А . С . Х о р о ш у н

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: *center@inmech.kiev.ua*

Abstract. The stability of horizontal motion of a light airplane is studied using the approach of singular perturbations. The possible inaccuracies of modeling are taken into account by use of introducing into a motion equation some numerical parameter. A set of values of parameters for which the stability is kept is obtained.

Key words: approach of singular perturbations, parametric stability, Lyapunov function.

Введение.

Необходимость автоматизации управления полета самолетов первоначально была обусловлена их недостаточной устойчивостью и управляемостью. Полет на таких самолетах требовал высокой техники пилотирования. Использование автоматических средств стабилизации самолета по крену и тангажу, [2, 5], облегчало труд пилота и полет становился менее опасным. По мере увеличения продолжительности и дальности полетов возникла потребность разгрузить экипаж от утомительных и однообразных функций стабилизации самолета не только по крену и тангажу, но и по курсу.

На ранних этапах развития авиационной техники, вождение самолетов по заданной траектории осуществлялось простейшими визуальными методами навигации путем наблюдения за наземными ориентирами. Развитие инструментальных методов навигации позволило осуществить автоматическое управление полетом самолетов в крейсерском полете по маршруту. Автоматическое управление траекторным движением самолета на маршруте обеспечивает лишь эпизодическое участие или практически полное невмешательство пилота в процесс управления. Благоприятное влияние автоматики на процесс управления полетом самолета проявляется в улучшении качества переходных процессов возвращения самолета к исходной траектории после непроизвольного отклонения под действием внешних возмущений. Так осуществляется автоматическая стабилизация траекторного движения на маршруте [4].

В данной работе задача об автоматическом управлении продольным движением самолета рассмотрена при учете наличия некоторых неопределенных параметров в системе дифференциальных уравнений, которая описывает реальную механическую систему. Это может быть обусловлено многими факторами, как то, неточностью измерений, наличием неучтенных воздействий на элементы системы и.т.п. и является неотъемлемой частью любого реального процесса. Концепция параметрической устойчивости [6] позволяет учитывать наличие неопределенных параметров и делать вывод об устойчивости решений исследуемой системы дифференциальных уравнений, суть о сохранении определенной характеристики механической системы, для всех значений таких параметров из некоторой области. В контексте исследования автоматического регулирования полетом самолета это даст возможность, в частности, повысить качество функционирования органов управления и увеличить безопасность полета.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим продольное движение легкого самолета, принимая, что вектор скорости его центра масс лежит в плоскости симметрии, которой обладает исследуемый летательный аппарат (рис. 1).

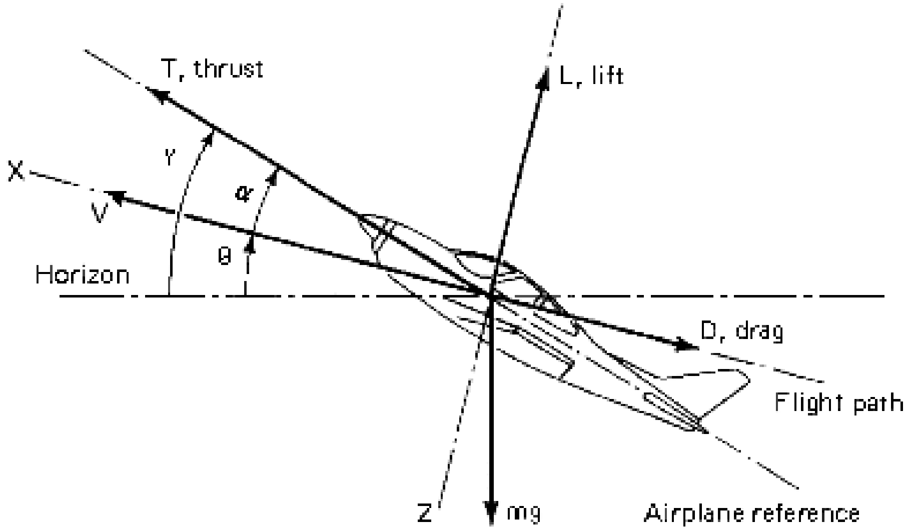

Рис. 1

Также предполагаем, что движение происходит в пределах атмосферы на высоте 11 км. Число Маха $M = 0{,}9$. В этом случае линеаризированные уравнения движения объекта [1] с учетом управления, которое реализуется посредством изменения положения руля высоты, имеют вид

$$\frac{d\xi}{d\tau} = A\xi + \beta\delta \quad [\ \xi^T = (\vartheta\ \theta\ \alpha\ q)\ ,\ \beta^T = (0\ 0\ 0 - n_\beta)\ ];$$

$$A = \begin{pmatrix} -n_{11} & -n_{13} & -n_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ n_{21} & n_{23} & -n_{22} & 1 \\ -n_{31} - n_0 n_{21} & -n_0 n_{23} & -n_{32} + n_0 n_{22} & -n_0 - n_{33} \end{pmatrix};$$

$$n_{11} = 0{,}024\ ;\ \ n_{12} = -0{,}11\ ;\ \ n_{13} = 0{,}2\ ;\ \ n_{21} = -0{,}4\ ;\ \ n_{22} = 2{,}4\ ;$$

$$n_{23} = 0\ ;\ \ n_{31} = 0\ ;\ \ n_{32} = 38\ ;\ \ n_{33} = 2{,}45\ ;\ \ n_0 = 0{,}4\ ;\ \ n_\beta = 49\ ;$$

ϑ – приращение скорости; θ – приращение угла тангажа; α – приращение угла атаки; q – приращение скорости изменения угла тангажа; δ – отклонение руля высоты; τ – время, соответствующее быстрому движению. Отметим, что указанные переменные безразмерные и им лишь придан смысл тех же размерных величин. Элементы матрицы A и вектора β также безразмерные. Примем, что они заданы неточно, т. е. в следствие, например, неидеальности измерительных приборов их значения получены с некоторой погрешностью. Таким образом, вместо исходной системы будем рассматривать систему

$$\frac{d\xi}{d\tau} = A(p)\xi + \beta(p)\delta, \tag{1}$$

где элементы матрицы $A(p)$ и вектора $\beta(p)$ некоторым образом непрерывно зависят от параметра $p \in P \subseteq R$, причем примем, что $A(p^*) = A$ и $\beta(p^*) = \beta$, где $p^* \in P$.

Пусть управление углом тангажа задано [1, 3] соотношением

$$\delta_e = k_1\theta + k_2 q, \tag{2}$$

где $k_1, k_2 \in R$ – параметры управления. Автопилот, который реализует управление (2), должен реагировать на отклонения от равновесных значений переменных (в контексте выбора переменных системы в виде прироста определенных величин равновесными принимаем их нулевые значения) и обеспечивать возврат к таковым. Управление будет тем лучше, чем быстрее и с наименьшим отклонением от равновесных величин происходит стабилизация движения летательного аппарата.

В данной работе с помощью так называемого сингулярно возмущенного подхода получены соотношения на параметры управления, которое обеспечит устойчивость нулевого состояния равновесия системы (1), суть стабилизирует полет самолета при возможных отклонениях от заданного курса. Также, используя концепцию параметрической устойчивости, получена оценка на величину возможных параметрических возмущений элементов матрицы A и вектора β, при которых устойчивость нулевого состояния равновесия системы (1) сохранится.

2. Переход к сингулярно возмущенной форме уравнений движения.

Известно, что система дифференциальных уравнений (1), которая описывает продольное движение самолета, включает в себя переменные, которые изменяются с разной скоростью. Поэтому представим ее в сингулярно возмущенной форме, для чего необходимо перейти от «быстрого» времени τ, относительно которого рассматривается система (1), к «медленному» времени t, связанному с τ соотношением $\tau = \tau_a t$, где $\tau_a = 3,8$ численно равно аэродинамической постоянной летательного аппарата [1], и провести соответствующую замену переменных [7]. Для этого запишем систему (1) в виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \dfrac{d\nu_1}{dt} \\ \varepsilon \dfrac{d\nu_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon F_{111}(p) & F_{120}(p) \\ \varepsilon F_{211}(p) & F_{220}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon f_{111}(p) & f_{120}(p) \\ \varepsilon f_{211}(p) & f_{220}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\Big(\nu_1^T = \begin{pmatrix} \vartheta & \theta \end{pmatrix};\ \nu_2^T = \begin{pmatrix} \alpha & q \end{pmatrix};\ \varepsilon = \frac{1}{\tau_a};\ F_{111}(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{-n_{11}(p)}{\varepsilon} & \dfrac{-n_{13}(p)}{\varepsilon} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$F_{120}(p) = \begin{pmatrix} -n_{12}(p) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\quad F_{211}(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{n_{21}(p)}{\varepsilon} & \dfrac{n_{23}(p)}{\varepsilon} \\ \dfrac{-n_{31}(p) - n_0(p)n_{21}(p)}{\varepsilon} & \dfrac{-n_0(p)n_{23}(p)}{\varepsilon} \end{pmatrix};$$

$$F_{220}(p) = \begin{pmatrix} -n_{22}(p) & 1 \\ -n_{32}(p) + n_0(p)n_{22}(p) & -n_0(p) - n_{33}(p) \end{pmatrix};\quad f_{111}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$f_{120}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\quad f_{211}(p, k_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-n_\beta(p)k_1}{\varepsilon} \end{pmatrix};\quad f_{220}(p, k_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -n_\beta(p)k_2 \end{pmatrix}\Bigg).$$

Воспользовавшись невырожденной заменой переменных

$$y = \nu_2,\; x = \nu_1 - F_{120}(p^*)F_{220}^{-1}(p^*)\nu_2,$$

где $F_{220}^{-1}(p^*)$, очевидно, существует, систему (3) представим в виде

$$\dot{x} = A_{11}(p, k_1)x + A_{12}(p, k_1, k_2)y;$$

$$\varepsilon\dot{y} = A_{21}(p, k_1)x + A_{22}(p, k_1, k_2)y \qquad (4)$$

$$\Big[A_{11}(p,k_1) = F_{111}(p) + f_{111}(p) - F_{120}(p^*)F_{220}^{-1}(p^*)(F_{211}(p) + f_{211}(p,k_1));$$

$$A_{12}(p, k_1, k_2) = A_{11}(p, k_1)F_{120}(p^*)F_{220}^{-1}(p^*) + \frac{1}{\varepsilon}(f_{120}(p) - F_{120}(p^*)F_{220}^{-1}(p^*)f_{220}(p, k_2));$$

$$A_{21}(p,k_1) = \varepsilon(F_{211}(p) + f_{211}(p, k_1));$$

$$A_{22}(p, k_1, k_2) = \varepsilon(F_{211}(p) + f_{211}(p, k_1))F_{120}(p^*)F_{220}^{-1}(p^*) + F_{220}(p) + f_{220}(p, k_2)\Big].$$

Система дифференциальных уравнений (4) имеет стандартный вид системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений.

3. Исследование устойчивости состояния равновесия рассматриваемой системы.

После приведения системы дифференциальных уравнений (1) к сингулярно возмущенной форме (4) для исследования устойчивости ее нулевого состояния равновесия, суть нулевого состояния равновесия системы (1), применим подход, предложенный в работе [10].

Относительно системы (4) примем следующее предположение.

Предположение. Существуют такие параметры управления k_1 и k_2, что матрицы $A_{22}(p^*, k_1^*, k_2^*)$ и $A_0(p^*,k_1^*,k_2^*) = A_{11}(p^*, k_1^*) - A_{12}(p^*, k_1^*, k_2^*)A_{22}^{-1}(p^*, k_1^*, k_2^*)A_{21}(p^*, k_1^*)$ устойчивы.

Пусть $Q_1, Q_2 \in R^{2\times 2}$ – произвольные симметрические положительно определенные матрицы, а $P_1, P_2 \in R^{2\times 2}$ – симметрические положительно определенные матрицы, которые являются решениями алгебраических уравнений Ляпунова

$$A_0^T(p^*, k_1^*, k_2^*)P_1 + P_1A_0(p^*, k_1^*, k_2^*) = -Q_1;$$

$$A_{22}^T(p^*, k_1^*, k_2^*)P_2 + P_2A_{22}(p^*, k_1^*, k_2^*) = -Q_2;$$

которые, очевидно, разрешимы.

Рассмотрим векторную функцию $V(x, y) = (v_1(x)\, v_2(y))^T$, где $v_1(x) = x^T P_1 x$, $v_2(y) = = (y - \Phi(x))^T P_2(y - \Phi(x))$, $\Phi(x) = -A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)x$ и оценим производные ее компонент в силу системы (4). При этом имеем

$$\left.\frac{dv_1(x)}{dt}\right|_{(4)} = (A_{11}(p,k_1)x + A_{12}(p, k_1, k_2)y)^T P_1x + x^T P_1(A_{11}(p, k_1)x + A_{12}(p, k_1, k_2)y) =$$

$$= x^T(A_{11}(p, k_1) - A_{12}(p, k_1, k_2)A_{22}^{-1}(p, k_1, k_2)A_{21}(p, k_1))^T P_1x +$$

$$+ x^T P_1(A_{11}(p, k_1) - A_{12}(p, k_1, k_2)A_{22}^{-1}(p, k_1, k_2)A_{21}(p, k_1))x +$$

$$+(A_{12}(p,k_1,k_2)y + A_{12}(p,k_1,k_2)A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1))^T P_1 x +$$

$$+x^T P_1(A_{12}(p,k_1,k_2)y + A_{12}(p,k_1,k_2)A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)) =$$

$$= x^T A_0^T(p,k_1,k_2)P_1 x + x^T P_1 A_0(p,k_1,k_2)x +$$

$$+(y-\Phi(x))^T A_{12}(p,k_1,k_2)P_1 x + x^T P_1 A_{12}(p,k_1,k_2)(y-\Phi(x)) \le$$

$$\le \lambda_{\max}(A_0^T(p,k_1,k_2)P_1 + P_1 A_0(p,k_1,k_2)) + 2\|P_1 A_{12}(p,k_1,k_2)\|\|x\|\|y-\Phi(x)\|; \qquad (5)$$

$$\left.\frac{dv_2(y)}{dt}\right|_{(4)} = \left(\dot{y} - \frac{d\Phi(x)}{dx}\dot{x}\right)^T P_2(y-\Phi(x)) + (y-\Phi(x))^T P_2\left(\dot{y} - \frac{d\Phi(x)}{dx}\dot{x}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\varepsilon}A_{21}(p,k_1)x + \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(p,k_1,k_2)y + A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)(A_{11}(p,k_1)x + A_{12}(p,k_1,k_2)y)\right)^T \times$$

$$\times P_2(y-\Phi(x)) + (y-\Phi(x))^T P_2 \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\varepsilon}A_{21}(p,k_1)x + \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(p,k_1,k_2)y + A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)(A_{11}(p,k_1)x + A_{12}(p,k_1,k_2)y)\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}(y-\Phi(x))^T\left(A_{22}^T(p,k_1,k_2)P_2 + P_2 A_{22}(p,k_1,k_2)\right)(y-\Phi(x)) +$$

$$+x^T\left(A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)A_0(p,k_1,k_2)\right)^T P_2(y-\Phi(x)) +$$

$$+(y-\Phi(x))^T\left(A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)A_{12}(p,k_1,k_2)\right)^T P_2(y-\Phi(x)) +$$

$$+(y-\Phi(x))^T P_2\left(A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)A_0(p,k_1,k_2)\right)x +$$

$$+(y-\Phi(x))^T P_2\left(A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)A_{12}(p,k_1,k_2)\right)(y-\Phi(x)) \le$$

$$\le \left[\frac{1}{\varepsilon}\lambda_{\max}\left(A_{22}^T(p,k_1,k_2)P_2 + P_2 A_{22}(p,k_1,k_2)\right) +\right.$$

$$+\lambda_{\max}\left(\left(A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)A_{12}(p,k_1,k_2)\right)^T P_2 +\right.$$

$$\left.\left.+P_2\left(A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)A_{12}(p,k_1,k_2)\right)\right)\right]\|y-\Phi(x)\|^2 +$$

$$+2\left\|P_2 A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)A_0(p,k_1,k_2)\right\|\|x\|\|y-\Phi(x)\|. \qquad (6)$$

Введем обозначения:

$$\beta_1(p,k_1,k_2) = \lambda_{\max}\left(A_0^T(p,k_1,k_2)P_1 + P_1 A_0(p,k_1,k_2)\right);$$

$$\gamma_1(p,k_1,k_2) = 2\left\| P_1 A_{12}(p,k_1,k_2) \right\|;$$

$$\beta_2(p,k_1,k_2) = \lambda_{\max}\left(A_{22}^T(p,k_1,k_2)P_2 + P_2 A_{22}(p,k_1,k_2) \right);$$

$$\xi_2(p,k_1,k_2) =$$

$$= \lambda_{\max}\Bigg(\left(A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)A_{12}(p,k_1,k_2) \right)^T P_2 +$$

$$+P_2\left(A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)A_{12}(p,k_1,k_2) \right) \Bigg);$$

$$\gamma_2(p,k_1,k_2) = 2\left\| P_2 A_{22}^{-1}(p,k_1,k_2)A_{21}(p,k_1)A_0(p,k_1,k_2) \right\|.$$

Тогда, учитывая оценки $\lambda_{\min}(P_1)\|x\|^2 \le V_1(x) \le \lambda_{\max}(P_1)\|x\|^2$,

$$\lambda_{\min}(P_2)\|y-\Phi(x)\|^2 \le V_2(x) \le \lambda_{\max}(P_2)\|y-\Phi(x)\|^2$$

и соотношения (5), (6), для производной векторной функции $V(x,y)$ в силу системы (4) получим, аналогично [10], следующую оценку относительно конуса R_+^2:

$$\left.\frac{dV(x,y)}{dt}\right|_{(4)} \le A(p,k_1,k_2)V(x,y)$$

$$\left\{ A(p,k_1,k_2) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} \dfrac{\beta_1(p,k_1,k_2)}{\lambda_{\min}(P_1)} & \dfrac{\gamma_1^2(p,k_1,k_2)}{-\beta_1(p,k_1,k_2)\lambda_{\min}(P_2)} \\ \dfrac{\gamma_2^2(p,k_1,k_2)}{\left(-\dfrac{\beta_2(p,k_1,k_2)}{\varepsilon} - \xi_2(p,k_1,k_2) \right)\lambda_{\min}(P_1)} & \dfrac{\dfrac{\beta_2(p,k_1,k_2)}{\varepsilon} + \xi_2(p,k_1,k_2)}{\lambda_{\min}(P_2)} \end{array} \right) \right\}.$$

Далее сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение. Пусть выполняются условия Предположения 1 и имеет место неравенство

$$\beta_1(p^*,k_1^*,k_2^*)\left(\frac{\beta_2(p^*,k_1^*,k_2^*)}{\varepsilon} + \xi_2(p^*,k_1^*,k_2^*) \right) > \gamma_1(p^*,k_1^*,k_2^*)\gamma_2(p^*,k_1^*,k_2^*). \tag{7}$$

Тогда существует область $K \in R^2$ такая, что для каждой пары $(k_1,k_2) \in K$ нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (4) глобально асимптотически устойчиво для каждого значения параметра p из некоторго интервала P, причем $p^* \in P$ и $(k_1^*,k_2^*) \in K$.

Доказательство. Так как выполняются условия Предположения, $\beta_1(p,k_1,k_2)$, $\beta_2(p,k_1,k_2)$, $\xi_2(p,k_1,k_2)$, $\gamma_1(p,k_1,k_2)$, $\gamma_2(p,k_1,k_2)$ непрерывно зависят от k_1, k_2 и выполняется соотношение (7), то, очевидно, существует область $K \in R^2$, $(k_1^*,k_2^*) \in K$ такая, что выполняются неравенства

$$\beta_1(p^*, k_1, k_2) < 0; \tag{8}$$

$$\beta_2(p^*, k_1, k_2) < 0; \tag{9}$$

$$\beta_1(p^*, k_1, k_2)\left(\frac{\beta_2(p^*, k_1, k_2)}{\varepsilon} + \xi_2(p^*, k_1, k_2)\right) > \gamma_1(p^*, k_1, k_2)\gamma_2(p^*, k_1, k_2) \tag{10}$$

для всех $(k_1, k_2) \in K$. Выберем произвольно $(\overline{k_1}, \overline{k_2}) \in K$. Так как $\beta_1(p, k_1, k_2)$, $\beta_2(p, k_1, k_2)$, $\xi_2(p, k_1, k_2)$, $\gamma_1(p, k_1, k_2)$, $\gamma_2(p, k_1, k_2)$ непрерывно зависят от p и для выбранных $(\overline{k_1}, \overline{k_2}) \in K$ выполняются соотношения (8) – (10), то, очевидно, существует область $P \in R$, $p^* \in P$ такая, что выполняются неравенства

$$\beta_1(p, \overline{k_1}, \overline{k_2}) < 0; \tag{11}$$

$$\beta_2(p, \overline{k_1}, \overline{k_2}) < 0; \tag{12}$$

$$\beta_1(p, \overline{k_1}, \overline{k_2})\left(\frac{\beta_2(p, \overline{k_1}, \overline{k_2})}{\varepsilon} + \xi_2(p, \overline{k_1}, \overline{k_2})\right) > \gamma_1(p, \overline{k_1}, \overline{k_2})\gamma_2(p, \overline{k_1}, \overline{k_2}) \tag{13}$$

для всех $p \in P$. Выберем произвольно $\overline{p} \in P$. Очевидно, что будут справедливы соотношения

$$\beta_1(\overline{p}, \overline{k_1}, \overline{k_2}) < 0; \tag{14}$$

$$\beta_2(\overline{p}, \overline{k_1}, \overline{k_2}) < 0; \tag{15}$$

$$\beta_1(\overline{p}, \overline{k_1}, \overline{k_2})\left(\frac{\beta_2(\overline{p}, \overline{k_1}, \overline{k_2})}{\varepsilon} + \xi_2(\overline{p}, \overline{k_1}, \overline{k_2})\right) > \gamma_1(\overline{p}, \overline{k_1}, \overline{k_2})\gamma_2(\overline{p}, \overline{k_1}, \overline{k_2}). \tag{16}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dU}{dt} = A(\overline{p}, \overline{k_1}, \overline{k_2})U, \tag{17}$$

где матрица $A(\overline{p}, \overline{k_1}, \overline{k_2})$ задана выше, а $U = (u_1, u_2)^T \in R_+^2$. При выполнении неравенств (14) – (16) функция $f(U) = A(\overline{p}, \overline{k_1}, \overline{k_2})U$ удовлетворяет условию Важевского [11] относительно конуса R_+^2 и матрица $A(\overline{p}, \overline{k_1}, \overline{k_2})$ устойчива, т. е. система (17) является системой сравнения для системы дифференциальных уравнений (4), которая рассматривается для значений параметра $(\overline{p}$, $\overline{k_1}$, $\overline{k_2})$. Следовательно, нулевое состояние равновесия системы (4) при этих значениях параметра является глобально асимптотически устойчивым.

Таким образом показано, что область K существует и поскольку $(\overline{k_1}, \overline{k_2})$ произвольная точка этой области, то для всех пар $(k_1, k_2) \in K$ существует область P такая, что для всех $p \in P$, поскольку $\overline{p}$ произвольная точка области P, и выбранных (k_1, k_2) нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (4) глобально асимптотически устойчиво.

Таким образом, утверждение доказано.

Замечание 1. Следуя доказательству Утверждения, выбор области K и интервала P проводится согласно неравенствам (8) – (10) и (11) – (13), соответственно.

Замечание 2. Легко видеть, что Утверждение имеет место и при всех значениях малого параметра, меньших используемого в данной задаче, но больших нуля. Таким образом, соотношение (7) можно использовать для выбора верхней границы интервала изменения малого параметра ε .

4. Числовые результаты и их анализ.

Воспользуемся полученными результатами по устойчивости нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (4) для выбора параметров управления (2) и получения области P возможных параметрических возмущений, при которых устойчивость нулевого состояния равновесия системы (4) сохранится.

Параметры управления k_1^* и k_2^* выберем, исходя из условий Предположения. Причем, учитываем, что $A(p^*) = A$ и $\beta(p^*) = \beta$, т. е. выбор параметров управления k_1^* и k_2^* проводится для системы (4) без параметрических возмущений. Выбрав $k_1^* = 0,35$ $k_2^* = 0,7$, убедимся, что матрицы $A_{22}(p^*, k_1^*, k_2^*)$ и $A_0(p^*, k_1^*, k_2^*)$ устойчивы, то есть условия Предположения 1 выполнены. При этом выполняется и соотношение (7), т. е. нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (4) при выбранных параметрах управления глобально асимптотически устойчиво. Выберем $Q_1 = Q_2 = I^{2\times 2}$ – единичная матрица размерности 2×2 и вычислим

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1,7718 & -0,67748 \\ -0,67748 & 0,8898 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0,384 & -8,16\times 10^{-3} \\ -8,16\times 10^{-3} & 0,0136 \end{pmatrix}.$$

Выбор области $K \in R^2$, согласно доказательству Утверждения, проведем таким образом, чтобы для всех $(k_1, k_2) \in K$ выполнялись условия (8) – (10). Область изображена на рис. 2.

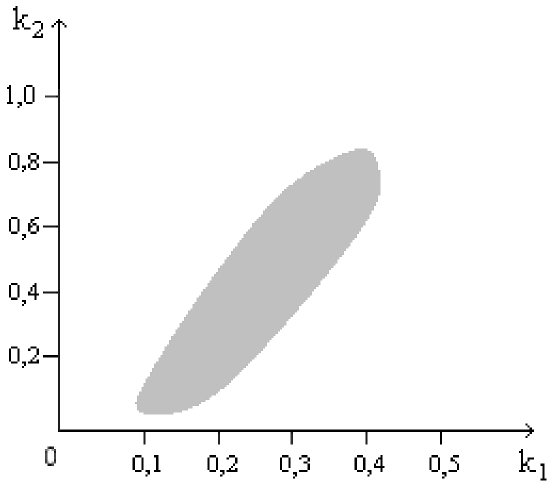

Рис. 2

Пусть параметрические возмущения таковы, что элементы матрицы $A(p)$ и вектора $\beta(p)$ имеют вид

$$n_{11} = 0,24 + pe^p; \; n_{12}(p) = -0,11 - \sin(p);$$

$$n_{13}(p) = 0,2; \; n_{21}(p) = -0,4 + p; \; n_{22}(p) = 2,4 + p\sin(p);$$

$$n_{23}(p) = p; \; n_{31}(p) = p; \; n_{32}(p) = 38 + p;$$

$$n_{33}(p) = 2,45e^p,\ n_0(p) = 0,4\cos(p),\ n_\beta(p) = 49 + p.$$

Отметим, что при $p^* = 0$ $A(p^*) = A$ и $\beta(p^*) = \beta$. Определим величину параметрических возмущений, при которой сохранится устойчивость нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (4) для выбранных параметров управления k_1^* и k_2^*. Согласно доказательству Утверждения 1, выбор области P проводится таким образом, чтобы для всех $p \in P$ выполнялись соотношения (11) – (13), где $\overline{k_1} = k_1^*$, $\overline{k_2} = k_2^*$. Область P получим в виде отрезка $P = [-0,02,\ 0,69]$.

Таким образом, при всех $p \in P$ управление $\delta_e = k_1^*\theta + k_2^*q$ стабилизирует нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (4), суть указанное управление стабилизирует горизонтальный полет легкого самолета при возможных его отклонениях от горизонтали с учетом возможных неточностей построенной модели. Отметим, что свойство асимптотической устойчивости горизонтального полета легкого самолета является глобальным, т. е. не зависит от величины возмущений начальных значений.

На рис. 3 – 6 показано поведение решений системы дифференциальных уравнений (1). Управление имеет вид (2), параметры управления $k_1 = 0,35$; $k_2 = 0,7$. Выбрано значение параметра $p = 0,5$, которое принадлежит области P. Начальные значения переменных $\vartheta = 0$; $\theta = 1$; $\alpha = 1$; $q = 0$, что соответствует задаче устранения автопилотом начального отклонения угла тангажа.

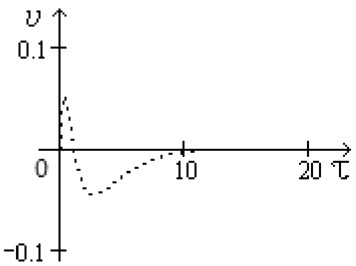

Рис. 3

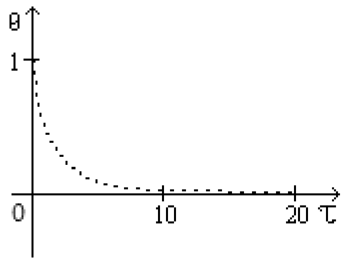

Рис. 4

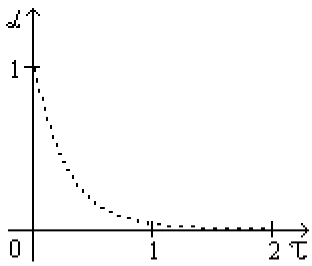

Рис. 5

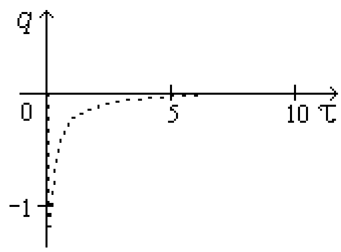

Рис. 6

На рис. 7 – 10 показано поведение решений системы дифференциальных уравнений (1). Управление имеет вид (2), параметры управления $k_1 = 0,35$; $k_2 = 0,7$. Выбрано значение параметра $p = 0,6$, которое принадлежит области P. Начальные значения переменных $\vartheta = 0$; $\theta = 0$; $\alpha = 1$; $q = 0$, что соответствует задаче устранения автопилотом вертикального ветрового возмущения.

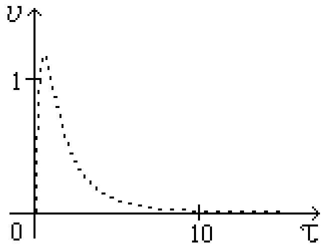

Рис. 7

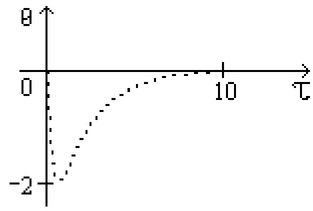

Рис. 8

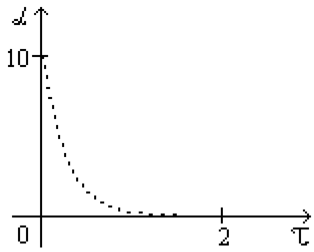

Рис. 9

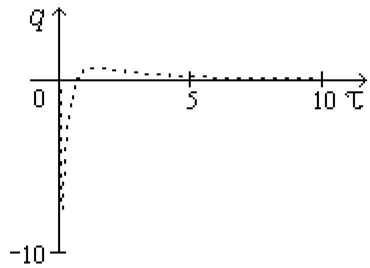

Рис. 10

Отметим, что графики поведения решений исходной системы получены в «быстром» времени. Если есть необходимость получить их в «медленном» времени, значения абсцисс необходимо умножить на $3{,}8$.

Заключение.

В статье исследована устойчивость горизонтального полета легкого самолета, управление которым реализуется посредством отклонения рулей высоты. Принято также, что система, с помощью которой моделируется исследуемый объект [9], составлена, возможно, с некоторой степенью неточности, что отвечает наличию численного параметра, входящего в уравнения движения. Применение подхода сингулярных возмущений позволяет свести исходную линеаризированную систему дифференциальных уравнений к сингулярно возмущенному виду и применить для исследования устойчивости ее нулевого состояния равновесия подход, основанный на концепции параметрической устойчивости [6, 10].

Отметим, что устойчивость нулевого состояния равновесия исходной линейной системы можно исследовать, используя условия Рауса – Гурвица. Однако, наличие существенно нелинейных параметрических возмущений системы дифференциальных уравнений, как в рассматриваемом примере, делает эту задачу трудноразрешимой. Использование же предложенного подхода позволяет учитывать параметрические возмущения любой степени сложности. Представляет интерес также развитие данного подхода в контексте работ [8, 12].

Р Е З Ю М Е . Використовуючи підхід сингулярних збурень, досліджено стійкість горизонтального руху легкого літака. Враховано можливі неточності моделювання за допомогою введення у рівняння руху деякого числового параметра. Отримано множину значень параметрів, при яких стійкість зберігається.

1. *Боднер В.А.* Теория автоматического управления полетом. – М.: Наука, 1964. – 700 с.
2. *Боднер В.А.*, Козлов М.С. Стабилизация летательных аппаратов и автопилоты. – М.: Оборонгиз, 1961. – 508 с.
3. *Воробьев В.Г.*, Кузнецов С.В. Автоматическое управление полетом самолетов: Учеб. для вузов. – М.: Транспорт, 1995. – 448 с.
4. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973. – 560 с.
5. *Etkin B., Reid L.D.* Dynamics of Flight: Stability and Control. – Canada: John Willey and Sons, 1995. – 382 p.
6. *Ikeda, Y. Ohta, D.D.*, Ŝiljak Parametric stability // The Ohio State University Joint Conference: (Proc. of the Univesitádi Genova). – Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1991. – P. 1 – 20.
7. *Kokotovic P., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. – London: Academic Press, 1986. – 371 p.
8. *Larin V.B., Tunik A.A.* Improvement of Aircraft's Capability of Tracking the Reference Trajectory // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 601 – 606.
9. *Martynyuk A. A.* Elements of the Theory of Stability of Hybrid Systems (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 243 – 302.
10. *Martynyuk A.A., Khoroshun A.S.* Parametric Stability of Singularly Perturbed Nonlinear Uncertain Systems // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 10. – P. 1177 – 1189.
11. *Wazewski T.* Certaines propositions de caractere "epidermique" relatives aux inegalites differentielles // Ann. Sci. Polon. Math. – 1952. – N 24. – P. 1 – 12.
12. *Zakrzhevskii A.E., Khoroshilov V.S.* Dynamics of an Unstabilized Spacecraft During the Deployment of an Elastic Pantograph Structure Trajectory // Int. Appl. Mech. – 2015. – **50**, N 3. – P. 341 – 351.

Поступила 15.07.2014 Утверждена в печать 22.12.2015