

А.Я. Григоренко, Т.Л. Ефимова, Ю.А. Коротких

## ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ НЕПРЕРЫВНО НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; t-mail:efimovatl@yandex.ru*

**Abstract.** Basing on the three-dimensional theory of elasticity and the refined Timoshenko – Mindlin theory of shells, a problem on the free axisymmetric vibrations of cylindrical shell from the functionally gradient material is considered for different boundary conditions on ends. A capability of application of the refined theory of shells is studied for shells from materials with properties continuously changing along the thickness coordinate. Also, an effect of different laws of changing the mechanical properties on dynamical characteristics of cylindrical shells under axisymmetric vibrations is studied. The numerical data are presented and analyzed.

**Key words:** cylindrical shell, free axisymmetric vibrations, functionally gradient material, three-dimensional theory of elasticity, Timoshenko – Mindlin theory of shells.

### **Введение.**

Появление в последние годы новых технологий в материаловедении позволили создать новые материалы с прогнозируемыми свойствами, среди которых можно выделить непрерывно неоднородные материалы (ННМ). Такие материалы имеют плавно изменяющиеся механические свойства в некотором направлении без каких-либо слоев или границ раздела и могут быть созданы на основе композиции двух металлов, металла и керамики или двух полимеров, причем физические свойства таких материалов можно регулировать, задавая необходимое распределение модуля упругости в каком-либо из направлений. Механической моделью таких материалов часто выбирается модель изотропного непрерывно неоднородного в направлении изменения упругих свойств материала [2, 4, 6, 9 – 12].

Общим задачам теории упругости тел из гипотетических ННМ посвящены в работы [7, 8]. Колебания толстостенных цилиндров из полимерных композиционных ННМ на основе трехмерной теории упругости рассмотрены в работе [2]. Однако следует отметить, что применение трехмерной теории для задач динамики тел из ННМ в большинстве случаев является проблематичным. В работах [6, 9 – 12] исследованы свободные колебания тел цилиндрической формы из ННМ на основе теорий оболочек. При этом основное внимание уделено изменению динамических характеристик в зависимости от закона изменения упругих свойств. Интересным является исследование возможности использования оболочечных теорий для свободных колебаний полых цилиндрических тел из существенно неоднородного по толщине материала.

В настоящем сообщении рассмотрены вопросы как возможности применения уточненной теории оболочек Тимошенко – Миндлина к задачам о свободных колебаниях цилиндрических оболочек с плавно меняющимися по толщине механическими параметрами, так и влияния различных законов изменения свойств на динамические характеристики цилиндрических оболочек при радиально продольных осесимметричных колебаниях. При этом используется метод сплайн-коллокации совместно с методом пошагового поиска и дискретной ортогонализации [2, 3, 5].

## 1. Постановка задачи. Основные соотношения.

**1.1. Теория оболочек Тимошенко – Миндлина.** Рассмотрим задачу о свободных колебаниях круговых цилиндрических оболочек из ННМ с градиентом изменения упругих свойств в направлении, перпендикулярном срединной поверхности оболочки, на основе уточненной модели Тимошенко, которая базируется на гипотезе прямой линии. Суть этой гипотезы состоит в том, что прямолинейный элемент нормали исходной координатной поверхности при малых деформациях сохраняет свою длину и прямолинейность, но не остается нормальным к ней. Согласно принятой гипотезе в системе координат  $\gamma, \theta, z$ , связанной со срединной поверхностью оболочки ( $\gamma$  – координата в направлении нормали срединной поверхности,  $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq L$ ), малые перемещения точек можно записать в виде

$$u_\gamma(\gamma, \theta, z, t) = w(\theta, z, t); \quad u_\theta(\gamma, \theta, z, t) = v(\theta, z, t) + \gamma\psi_\theta(\theta, z, t);$$

$$u_z(\gamma, \theta, z, t) = u(\theta, z, t) + \gamma\psi_z(\theta, z, t), \quad (1)$$

где  $u(\theta, z, t)$ ,  $v(\theta, z, t)$ ,  $w(\theta, z, t)$  – перемещения координатной поверхности;  $\psi_\theta(\theta, z, t)$ ,  $\psi_z(\theta, z, t)$  – функции, характеризующие независимый полный поворот нормали.

В соответствии с (1) выражения для деформаций записываем в виде

$$e_\theta(\gamma, \theta, z, t) = \varepsilon_\theta(\theta, z, t) + \gamma\kappa_\theta(\theta, z, t);$$

$$e_z(\gamma, \theta, z, t) = \varepsilon_z(\theta, z, t) + \gamma\kappa_z(\theta, z, t);$$

$$e_{\theta z}(r, \theta, z, t) = \varepsilon_{\theta z}(\theta, z, t) + 2\gamma\kappa_{\theta z}(\theta, z, t); \quad (2)$$

$$e_{\gamma\theta}(r, \theta, z, t) = \gamma_\theta(\theta, z, t); \quad e_{\gamma z}(r, \theta, z, t) = \gamma_z(\theta, z, t).$$

Здесь  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_{\theta z}$  – тангенциальные деформации координатной поверхности;  $\kappa_\theta$ ,  $\kappa_z$ ,  $\kappa_{\theta z}$  – компоненты изгибной деформации;  $\gamma_\theta$ ,  $\gamma_z$  – углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами.

Связь деформаций и перемещений срединной поверхности оболочки определяется формулами

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \kappa_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z};$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w \right); \quad 2\kappa_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}; \quad (3)$$

$$\gamma_\theta = \psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v; \quad \gamma_z = \psi_z + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Уравнения движения элемента координатной поверхности имеют вид

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial \psi_z}{\partial t^2}; \quad \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\theta = I_0 \frac{\partial v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial \psi_z}{\partial t^2}; \quad (4)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta = I_1 \frac{\partial v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2},$$

причем  $N_{z\theta} - M_{\theta z} R^{-1} - N_{\theta z} = 0$ . Здесь  $N_z, N_\theta, N_{\theta z}, N_{z\theta}$  – тангенциальные усилия,  $Q_\theta, Q_z$  – перерезывающие усилия,  $M_\theta, M_z, M_{\theta z}, M_{z\theta}$  – изгибающие и крутящие моменты,  $\rho(\gamma)$  – плотность материала оболочки. Входящие в уравнения (4) инерционные члены уравнений  $I_0, I_1, I_2$  вычисляются с учетом наличия градиента упругих свойств следующим образом:

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(\gamma) d\gamma; \quad I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(\gamma) \gamma d\gamma; \quad I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(\gamma) \gamma^2 d\gamma. \quad (5)$$

Соотношения упругости для цилиндрически оболочек из непрерывно неоднородного материала (ННМ) с учетом отсутствия симметрии упругих свойств относительно срединной поверхности имеют вид:

$$\begin{aligned} N_z &= C_{11} \varepsilon_z + C_{12} \varepsilon_\theta + K_{11} \kappa_z + K_{12} \kappa_\theta; \quad N_\theta = C_{12} \varepsilon_z + C_{22} \varepsilon_\theta + K_{12} \kappa_z + K_{22} \kappa_\theta; \\ N_{z\theta} &= C_{66} \varepsilon_{\theta z} + 2D_{66} R^{-1} \kappa_{\theta z}; \quad M_z = K_{11} \kappa_z + K_{12} \kappa_\theta + D_{11} \kappa_z + D_{12} \kappa_\theta; \\ M_\theta &= K_{12} \kappa_z + K_{12} \kappa_\theta + D_{12} \kappa_z + D_{22} \kappa_\theta; \quad M_{\theta z} = M_{z\theta} = 2D_{66} \kappa_{\theta z}; \\ Q_\theta &= K_2 \gamma_\theta; \quad Q_z = K_1 \gamma_z; \quad N_{\theta z} = C_{66} \varepsilon_{\theta z}, \end{aligned} \quad (6)$$

где для жесткостных характеристик оболочки, приведенных к координатной поверхности, имеем формулы:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{11}(\gamma) d\gamma; \quad C_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{12}(\gamma) d\gamma; \quad C_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{22}(\gamma) d\gamma; \quad C_{66} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{66}(\gamma) d\gamma; \\ K_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{11}(\gamma) \gamma d\gamma; \quad K_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{12}(\gamma) \gamma d\gamma; \quad K_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{22}(\gamma) \gamma d\gamma; \quad K_1 = \int_{-h/2}^{h/2} G(\gamma) d\gamma; \\ D_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{11}(\gamma) \gamma^2 d\gamma; \quad D_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{12}(\gamma) \gamma^2 d\gamma; \quad D_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{22}(\gamma) \gamma^2 d\gamma; \\ D_{66} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{66}(\gamma) \gamma^2 d\gamma; \quad B_{11}(\gamma) = B_{22}(\gamma) = E(\gamma) / (1 - \nu^2(\gamma)); \end{aligned} \quad (7)$$

$$B_{12}(\gamma) = \nu(\gamma) E(\gamma) / (1 - \nu^2(\gamma)); \quad B_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)};$$

$E, G, \nu$  – модули упругости, сдвига и коэффициент Пуассона, соответственно, которые для данного материала с направлением градиента вдоль толщиной координаты являются функциями координаты  $\gamma$ .

На торцах  $z = 0$  и  $z = L$  рассмотрим следующие граничные условия:

- 1) контур жестко закреплен –  $u = v = w = 0; \psi_\theta = \psi_z = 0;$
- 2) контур шарнирно опертый и свободный в направлении образующей –  $\partial u / \partial z = 0; v = w = 0; \partial \psi_z / \partial z = \psi_\theta = 0;$

3) контур свободен –  $N_z = 0$ ,  $M_z = 0$ ,  $Q_z = 0$ .

При рассмотрении осесимметричных свободных колебаний (при этом все функции, входящие в уравнения (3), (4), (6), не зависят от  $\theta$ , а их производные по  $\theta$  равны нулю, т.е.  $\partial f / \partial \theta = 0$ ) система уравнений движения (4) распадается на две независимые системы, одна из которых соответствует радиально-продольным, а вторая – крутильным колебаниям. При этом уравнения движения радиально-продольных колебаний принимают такой вид:

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} = I_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial Q_z}{\partial z} - \frac{1}{R} N_\theta = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_z}{\partial z} - Q_z = I_1 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Упрощаются и уравнения связи с перемещениями срединной поверхности тангенциальных и изгибных деформаций срединной поверхности, а также угла поворота нормали, обусловленного поперечными сдвигами, т.е.

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} w; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \kappa_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}; \quad \kappa_\theta = \frac{1}{R^2} w; \quad \gamma_z = \psi_z + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (9)$$

Необходимые соотношения упругости с учетом рассмотрения радиально-продольных колебаний запишем в виде

$$N_z = C_{11} \varepsilon_z + C_{12} \varepsilon_\theta + K_{11} \kappa_z + K_{12} \kappa_\theta; \quad N_\theta = C_{12} \varepsilon_z + C_{22} \varepsilon_\theta + K_{12} \kappa_z + K_{22} \kappa_\theta; \quad (10)$$

$$M_z = K_{11} \kappa_z + K_{12} \kappa_\theta + D_{11} \kappa_z + D_{12} \kappa_\theta; \quad M_\theta = K_{11} \kappa_z + K_{12} \kappa_\theta + D_{11} \kappa_z + D_{12} \kappa_\theta; \quad Q_z = K_1 \gamma_z.$$

Далее предполагаем, что все точки цилиндрической оболочки совершают гармонические колебания с круговой частотой  $\omega$ , т. е.

$$\{u(z, t), w(z, t), \psi_z(z, t)\} = \{\tilde{u}(z), \tilde{w}(z), \tilde{\psi}_z(z)\} e^{i\omega t} \quad (\text{далее знак } \sim \text{ опускаем}). \quad (11)$$

Запишем систему уравнений (8) – (10) с учетом (11) в перемещениях:

$$C_{11} \frac{d^2 u}{dz^2} + K_{11} \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} = -I_0 \omega^2 u - C_{12} \frac{1}{R} \frac{dw}{dz} + K_{12} \frac{1}{R^2} \frac{dw}{dz} - I_1 \omega^2 \psi_z;$$

$$K_{11} \frac{d^2 u}{dz^2} + D_{11} \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} = -I_1 \omega^2 u - K_{12} \frac{1}{R} \frac{dw}{dz} + D_{12} \frac{1}{R^2} \frac{dw}{dz} + K_1 \frac{dw}{dz} + K_1 \psi_z - I_1 \omega^2 \psi_z; \quad (12)$$

$$\frac{d^2 \psi_z}{dz^2} = \frac{C_{12}}{K_1} \frac{1}{R} \frac{du}{dz} + \frac{C_{22}}{K_1} \frac{1}{R^2} w + \frac{K_{22}}{K_1} \frac{1}{R^2} w - \frac{I_0}{K_1} \omega^2 w - \frac{d\psi_z}{dz} + \frac{K_{12}}{K_1} \frac{1}{R} \frac{d\psi_z}{dz},$$

которая после преобразований примет такой вид:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{-D_{11} I_0 + K_{11} I_1}{\Delta} \omega^2 u + \frac{-D_{11} I_1 \omega^2 + K_{11} I_2 \omega^2 - K_{11} K_1}{\Delta} \psi_z +$$

$$+ \frac{D_{11} K_{12} - D_{12} K_{11}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz} + \frac{K_{11} K_{12} - D_{11} C_{12}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz} - \frac{K_{11} K_1}{\Delta} \frac{dw}{dz}; \quad (13)$$

$$\frac{d\psi_z^2}{dz} = -\frac{C_{11} I_0 \omega^2}{\Delta} u - \frac{C_{11} I_2 \omega^2}{\Delta} \psi_z + \frac{K_1 C_{11}}{\Delta R^2} \psi_z + \frac{-C_{11} K_{12}}{\Delta} \frac{dw}{dz} + \frac{D_{11} C_{11}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz} + \frac{C_{11} K_1}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz};$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{C_{22}}{K_1} \frac{1}{R^2} w - \frac{I_0}{K_1} \omega^2 w + \frac{K_{22}}{K_1} \frac{1}{R^2} w + \frac{C_{12}}{K_{11}} \frac{1}{R} \frac{du}{dz} - \frac{d\psi_z}{dz} - \frac{K_{12}}{K_1} \frac{1}{R} \frac{d\psi_z}{dz} + \frac{D_{11} C_{11}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz}.$$

Таким образом, задача на собственные значения сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (13) при соответствующих условиях (при  $z = 0$  и  $z = L$ ).

**1.2. Трехмерная теория упругости.** Рассмотрим в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  толстостенную цилиндрическую оболочку длины  $L$  постоянной толщины с внутренним радиусом  $R - H$  и внешним  $R + H$  ( $R$  – радиус срединной поверхности,  $2H$  – толщина оболочки), изготовленную из НМ с направлением изменения упругих свойств, перпендикулярным срединной поверхности. В случае осесимметричных радиально-продольных колебаний компоненты вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций не зависят от окружной координаты  $\theta$ . При этом уравнения движения упрощаются и принимают такой вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho(r) \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho(r) \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Соотношения Коши для осесимметричного случая запишем так:

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad e_\theta = \frac{1}{r} u_r; \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad 2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (15)$$

Систему (14), (15) дополняют соотношения обобщенного закона Гука для ортотропного упругого тела

$$\sigma_r = \lambda_{11} e_r + \lambda_{12} e_\theta + \lambda_{13} e_z; \quad \sigma_\theta = \lambda_{12} e_r + \lambda_{22} e_\theta + \lambda_{23} e_z; \quad (16)$$

$$\sigma_z = \lambda_{13} e_r + \lambda_{23} e_\theta + \lambda_{33} e_z; \quad \sigma_{rz} = 2\lambda_{55} e_{rz}.$$

Элементы матрицы жесткости  $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(r)$ , а также плотность материала цилиндра  $\rho(r)$ , являются непрерывными и дифференцируемыми функциями радиальной координаты  $r$ . Здесь  $t$  – временная координата;  $u_r(r, z, t)$ ,  $u_z(r, z, t)$  – проекции вектора полного перемещения точек цилиндра в направлениях, касательных, соответственно, к координатным линиям  $r, z$ ;  $e_r(r, z, t)$ ,  $e_\theta(r, z, t)$ ,  $e_z(r, z, t)$  – относительные линейные деформации в направлении координатных линий;  $e_{rz}(r, z, t)$  – деформации сдвига;  $\sigma_r(r, z, t)$ ,  $\sigma_\theta(r, z, t)$ ,  $\sigma_z(r, z, t)$  – нормальные напряжения;  $\sigma_{rz}(r, z, t)$  – касательные напряжения.

Элементы  $\lambda_{ij}$  матрицы жесткости можно вычислить через элементы  $c_{ij}$  матрицы податливости по формулам

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = (c_{22}c_{33} - c_{23}^2) / \Delta; \quad \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = (c_{13}c_{23} - c_{12}c_{33}) / \Delta; \quad \lambda_{55} = 1 / c_{55};$$

$$\Delta = c_{11}(c_{22}c_{33} - c_{23}^2) - c_{12}(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23}) + c_{13}(c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}).$$

Элементы матрицы податливости можно выразить через технические постоянные:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = \frac{1}{E}; \quad c_{12} = c_{13} = c_{23} = -\frac{\nu}{E}; \quad c_{55} = -\frac{1}{G}, \quad (17)$$

где  $E(r)$  – модуль упругости;  $G(r)$  – модуль сдвига;  $\nu(r)$  – коэффициент Пуассона на непрерывно неоднородного материала.

Внутренняя и внешняя боковые поверхности оболочки  $r = R - H$  и  $r = R + H$  свободны от напряжений, а соответствующие граничные условия принимают вид

$$\sigma_r(R \pm H / 2, z, t) = 0; \quad \sigma_{rz}(R \pm H / 2, z, t) = 0. \quad (18)$$

На торцах при  $z = 0$  и  $z = L$  возможны условия:

$$1) \sigma_r = 0, \quad u_r = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad u_r = 0; \quad (19)$$

$$2) u_z = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad \text{или} \quad u_z = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0; \quad (20)$$

$$3) u_r = 0, \quad u_z = 0. \quad (21)$$

Предполагаем, что все точки оболочки совершают гармонические колебания с частотой  $\omega$ , т. е.  $\{u_r(r, z, t), u_z(r, z, t)\} = \{\tilde{u}_r(r, z), \tilde{u}_z(r, z)\} e^{i\omega t}$  (далее знак  $\sim$  опускаем).

Запишем разрешающие уравнения в перемещениях в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} = & \left( -\frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\lambda_{11}} \rho \omega^2 \right) u_r - \frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\lambda_{55}}{\lambda_{11}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \\ & - \left( \frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \left( \frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial r} - \frac{\lambda_{23} - \lambda_{13}}{\lambda_{11}} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ & - \frac{1}{\lambda_{11}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\lambda_{13} + \lambda_{55}}{\lambda_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = & -\frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial z} \frac{u_r}{r} - \left( \frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial r} + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{55}} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left( 1 + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{55}} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \\ & - \frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{\lambda_{55}} \rho \omega^2 u_z - \frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{33}}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{55}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda_{55}} \frac{\partial \lambda_{55}}{\partial r} \right) \frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned}$$

При этом граничные условия (18) на внутренней и внешней поверхностях принимают вид

$$\lambda_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda_{12} \frac{u_r}{r} + \lambda_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; \quad \lambda_{55} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0. \quad (23)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (22) вместе с соответствующими граничными условиями представляет собой задачу на собственные значения.

## 2. Методика решения задачи.

Задачу (13) с соответствующими граничными условиями решаем с использованием методов дискретной ортогонализации и пошагового поиска. Для этого, введя функции  $\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $\bar{\psi}_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}$ ,  $\bar{w} = \frac{\partial w}{\partial z}$  и  $\bar{Y} = \{u, \bar{u}, \psi_z, \bar{\psi}_z, w, \bar{w}\}^T$  – вектор-функцию, зависящую от  $z$ , систему (13) представим в виде

$$\frac{d\bar{Y}}{dz} = A(z, \omega) \bar{Y} \quad (0 \leq z \leq L), \quad (24)$$

где  $A(z, \omega)$  – квадратная матрица порядка  $6 \times 6$ . Граничные условия при  $z = 0$  и  $z = L$  для данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений запишем в виде

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{0}; \quad B_2 \bar{Y}(L) = \bar{0}, \quad (25)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  – прямоугольные матрицы порядка  $3 \times 6$ .

Краевую задачу (22), (23) на собственные значения можно решить, используя метод дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска [1 – 3]. Для вычисления инерционных членов (5) и соответствующих интегральных жесткостных характеристик (7) используем метод Ньютона – Котеса с автоматическим выбором шага.

Задачу (24) с соответствующими граничными условиями (25) можно решить с использованием метода сплайн-коллокации. Для этого разрешающие функции  $u_r(r, z)$ ,  $u_x(r, z)$  представим в виде

$$u_r = \sum_{i=0}^N u_{r_i}(r) \varphi_i^{(1)}(z); \quad u_z = \sum_{i=0}^N u_{z_i}(r) \varphi_i^{(2)}(z), \quad (26)$$

где  $u_{r_i}(r), u_{z_i}(r)$  – искомые функции переменной  $r$ ;  $\varphi_i^{(j)}(z)$  ( $j = 1, 2; i = 0, 1, \dots, N$ ) – линейные комбинации, учитывающие граничные условия при  $z = 0$  и  $z = L$ , B-сплайнов на равномерной сетке  $\Delta: 0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = L$ . В систему (22) входят производные от разрешающих функций по координате  $z$  не выше второго порядка, поэтому можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьей степени.

Подставляя соотношения (26) в уравнения (22), требуем их удовлетворения в заданных точках коллокации  $\xi_k \in [0, L]$ ,  $k = 0, N$ . Число узлов сетки (с учетом  $z_0$ ) – четное, т.е.  $N = 2n + 1$  ( $n \geq 3$ ). Число точек коллокации при этом –  $\bar{N} = N + 1$ . В результате получаем систему  $4(N + 1)$  линейных дифференциальных уравнений относительно функций  $u_{r_i}, \tilde{u}_{r_i}, u_{z_i}, \tilde{u}_{z_i}$  ( $i = 0, \dots, N$ ), т.е.

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = A(r, \omega) \bar{Y} \quad (R - H \leq r \leq R + H), \quad (27)$$

где  $\bar{Y} = \{u_{r_0}, \dots, u_{r_N}, \tilde{u}_{r_0}, \dots, \tilde{u}_{r_N}, u_{z_0}, \dots, u_{z_N}, \tilde{u}_{z_0}, \dots, \tilde{u}_{z_N}\}^T$  – вектор-функция, зависящая от  $r$ ,  $A(r, \omega)$  – квадратная матрица порядка  $4(N + 1) \times 4(N + 1)$ .

Граничные условия для данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений запишем в виде

$$B_1 \bar{Y}(R - H) = \bar{0}; \quad B_2 \bar{Y}(R + H) = \bar{0}, \quad (28)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  – прямоугольные матрицы порядка  $2(N + 1) \times 4(N + 1)$ .

Краевую задачу (27), (28) на собственные значения решаем, используя метод дискретной ортогонализации, совместно с методом пошагового поиска [1 – 3, 5].

### 3. Числовые результаты и их анализ.

3.1. Рассмотрим цилиндрическую оболочку двухкомпонентного ННМ, для которого упругие свойства, определяемые модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и плотностью  $\rho$  можно определить по концентрации входящих в композицию материалов. Предполагаем, что изменение упругих свойств направлено по толщинной координате. Связь между модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и плотностью  $\rho$  данного материала (ННМ) с соответствующими параметрами материалов, входящих в композицию, определим по формулам

$$E = (E_2 - E_1)V + E_1; \quad \nu = (\nu_2 - \nu_1)V + \nu_1; \quad \rho = (\rho_2 - \rho_1)V + \rho_1, \quad (29)$$

где  $E_1, \nu_1, \rho_1$  и  $E_2, \nu_2, \rho_2$  – механические параметры, соответственно, первого и второго материалов,  $V$  – концентрация второго из входящих материалов в зависимости от толщинной координаты  $\gamma$ . Для расчетов примем степенной закон изменения упругих свойств ННМ вдоль толщинной координаты  $V = (\gamma / h + 0, 5)^m$ .

Упругие параметры входящих в композицию материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Материал	$E$ , ГПа	$\nu$	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Алюминий	70	0,3	2707
SiC	427	0,17	3100

В табл. 2 представлены первые пять частот  $\bar{\omega}_i = \omega_i l_0 \sqrt{\rho_0 / G_0} \cdot 10^2$  свободных колебаний цилиндрической оболочки из ФГМ, вычисленные по трехмерной теории и теории Тимошенко – Миндлина для различных значений показателей  $m$  в степенном законе изменения свойств. Для обезразмеривания выбраны такие параметры:  $\rho_0 = 1$  кг/м<sup>3</sup>;  $G_0 = 1$  ГПа. Торцы оболочки шарнирно оперты. Геометрические параметры оболочки: длина оболочки  $L = 20l_0$ ; радиус  $R = 10l_0$ ; толщина  $h = 2l_0$ .

Таблица 2

$m$	Теория	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$
0,5	Тимошенко – Миндлина	3,1605	3,5005	4,6404	5,2606	6,5207
	Трехмерная	3,3005	3,6605	4,8407	5,5506	6,8507
2	Тимошенко – Миндлина	2,4805	2,7405	3,6005	4,2807	5,0604
	Трехмерная	2,5305	2,7905	3,6605	4,4307	5,1504
5	Тимошенко – Миндлина	2,0506	2,3505	3,1604	3,6206	4,5004
	Трехмерная	2,0853	2,3505	3,1406	3,7006	4,4304
10	Тимошенко – Миндлина	1,8671	2,1405	2,9605	3,2605	4,2204
	Трехмерная	1,8605	2,1305	2,9195	3,2005	4,1205

Анализ результатов (табл. 2) позволяет сделать вывод о малом отличии собственных частот цилиндрической оболочки из ННМ по указанным теориям. Следует отметить, что максимальное отличие частот, полученных с использованием указанных теорий, составляет  $\approx 5\%$ , происходит при значении  $m = 0,5$ . При остальных из рассматриваемых значений параметра  $m$  расхождение частот, полученных по различным теориям, не более 3%. Частоты, полученные по уточненной теории оболочек, для  $m = 0,5$  и  $m = 2$  по значениям – ниже соответствующих частот для трехмерной теории, а для  $m = 10$  – выше соответствующих частот для трехмерной теории. Для значения  $m = 5$  первая частота, рассчитанная по уточненной теории, лежит выше соответствующего значения по трехмерной теории, а третья, четвертая и пятая частоты, полученные по теории Тимошенко – Миндлина, лежат ниже аналогичных частот по трехмерной теории упругости.

Таблица 3

$\bar{\omega}$	$m$				
	0,5	1	2	5	10
$\bar{\omega}_1$	0,03161	0,02850	0,02481	0,02052	0,01861
$\bar{\omega}_2$	0,03500	0,03141	0,02740	0,02351	0,02142
$\bar{\omega}_3$	0,04643	0,04152	0,03600	0,03162	0,02964
$\bar{\omega}_4$	0,05265	0,04854	0,04281	0,03623	0,03262

Таблица 4

$\bar{\omega}$	$m$				
	0,5	1	2	5	10
$\bar{\omega}_1$	0,03606	0,03042	0,02661	0,02263	0,02001
$\bar{\omega}_2$	0,03901	0,03481	0,03033	0,02601	0,02442
$\bar{\omega}_3$	0,05242	0,04760	0,04184	0,03600	0,03260
$\bar{\omega}_4$	0,05360	0,04762	0,04240	0,03683	0,03493



В табл. 3 – 5 приведены первые четыре частоты  $\bar{\omega}_i = \omega_i l_0 \sqrt{\rho_0 / G_0}$  свободных колебаний, соответственно, для шарнирно опертой, для жестко заземленной по краям и свободной цилиндрических оболочек из ННМ, вычисленные по теории Тимошенко – Миндлина для различных значений параметра  $m$ .

Таблица 5

$\bar{\omega}$	$m$				
	0,5	1	2	5	10
$\bar{\omega}_1$	0,03160	0,02862	0,02481	0,02081	0,01860
$\bar{\omega}_2$	0,03181	0,02881	0,02543	0,02123	0,01901
$\bar{\omega}_3$	0,03262	0,02950	0,02588	0,02182	0,01983
$\bar{\omega}_4$	0,03926	0,03584	0,03062	0,02664	0,02467

Следует отметить, что с увеличением параметра  $m$  жесткость материала увеличивается, что приводит к уменьшению частот.

3.2. Рассмотрены колебания толстостенных оболочек из полимерных ННМ на основе трехмерной теории упругости. Следует отметить, что при создании к полимерным градиентным материалам выдвигаются следующие требования: поведение материала во всех градиентных зонах должно быть упругим, а не вязкоупругим с широким рабочим интервалом температур, в котором сохраняется градиент свойств. Причем необходимо иметь в виду, что абсолютно упругих полимерных ННМ не существует, и понятие упругого поведения применительно к полимерам условно (под упругим понимают такое поведение, при котором напряжение релаксирует очень медленно). Для полимерных ННМ пока не удается задавать закон изменения свойств с учетом свойств, входящих в композицию полимеров, и поэтому свойства ННМ определяются экспериментально [2].

В табл. 6 приведены частоты  $\bar{\omega} = \omega H \sqrt{\rho_{cp} / E_{cp}}$  свободных колебаний для цилиндров из полимерных ННМ с градиентным профилем, соответствующим квадратичному закону изменения модуля Юнга  $E(r) = ar^2 + br + c$ . Расчеты проведены с использованием трехмерной теории упругости.

Таблица 6

$\bar{\omega}_i$	Шарнирное опирание торцов			Жесткое закрепление торцов		
	I	II	III	I	II	III
$\bar{\omega}_1$	0,3094 (1)	0,2919 (1)	0,3019 (1)	0,4068	0,3917	0,4007
$\bar{\omega}_2$	0,5981 (2)	0,5869 (2)	0,5969 (2)	0,6053	0,6053	0,6176
$\bar{\omega}_3$	0,6543 (1)	0,6856 (1)	0,6788 (1)	0,6932	0,7321	0,7222
$\bar{\omega}_4$	0,9556 (3)	0,9531 (3)	0,9619 (3)	0,9776	0,9730	0,9830
$\bar{\omega}_5$	1,1269 (2)	1,1475 (1)	1,1844 (1)	1,1503	1,1441	1,1754
$\bar{\omega}_6$	1,1700 (1)	1,1681 (2)	1,1863 (2)	1,1961	1,2429	1,2639

При этом рассмотрены такие случаи:

I) спадающий модуль Юнга ( $E(R-H) = 243,0$  МПа,  $E(R) = 150,0$  МПа,  $E(R+H) = 110,0$  МПа,  $a = 26,5$  МПа,  $b = -278,5$  МПа,  $c = 839,5$  МПа);

II) возрастающий модуль Юнга ( $E(R-H) = 100,0$  МПа,  $E(R) = 150,0$  МПа,  $E(R+H) = 243,0$  МПа,  $a = 6,5$  МПа,  $b = -59,6$  МПа,  $c = 243$  МПа);

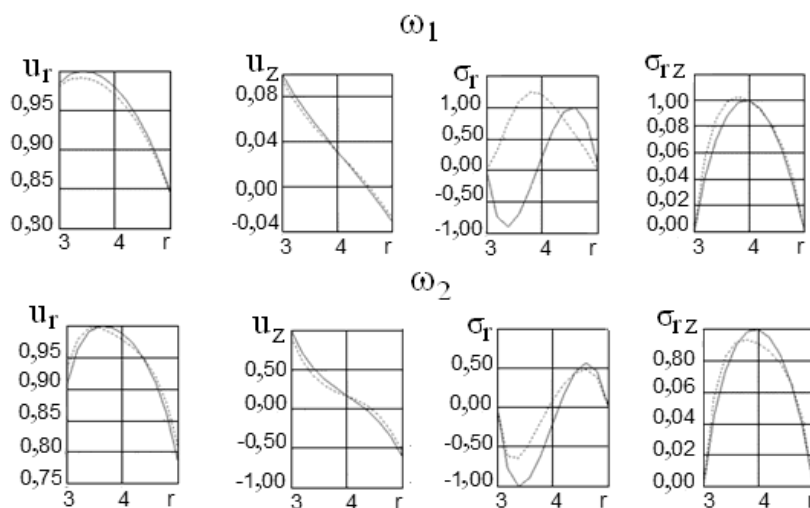
III) усредненный по толщине модуль Юнга  $E_{cp} = 158,33$  МПа.

Коэффициент Пуассона выбран равным  $\nu = 0,4$ , что связано с небольшим различием коэффициентов Пуассона для образующих ННМ полимерных материалов. Плот-

ность градиентного материала принято постоянной и равной усредненному значению по толщине  $\rho_{cp}$ . Геометрические параметры цилиндра такие: длина –  $L = 5$ ; внутренний радиус –  $R_{внут} = R - H = 3$ ; внешний –  $R_{внеш} = R + H = 5$ , что соответствует отношению  $H / R = 0,25$ . В табл. 6 (в круглых скобках) рядом с частотами указано количество полуволн в продольном направлении.

Из анализа результатов следует, что при различных законах изменения модуля Юнга по толщине происходит перестройка форм, соответствующих пятой и шестой частотам. Значения соответствующих частот, определяемых в порядке возрастания, различаются на 1,5 – 5,6%.

На рисунках показаны формы колебаний для первой и второй собственных частот цилиндрической толстостенной оболочки из однородного (сплошные линии) и неоднородного градиентного (штриховые) материала с законом изменения модуля Юнга (I) при  $z = L / 2$ . Торцы оболочки жестко закреплены. Перемещения и напряжения нормированы на максимальное значение модуля соответствующей величины для однородного материала.



Неоднородность материала наиболее существенно влияет на распределение напряжений  $\sigma_r$  по толщине цилиндра. При этом на первой частоте меняется количество полуволн по толщине цилиндра. Для перемещений  $u_r$  и напряжений  $\sigma_{rz}$  в случае закона изменения модуля Юнга (I) наблюдается смещение максимумов к внутренней поверхности цилиндра. Перемещения  $u_z$  у цилиндра из градиентного материала мало изменяются по сравнению с цилиндром из однородного материала как на первой, так и на второй собственных частотах, при этом точка перегиба остается неизменной и расположенной на срединной поверхности для материалов разного типа.

### Заключение.

На основе трехмерной теории упругости, а также уточненной теории оболочек Тимошенко – Миндлина, получено решение задачи о свободных осесимметричных колебаниях цилиндрических оболочек из непрерывно неоднородного материала (ННМ) при различных граничных условиях. Исследована применимость уточненной теории для оболочек из материала с непрерывно изменяющимися вдоль толщинной координаты свойствами, а также влияние различных законов изменения свойств на динамические характеристики цилиндрических оболочек при осесимметричных колебаниях.

РЕЗЮМЕ. На основі тривимірної теорії пружності і уточненої теорії оболонок Тимошенка – Міндліна отримано розв’язок задачі про вільні осесиметричні коливання циліндричних оболонок з неперервно неоднорідного матеріалу при різних граничних умовах. Досліджено можливість застосування уточненої теорії оболонок для оболонок з матеріалу з властивостями, що неперервно змінюються вздовж товщинної координати, а також вплив різних законів зміни механічних властивостей на динамічні характеристики циліндричних оболонок при осесиметричних коливаннях. Числові результати представлено у вигляді таблиць і графіків та дано їх аналіз.

1. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 171 с.
2. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Бровко А.А., Горбач Л.Н. О свободных осесимметричных колебаниях цилиндров конечной длины из полимерных функционально градиентных материалов // Прикл. пробл. механики і математики. – 2010. – Вип.8. – С.92 – 99.
3. Ефимова Т.Л. Численное решение задачи о неосесимметричных свободных колебаниях ортотропных неоднородных цилиндров на основе метода сплайн – коллокации // Доп. НАН України. – 2010. – № 3. – С. 58 – 64.
4. Birman V., Byrd L.W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Appl. Mech. Reviews. – 2007. – **60**. – P. 195 – 215.
5. Grigorenko Ya.V., Grigorenko A.Ya. Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review)// Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 193.
6. Isvandzibaei M.R., Jahani A. Vibration of functionally graded cylindrical shells under effects free-free and clamped-clamped boundary conditions // World Academy of Science, Engineering and Tehnolodgy. – 2010. – **45**. – 152 – 157.
7. Kashtalyan M.Yu., Rushchitsky J.J. Love Solutions in the Linear Inhomogeneous Transversely Theory of Elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. – **40**, N 2. – P.121 – 199.
8. Kashtalyan M.Yu., Rushchitsky J.J. General Love Solution in the Linear Inhomogeneous Transversely Isotropic Theory of Radius-Dependent Elasticity // Int. appl. Mech. – 2010. – **40**, N4. – P. 367 – 376.
9. Kumar J.S., Reddy B.S., Reddy S.E., Kumar Reddy K.V. Higher order theory for free vibration analysis of functionally graded material plates // ARPN J. of Eng. and Appl. Sci. – 2011. – **6**, N 10. – P. 105–111.
10. Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N. Vibration of functionally graded cylindrical shells // World Academy of Science, Engineering and Technolodgy. – 1999. – **41**. – P. 309 – 324.
11. Najafzadeh M.M., Isvandzibaei M.R. Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order deformation plate theory with ring support // Acta Mech. – 2007. – **191**. – P. 75 – 91.
12. Pradhan S.C., Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions // Appl. Acoust. – 2000. – **61**. – P.111 – 129.

Поступила 11.03.2014

Утверждена в печать 26.05.2015