравнения системы (1.2) также тождественно равняются нулю и оно получает такой вид: $\ddot{\eta} = -g$.

Интегрируя его, вычисляем время $t_1 = T_\eta$ движения поршня при его свободном падении вместе с цилиндром. В результате определяем $t_1 = T_\eta = \sqrt{2(H - \ell)/g}$.

Следовательно, для отношения T_y / T_η имеем такую формулу: $\frac{T_y}{T_\eta} = 2\pi \sqrt{\frac{g m_p m_c}{2(H - \ell) C M}}$.

Для $C \sim 10^5$ и соразмерных величин m_p , m_c , H имеем $T_y / T_\eta \sim \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 10^{-2}$. Приблизительно такое же значение T_y / T_η получаем и тогда, когда начальное значение $y(0) \neq \ell$. Это будет в том случае, когда время свободного падения системы двух тел значительно больше периода осцилляций масс m_p , m_c , связанных пружиной.

Действительно, в общем случае движение системы двух тел может быть некоторой суперпозицией быстрого и медленного движений. Это является следствием того, что последнее уравнение системы (1.2) интегрируется независимо от первых двух и можно получить $y(t)$ в явном виде. Запишем его решение при $F_2 = 0$, $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \mathcal{G}_{y,0}$

$$y(t) = a e^{-\delta_y t} \sin(\omega_y t + \alpha) + \ell; \quad (2.2)$$

$$\delta_y = n \frac{M}{m_p m_c} = n \left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_c} \right); \quad \omega_y = 2\pi / T_y = \sqrt{C \left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_c} \right)};$$

$$a = \sqrt{(y_0 - \ell)^2 + \left(\frac{\mathcal{G}_{y,0} + \delta_y (y_0 - \ell)}{\omega_y} \right)^2};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega_y(y_0 - \ell)}{\mathcal{G}_{y_0} + \delta_y(y_0 - \ell)} + \frac{\pi}{2} (1 - \operatorname{sign} \mathcal{G}_{y_0}) \text{ или } \alpha = \arcsin \left(\frac{1}{a} (y_0 - \ell) \right) \text{ при } \mathcal{G}_{y_0} > 0.$$

Отсюда очевидно, что при $y_0 = \ell$ имеем $a = \mathcal{G}_{y_0} / \omega_y$; $\alpha = 0$.

Подставляя решение для $y(t)$ согласно формуле (2.2) во второе уравнение системы (1.2), получаем

$$\ddot{\eta} = 2\delta_c \mathcal{G}_y(t) + \omega_c^2 a e^{-\delta_y t} \sin(\omega_y t + \alpha) - g \quad (\delta_c = n/m_c, \quad \omega_c^2 = C/m_c), \quad (2.3)$$

где $\mathcal{G}_y(t) = \dot{y}(t) = a \sqrt{\delta_y^2 + \omega_y^2} e^{-\delta_y t} \cos(\omega_y t + \alpha + \beta)$ – скорость движения поршня относительно цилиндра, $\operatorname{tg} \beta = \delta_y / \omega_y$.

Дважды интегрируя дифференциальное уравнение (2.3), получим закон $\eta = \eta(t)$ изменения координаты цилиндра при произвольных начальных значениях $\eta(0) = \eta_0$, $\dot{\eta}(0) = \mathcal{G}_{\eta_0}$.

В случае, когда время свободного падения системы тел значительно больше периода собственных колебаний поршня относительно цилиндра $T_\eta \gg T_y$, правую часть уравнения (2.3) можно усреднить по независимой переменной t . В результате получим очень простое уравнение движения системы тел, которое совпадает с уравнением движения цилиндра в форме

$$\frac{d^2}{dt^2} \eta = -g + \varepsilon(T_\eta); \quad t \in [0, T_\eta]; \quad \eta(0) = \eta_0;$$

$$\dot{\eta}(0) = \mathcal{G}_{\eta_0}; \quad \varepsilon(T_\eta) = \frac{1}{T_\eta} \int_0^{T_\eta} \varphi(t) dt; \quad T_\eta \gg T_y; \quad \mathcal{G}_y(t) = \dot{y}(t)$$

(здесь $\varphi(t) = 2\pi$ – периодическая функция по переменной $\omega_y t$) [2, 6].

При этих условиях величина $\varepsilon(T_\eta)$ может быть принята как угодно малой для $T_\eta \rightarrow \infty$.

Следовательно, в общем случае время достижения системой тел поверхности $\eta = 0$ на малую величину отличается от выше вычисленного значения T_η . В дальнейшем величиной $\varepsilon(T_\eta)$ будем (при $T_y / T_\eta \sim 10^{-2}$) пренебрегать. При $T_y / T_\eta \sim 1$ закон движения цилиндра по координате η определяется только интегрированием уравнения (2.3). Метод интегрирования уравнения (2.3) является точным и пригодным для произвольных отношений T_y / T_η . При $t = t_1$ заканчивается первая стадия движения рассматриваемой системы, т.е. происходит выход ее на связь $\eta = 0$.

§3. Мгновенное наложение неидеальной связи и анализ скользящего движения системы тел по шероховатой плоскости. Вторая стадия движения системы.

Перейдем к анализу второй стадии движения системы. При составлении дифференциальных уравнений движения в форме (1.1) использованы уравнения Лагранжа II рода, реакций связей не вводили, а в качестве обобщенных координат были выбраны декартовы координаты. Однако во время скольжения системы по связи $\eta = 0$ такой подход неприменим, поскольку данная связь неидеальна. Для исследования скользящего движения системы по шероховатой поверхности можно воспользоваться дифференциальными уравнениями в декартовых координатах (такими, как уравнение Лагранжа I рода, которые содержат реакции связей). Они были откорректированы в 1895 г.

П. Пэнлеве [1] для случая неидеальных связей. На примере рассматриваемой системы с трехмерным конфигурационным пространством коротко изложим способ составления необходимых для дальнейшего анализа дифференциально-алгебраических уравнений.

Пусть в момент $t = t_1$ на систему, которая двигалась в трехмерном конфигурационном пространстве, налагается идеальная конечная связь $f(\xi, \eta, y) = 0$.

Тогда в правой части уравнений второго порядка типа (1.1) или (1.2) следует прибавить силы реакции связи, которые вычисляются по формулам $N_1 = N_\xi = \lambda \partial f / \partial \xi$, $N_2 = N_\eta = \lambda \partial f / \partial \eta$, $N_3 = N_y = \lambda \partial f / \partial y$, где λ – множитель Лагранжа, который подлежит определению. При этом число независимых координат системы необходимо уменьшить на число геометрических связей, т.е. на единицу.

После исключения уравнений связей и множителя Лагранжа приходим к системе дифференциально-алгебраических уравнений динамики дискретной системы материальных точек. Общие способы определения множителей Лагранжа и исключение зависимых координат из уравнений идеальных геометрических связей изложены в монографиях по теории механического удара [3]. Сложнее оказывается проблема с большинством неидеальных связей. Такие связи в большинстве случаев могут приводить к возникновению реакций, которые выполняют работу на возможных перемещениях материальных точек механической системы и поэтому уравнения движения невозможно представить в форме Лагранжа, Гамильтона или Аппеля. В частном случае, когда неидеальность связей порождена кулоновым трением, которое возникает при скольжении материальных точек по линейным или поверхностным связям, уравнения Лагранжа I рода могут быть трансформированы в уравнения Пэнлеве, предназначенные для учета тангенциальных сил кулонова трения $F_T = (F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Tz})$.

В дальнейшем будем пользоваться классическим уравнением поверхности в трехмерном евклидовом пространстве с декартовой системой координат $Oxyz$. Вычислим величины координат вектора \bar{F}_τ , который лежит в плоскости, касательной к поверхности $f(x, y, z) = 0$, заданной в декартовой системе координат $Oxyz$. Определим единичный вектор касательный к траектории движения точки по поверхности, которая рассматривается как связь:

$$\bar{\tau} = \bar{e}_x \frac{x'}{g} + \bar{e}_y \frac{y'}{g} + \bar{e}_z \frac{z'}{g}; \quad g = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad (3.1)$$

где $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ – единичные векторы осей $Oxyz$, а штрихом обозначена производная по скалярному параметру σ , который может быть параметром времени или длиной дуги ($x' = dx/d\sigma$). Сила трения скольжения направлена в сторону, противоположную вектору $\bar{\tau}$ и по величине равняется $\mu |\bar{N}|$, где \bar{N} – величина нормальной составляющей реакции связи, μ – коэффициент трения скольжения, который зависит от материала тел, которые соприкасаются. Модуль нормальной составляющей реакции связи можно выразить с точностью до действительного размерного множителя λ следующим образом:

$$|N| = \left| \lambda \sqrt{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2} \right| = \left| \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} \right| = \rho(x, y, z) \lambda \text{sign } \lambda. \quad (3.2)$$

Здесь частные производные от функции $f(x, y, z)$ в подкоренном выражении определяют координаты вектора нормали к поверхности $f(x, y, z) = 0$, $\rho(x, y, z)$ – значения квадратного корня. Следовательно, для компонентов силы кулонового трения F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Tz} имеем такие соотношения: $F_{Ts} = -(\mu \rho(x, y, z) \lambda \text{sign } \lambda) \tau_s$, $s = x, y, z$, где $\tau_s(s = x, y, z)$

– направляющие косинусы между вектором \bar{F}_T и осями декартовой системы координат $Oxyz$.

Учитывая изложенное, рассмотрим случай, изображенный на рис. 1, б, когда система двух тел движется по плоскости $\eta = 0$ с вектором скорости, направленным по оси $O\xi$, т.е. $\bar{v} = (g_\xi, 0, 0)$. Включим во второе уравнение системы (1.1) силу реакции связи по формуле (3.2) $F_2(t) = \lambda = N(t)$, поскольку в данном случае $\rho(x, y, z) = 1$, и положим $\dot{\eta} = \dot{\eta} = 0$. В первом уравнении примем $F_1(t) = -\mu N(t) \text{sign } \xi$.

В результате получаем такую систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\xi} = -\frac{\mu N(t)}{M} \text{sign } \xi, \quad N(t) = m_p \ddot{y}(t) + Mg, \quad \ddot{y} = -2\delta_p \dot{y} - \omega_p^2 (y - \ell) - g, \quad (3.3)$$

$\delta_p = n/m_p$, $\omega_p = \sqrt{C/m_p}$ – парциальная частота колебаний поршня при $\delta_p = 0$. Порядок этой системы дифференциальных уравнений на единицу ниже, чем порядок системы (1.1). Третье уравнение этой системы отличается от третьего уравнения системы (1.2) только коэффициентами при \dot{y} и $(y - \ell)$, а также наличием слагаемого $(-g)$. Оно интегрируется независимо от двух первых. Общее решение его при начальных условиях $y(0) = \ell$, $\dot{y}(0) = -\sqrt{2gH} < 0$ имеет такой вид:

$$y(t) = ae^{-\delta_p t} \sin(\omega_p t + \alpha) + \ell - g/\omega_p^2; \quad \omega_p = \sqrt{\frac{C}{m_p} - \delta_p^2};$$

$$a = \sqrt{\frac{g^2}{\omega_p^4} + \left(\delta_p \frac{g}{\omega_p^2} - \sqrt{2gH} \right)^2} / \omega_p^2; \quad (3.4)$$

$$\alpha = \text{arctg} \left(\frac{g/\omega_p}{\delta_p \cdot g/\omega_p^2 - \sqrt{2gH}} \right) + \pi; \quad \alpha = \arcsin \frac{g}{a\omega_p^2}.$$

Наложение геометрической связи происходит в момент времени t_1 . В силу автономности системы уравнений (1.2) ее решение $y(t)$ для $t > t_1$ получаем простым сдвигом независимой переменной t решения на интервале $[0, t_1]$. В результате имеем такие зависимости:

$$y(t) = y(t - t_1) = ae^{-\delta_p (t - t_1)} \sin(\omega_p (t - t_1) + \alpha) + \ell - g/\omega_p^2; \quad t \geq t_1 = \sqrt{2H/g};$$

$$\dot{y}(t) = \dot{y}(t - t_1) = ae^{-\delta_p (t - t_1)} \sqrt{\delta_p^2 + \omega_p^2} \cdot \cos(\omega_p (t - t_1) + \alpha + \beta); \quad \text{tg } \beta = \delta_p / \omega_p. \quad (3.5)$$

Величину нормальной составляющей реакции связи $N(t)$ вычисляем, подставляя во вторую формулу системы (3.3) ускорение $\ddot{y}(t)$, вычисленное на основе ее третьего уравнения. Поскольку $Mg - m_p g = m_c g$, получим для $t \geq t_1$ равенство

$$N(t) = m_c g - m_p \left[2\delta_p \dot{y}(t - t_1) + \omega_p^2 (y(t - t_1) - \ell) \right]; \quad t_1 < t \leq t_2. \quad (3.6)$$

Из формулы (3.6) следует, что при $0 < y(t) < \ell$, $\delta_p \approx 0$, т.е. когда пружина сжата, тогда величина $N(t) > 0$. Если $y = y_{\min}$, $\dot{y} = 0$ тогда имеем $N(t) = m_c g + C(\ell - y_{\min})$. При $y(t) = \ell$ пружина не деформирована и реакция связи равняется весу цилиндра. Если $y(t) = \Delta(t) + \ell$; $\Delta(t) > 0$, т.е. пружина растянута, тогда величина реакции связи мень-

ше веса цилиндра: $N(t) = m_c g - (\Delta - \ell)C < m_c g$. Ясно, что при $\Delta \geq 1/C \cdot m_c g + \ell = \Delta_{кр}$ имеем $N(t) < 0$. Но связь является односторонней, поэтому отрицательное значение ее реакции $N(t)$ не имеет физического смысла.

Если t_2 – первый корень уравнения (3.6), то $N(t_2) = 0$. Тогда длительность нахождения цилиндра на связи имеет величину $t_2 - t_1$. Параметры m_p , C , ℓ , H задачи следует выбирать так, чтобы начальная гравитационная потенциальная энергия массы поршня m_p могла целиком перейти в потенциальную энергию сжатой пружины. Это произойдет при условии выполнения такого неравенства: $0,5 C \ell^2 \geq m_p g (H + \ell)$.

Введем обозначение: $\omega_\mu = \sqrt{g/\ell}$ – частота колебаний математического маятника длиной ℓ . Тогда выписанное физическое неравенство будет иметь место, если выполняется такое численное неравенство: $(\omega_p/\omega_\mu)^2 \geq \tilde{k}$, $\tilde{k} = 2 \frac{H + \ell}{\ell}$, т.е. $\omega_p \geq \sqrt{\tilde{k}g/\ell}$.

Когда речь идет о выборе жесткости пружины, приходим к неравенству $C \geq \tilde{k} \cdot m_p \cdot g / \ell = C_{кр}$.

Следовательно, в рассматриваемой задаче существует возможность замены «пружинного» параметра C на эквивалентный ему «маятниковый» параметр $\tilde{k} \cdot m_p \cdot g / \ell$, а частоту ω_p задать формулой $\omega_p = \sqrt{\tilde{k}g/\ell}$.

Так как в системе происходит рассеяние энергии, то параметр H , который входит в формулу для ω_p , $\tilde{k} = 2(H + \ell)/\ell$, будет уменьшаться с каждым следующим циклом. Это значит, что если условие $C \geq C_{кр}$ выполняется для первого цикла, то оно будет выполняться и для всех последующих циклов.

Если принять $\sqrt{C/m_p} = \sqrt{\tilde{k} \cdot g/\ell}$, $\delta_p = 0$, тогда для амплитуды a согласно формуле (3.4) имеем такое значение: $a = a(H, \ell) = \frac{\ell}{2} \frac{2H + \ell}{H + \ell}$.

Согласно этой формуле имеем предельные соотношения $\lim_{H \rightarrow \infty} a(H, \ell) = \ell$; $\lim_{H \rightarrow 0} a(H, \ell) = \ell/2$. Это полностью согласовывается с физико-механическим содержанием задачи.

Для последующего определим коэффициент перегрузки связи подвижным поршнем такой формулой: $K_p(t) = N(t)/(m_p g) = \rho - 1/g \left[2\delta_p \dot{y}(t - t_1) + \omega_p^2 (y(t - t_1) - \ell) \right]$, $\rho = m_c/m_p$.

Вычислим кинематические параметры горизонтального движения цилиндра на его второй стадии. Интегрируя первое уравнение системы (3.3) в промежутке $t \in [t_1, t_2]$, определяем горизонтальную скорость цилиндра в конце второй стадии движения:

$$\dot{\xi}(t_2) = \mathcal{G}_\xi(t_2) = \mathcal{G}_\xi(t_1) - \frac{\mu}{M} \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt. \quad (3.7)$$

Из формулы (3.7) следует такое соотношение между приростом горизонтальной составляющей вектора количества движения массы M и действием реакции неидеальной связи: $J_\xi(t_2) - J_\xi(t_1) = -\mu D_\eta(N)$, где $J_\xi(t_i) = M \mathcal{G}_\xi(t_i)$ ($i = 1, 2$) – количество движения массы M вдоль оси O_ξ в моменты времени t_1, t_2 с физической размерно-

стью $[J_\xi] = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$; $D_\eta(N) = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt = (t_2 - t_1)N(t_c)$, $t_c \in [t_1, t_2]$. $D_\eta(N)$ является действием силы $N(t)$ на промежутке времени $(t_2 - t_1)$. Величина $D_\eta(N)$ имеет такую же физическую размерность, как и количество движения, т.е. $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$. В теоретической механике при изучении явления удара она получила название «импульс» силы [3, 7, 10].

Повторное интегрирование соотношения (3.7) дает формулу для длины $\Delta_{21}^{(\xi)}$ скольжения цилиндра по связи $\Delta_{21}^{(\xi)} = \xi(t_2) - \xi(t_1) = \mathcal{G}_\xi(t_1)(t_2 - t_1) - \frac{\mu}{M} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t N(\tau) d\tau$.

Представим простые приближенные формулы для вычисления $\dot{\xi}(t_2)$ и $\Delta_{21}^{(\xi)}$.

Среднюю скорость скольжения цилиндра по связи определим формулой

$$\bar{\mathcal{G}}_\xi = \frac{1}{2}(\mathcal{G}_\xi(t_1) + \mathcal{G}_\xi(t_2)) = \mathcal{G}_\xi(t_1) - \frac{1}{2} \frac{\mu}{M} N(t_c) \Delta t_{21}; \quad \Delta t_{21} = (t_2 - t_1).$$

Оценочную длину $\Delta_{21}^{(\xi)}$ скольжения цилиндра по связи определим произведением средней скорости скольжения на временной интервал его существования: $\Delta_{21}^{(\xi)} = \bar{\mathcal{G}}_\xi \cdot \Delta t_{21}$.

В формуле (3.7) параметры μ, t_2 должны быть такими, чтобы $\dot{\xi}(t_2) > 0$. В противном случае горизонтальная скорость превращается в нуль при $t_1 < \bar{t}_2 < t_3$. Это значит, что, начиная с момента времени \bar{t}_2 , цилиндр и поршень будут выполнять циклические ударно-колебательные движения в вертикальном направлении при постоянной координате $\xi(\bar{t}_2)$, $\bar{t}_2 < t_2$.

§4. Анализ механизма отскока системы тел от твердой плоскости – третья стадия движения.

Закон обратного движения систем тел цилиндр – поршень вверх получаем, интегрируя второе уравнение системы (1.2) при $F_2 \equiv 0$, $\eta(t_2) = 0$, $\dot{\eta}(t_2) = 0$. Правая часть этого уравнения является известной функцией времени. Первое интегрирование дает

$$\dot{\eta}(t) = \int_{t_2}^t U(\tau) d\tau \quad [U(\tau) = \frac{2n}{m_c} \dot{y}(\tau) + \frac{C}{m_c} (y(\tau) - \ell) - g, \quad t_2 \leq t]. \quad (4.1)$$

Интегрируя правую часть равенства (3.7), определяем закон изменения вертикальной скорости цилиндра:

$$\dot{\eta}(t) = \frac{2n}{m_c} (y(t) - y(t_2)) + \frac{C}{m_c} \int_{t_2}^t y(\tau) d\tau - \left(\frac{C}{m_c} \ell + g \right) (t - t_2). \quad (4.2)$$

Вычислим интеграл, который входит в формулу (4.2), где $y(\tau)$ задается первой из формул (3.5).

Неэлементарные расчеты дают следующее равенство:

$$\int_{t_2}^t y(\tau) d\tau = A(t) - A(t_2) \quad (4.3)$$

$$\left[A(t) = -a \frac{1}{\sqrt{\delta_p^2 + \omega_p^2}} \exp(-\delta_p(t - t_1)) \cos(\omega_p(t - t_1) + \alpha - \beta) + (\ell - g/\omega_p^2)(t - t_2), \quad \text{tg } \beta = \frac{\delta_p}{\omega_p} \right].$$

Движение вдоль координат $O\xi$ происходит по инерции

$$\xi(t) = \xi(t_2) + \mathcal{G}_\xi(t_2)(t - t_2) \quad (t_2 \leq t \leq t_3), \text{ где } \mathcal{G}_\xi(t_2) = \dot{\xi}(t_2).$$

При $t = t_3$ определяемая правой частью формулы (4.1) скорость вертикального подъема цилиндра превращается в нуль. Следовательно, для вычисления параметра t_3 с учетом формул (4.3) имеем такое трансцендентное уравнение

$$2\delta_c(y(t_3) - y(t_2)) + \frac{\omega_p^2}{\rho} \cdot (A(t_3) - A(t_2)) - \left(\frac{\omega_p^2 \ell}{\rho} + g\right)(t_3 - t_2) = 0.$$

Высоту G отскока цилиндра с поршнем определяем интегрированием правой части формулы (4.2) при $\eta(t_2) = 0$ от $t = t_2$ до $t = t_3$, т.е. $G = \eta(t_3) = \int_{t_2}^{t_3} \eta(t) dt$.

Принимая снова к сведению формулы (4.3), последнюю формулу представим в виде, который не содержит квадратуры

$$\begin{aligned} \eta(t_3) = G = & 2\delta_c [A(t_3) - A(t_2) - y(t_2)(t_3 - t_2)] + \\ & + \frac{\omega_p^2}{\rho} [B(t_3) - A(t_2)(t_3 - t_2)] - \left(\frac{\omega_p}{\rho} \ell + g\right) \left(\frac{t_3 - t_2}{2}\right)^2 < H; \\ B(t) = & \int_{t_2}^t A(\tau) d\tau = -\frac{a}{\delta_p^2 + \omega_p^2} \left[\exp(-\delta_p(t - t_1)) \sin(\omega_p(t - t_1) + \alpha - 2\beta) \right]. \end{aligned}$$

§5. Вычисление реакции связи.

Воспользовавшись формулами (3.3) – (3.6), построим график зависимости перегрузки связи поршнем, определяемой таким соотношением: $K_p(t - t_1) = N(t - t_1)/(m_p \cdot g)$.

На рис. 2 представлены кривые $K_p(t - t_1)$ для $\ell \in [0,025; 0,05; 0,075; 0,10]$ м.

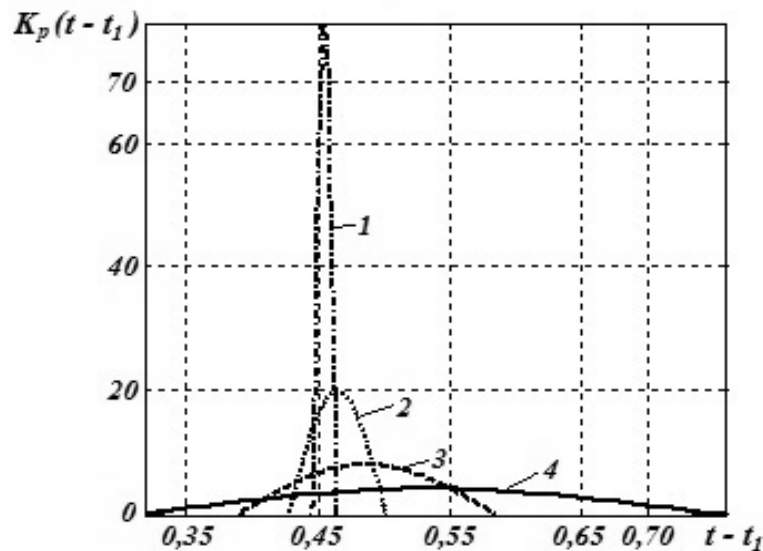


Рис. 2.

Как видим, с увеличением параметра ℓ максимальные значения коэффициента $K_p(t-t_1)$ уменьшаются. На интервале $[t_1, t_2]$ зависимость $K_p(t-t_1)$ близка к дуге полсинусоиды отрицательной кривизны. Ширина интервала существования положительного значения $K_p(t-t_1)$ увеличивается. При этом площадь S под кривой $K_p(t-t_1)$ остается примерно одинаковой при $\ell \ll H = \text{const}$. Действительно, при $\delta_p = 0$, $\rho = 0$, $a = \ell$, $\omega_p = \sqrt{2 \cdot (H + \ell) \cdot g / \ell^2}$, $t_2 - t_1 \approx \pi / \omega_p$ имеем

$$S = \int_{t_1}^{t_2} K_p(t-t_1) dt = [2\omega_p \cdot \ell / g + (t_2 - t_1)] = 2\sqrt{\frac{2(H+\ell)}{g}} \cdot \left[1 + \frac{\pi\ell}{2(H+\ell)}\right]. \quad (5.1)$$

При больших значениях H и малых ℓ вторым слагаемым в квадратных скобках последней формулы можно пренебречь.

Следовательно, величина площади S почти не зависит от длины пружины. Поскольку величина $K_p(t-t_1)$ безразмерная, то размерность величины $[S]$ есть секунда.

Ниже приводим терминологические объяснения относительно кривых, изображенных на рис. 2. Кривая $K_p(t-t_1)$ является действием реакции на временном интервале $[t_1, t_2]$, отнесенная к единице веса поршня. Она существенно зависит от длины пружины. Это действие, которое отвечает достаточно малому значению параметра, можно действительно назвать «импульсом» силы, которая описывается финитной «импульсной» зависимостью, соответствующей функции Дирака. Кривые, которые отвечают большим значениям параметра длины пружины ($\ell_3 = 0,075$ м, $\ell_4 = 0,1$ м), уже трудно относить к импульсным функциям дираковского типа. Они порождены действием реакции связи при косом ударе с отскоком твердых тел и зависят от параметра длины пружины ℓ таким образом, что площадь под ними квазиинвариантна относительно ℓ .

Заметим, что термин «импульсная» функция совсем не связан с вектором количества движения механической системы или с вектором градиента от кинетической энергии по обобщенным скоростям, как это имеет место в уравнениях Гамильтона. Этот термин часто означает быстро текущий крупнозначный процесс.

§6. Натуральная финитная функция импульсного типа.

Принимая во внимание вышеприведенные объяснение и замечание, определим четную финитную функцию, порожденную рассмотренной задачей о косом ударе материального тела о шероховатую плоскость:

$$\text{DIPL}(t|\ell, H) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t| > \pi / (2\omega_p) = A; \\ \frac{2(H+\ell)}{\ell} \cos \omega_p t & \text{при } |t| \leq \pi / (2\omega_p), \end{cases} \quad (6.1)$$

где $\omega_p = \sqrt{2(H+\ell)g/\ell}$, $[\ell] = [H] = \text{м}$, $[t] = \text{с}$, $[g] = \text{м/с}^2$. Здесь вертикальная линия отделяет текущий аргумент функции t от ее параметрических аргументов ℓ, H .

На рис. 3 показаны кривые $\text{DIPL}(t|\ell, H)$ при $H = 1$ м, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, $\ell \in (0,025; 0,050; 0,075; 0,100; 0,125)$ м.

Для функции $\text{DIPL}(t|\ell, H)$ справедливо такое ограничение: $\lim_{\ell \rightarrow 0} \text{DIPL}(t|\ell, H) = \infty$.

Вычислим интеграл от этой функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{DIPL}(t|\ell, H) dt = \frac{2(H+\ell)}{\ell} \int_{-A}^A (\cos \omega_p t) dt = 2\sqrt{\frac{2(H+\ell)}{g}} = \sigma(H, g); \quad [\sigma(H, g)] = c.$$

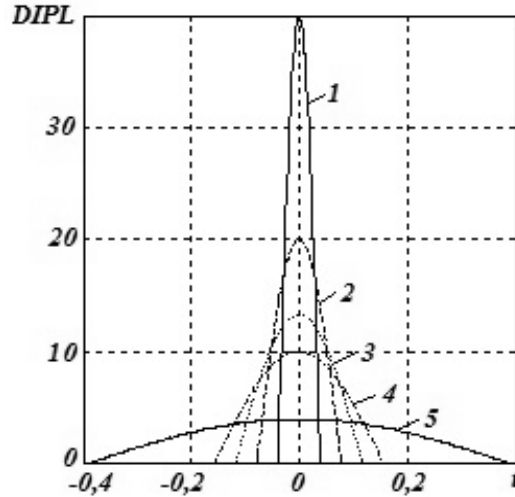


Рис. 3

Как видим, величина интеграла не зависит от параметра ℓ . Это означает, что площади под всеми кривыми $\text{DIPL}(t|\ell, H)$ на рис. 3 – одинаковые. При этом согласно формуле (5.1) имеем $S - \sigma = O(\ell/H)$. Функцию $\text{DIPL}(t|\ell, H)$ можно нормировать, разделив ее на величину $\sigma(H, g)$: $\overline{\text{DIPL}}(t|\ell, H) = \sigma^{-1}(H, g) \cdot \text{DIPL}(t|\ell, H)$. Очевидно, что $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\text{DIPL}}(t|\ell, H) dt = 1$.

Построенные математические объекты, $\overline{\text{DIPL}}(t|\ell, H)$ при $\ell/H \ll 1$ будем называть натуральными импульсными функциями дираковского типа.

Для построения финитных функций в формуле (6.1) вместо 2π -периодической функции $\cos(\omega_p t)$ можно также применить произвольную из неклассических 2^3 -периодических функций $g_c(\sigma)$, $f_c(\sigma)$, описанных в книге [2].

§7. Численное моделирование траектории движения твердых тел при косом ударе их о твердую шероховатую поверхность.

Для визуализации основных результатов проведенного исследования построены траектории движения несущего цилиндра, поршня и центра масс системы при многоциклическом взаимодействии тел со скольжением по плоскости и отскоками от нее. Приняты параметры системы: $m_p = 1$ кг; $m_c = 0,1$ кг; $\ell = 0,1$ м; $H = 0,25$ м; $C = 2000$ Н/м; $n = 1$ Н·с/м; $\mu = 0,4$; $\dot{\xi}_0 = 10$ м/с.

На рис. 4 показан график зависимости перемещения поршня от времени – $y = y(t)$. Из графика видно, что к моменту $\tilde{t} = 2,6153$ с собственная частота колебаний системы изменяется от $\omega = \omega_y \approx 150,0$ с⁻¹ к $\omega = \omega_p \approx 45$ с⁻¹. Наличие двух разных частот предопределено изменением числа степеней свободы от трех до двух единиц. На рис. 4 это проявляется в том, что при $t \geq \tilde{t}$ зависимость $y(t)$ имеет вид затухающих гармонических колебаний.

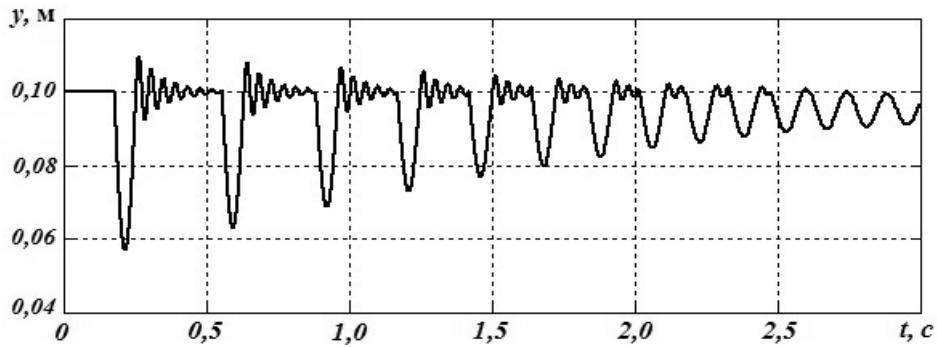


Рис. 4

На рис. 5 показана траектория движения днища цилиндра m_c в системе координат $O\xi\eta$. Траектория состоит из участков, на которых криволинейная зависимость $\eta_c(\xi)$ чередуется с горизонтальными прямолинейными отрезками. Они соответствуют скользящему движению по плоскости $\eta_c(t) = 0, t \in (t_{k1}, t_{k2})$. Дуга траектории на первой стадии начального цикла колебаний имеет вид параболы. Это объясняется тем, что движение поршня и цилиндра относительно друг друга отсутствует и совпадает с движением центра масс системы. На третьей стадии первого цикла и на первой и третьей стадиях следующих циклов ($k > 1$) вид траектории представляет собой суперпозицию движения центра масс системы по параболе и затухающих колебаний массы m_c в системе координат $O\xi\eta$.

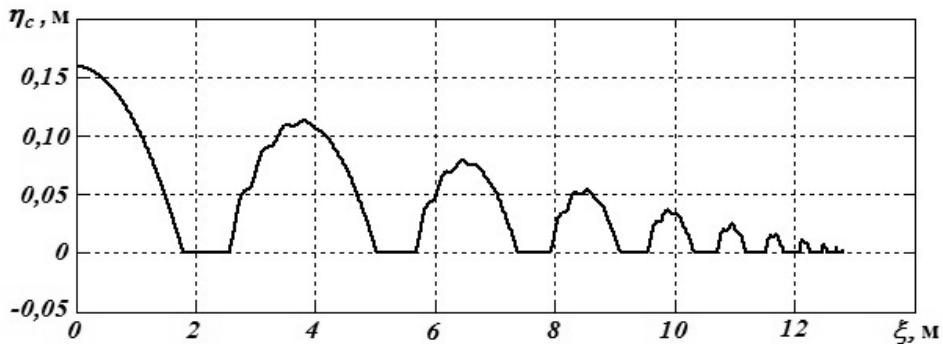


Рис. 5

С увеличением жесткости пружины частота ω_p увеличивается, а часовой отрезок контактного взаимодействия тел с плоскостью уменьшается. Используя отношение $K = \max_t N(t) / (m_p g)$, можно ввести качественно числовую градацию взаимодействия рассмотренной системы тел при их падении с некоторой высоты на твердую плоскость:

- а) мягкое контактное взаимодействие тел с твердой плоскостью ($K \leq 2$);
- б) жесткое контактное взаимодействие тел с твердой плоскостью ($2 < K < 5$);
- в) ударное взаимодействие ($K > 10$).

Заключение.

Предложена расчетная схема двух упруго связанных тел, которые, совершая синхронное поступательное движение, падают на шероховатую плоскость и после кратковременного скольжения могут отскакивать от нее. Составлена система обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих три стадии движения. Получены

точные решения совокупности дифференциальных уравнений переменной структуры. Представлены численные результаты, характеризующие движение с отскоками рассматриваемой системы тел.

РЕЗЮМЕ. Побудовано розрахункову схему і відповідну механіко-математичну модель системи твердих тіл, які, здійснюючи синхронний поступальний рух, падають на шерстку площину і після короткочасного ковзання можуть відскакувати від неї. Складено і аналітично розв'язано систему трьох автономних диференціальних рівнянь, що моделюють три стадії плоского руху. Отримано точні розв'язки системи змінної структури. Представлено результати числового моделювання.

1. *Пенлеве П.* Лекции о трении. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 316 с.
2. *Плахтиенко Н.П.* Модели нанокристаллов и неклассические периодические функции. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2014. – 303 с.
3. *Goldsmith W.* Impact: The theory and physical behavior of colliding solids. – London: Edward Arnold Ltd., 1960. – 450 p.
4. *Kubenko V. D.* Stress State of an Elastic Half-Plane under Nonstationary Loading // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 2. – P. 121 – 129.
5. *Larin V. B.* Algorithms for Solving a Unilateral Quadratic Matrix Equation and the Model Updating Problem // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 3. – P. 321 – 334.
6. *Martynyuk A. A., Nikitina N. V.* On Periodic Motion in Three-Dimensional Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 4. – P. 369 – 379.
7. *Pars L. A.* A treatise on analytical dynamics. – London: Heinemann, 1964. – 636 p.
8. *Plakhtienko N. P.* Translation of a Rigid Body with Gravity – Friction Seismic Dampers // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 7. – P. 786 – 796.
9. *Routh E. J.* Dynamics of a system of rigid bodies. – London: Edward Arnold Ltd., 1960. – 450 p.
10. *Stewart D.* Rigid – Body Dynamics with Friction and Impact // *SIAM Review.* – 2010. – **42**, N 1. – P. 3 – 39.
11. *Wittenburg J.* Dynamics of systems of rigid bodies. – Stuttgart: B.G. Teubner, 1977. – 294 p.

Поступила 30.12.2014

Утверждена в печать 22.12.2015