

Е. И. Беспалова, Г. П. Урсова

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ И ОБЖАТИЯ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, г. Киев, Украина,  
e-mail: metod@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The technique for stress analysis of shells of revolution with a branched meridian considering transverse shears and reduction is developed using nonclassical shell model. To solve the associated two-dimensional problems in not simply connected domains, they are reduced to one-dimensional ones, which are solved by the sweep orthogonal method with automatic satisfying matching conditions. The effect of reduction and analysis of stress state of shell system depending on its parameters are demonstrated by the example of calculation of a real shell with branches.

**Key words:** branched shells, stress-strain state, nonclassical shell model, transverse shears, transverse reduction, effect of reduction, analysis.

#### **Введение.**

В расчетной практике упругих конструкций многие объекты современной техники моделируются тонкостенными системами в виде составных оболочек вращения с разветвленной формой меридиана. Это, к примеру, отдельные элементы паровых и газовых турбин, корпуса ракет и ракетных двигателей, вращающиеся валы с насаженными на них дисками, оребренные трубопроводы, наземные емкости различного назначения на цилиндрических или конических опорах.

Разработка подходов к решению задач статики для таких объектов началась около полувека назад и продолжается в настоящее время, охватывая все более сложные процессы деформирования и привлекая новые методы численного анализа [1, 2, 4, 5, 6, 9, 14]. Одной из важных проблем этой области является выбор модели деформирования, которая отражала бы достоверную картину напряженного состояния в местах ветвления оболочек. В этих местах, как известно, в силу конструктивных особенностей системы возникают существенные локализованные напряжения, описание которых возможно либо в пространственной постановке теории упругости, либо по оболочечным моделям, учитывающим поперечное обжатие. В большинстве же работ по разветвленным системам, как и в более простом случае оболочек без разветвлений, исследование проведено на основе классической модели Кирхгоффа – Лява и сдвиговых моделей первого порядка Тимошенко – Рейсснера [1, 2, 4, 5, 10, 14, 16, 17].

Так, классическая модель оболочек использована для анализа осесимметричного и неосесимметричного напряженно-деформированного состояния (НДС) разветвленных оболочечных систем в [4, 5]; учёту физической нелинейности материала при исследовании осесимметричных процессов термопластичности одной из первых посвящена работа [1]; геометрически нелинейное состояние оболочек при термосиловом нагружении рассмотрено в [2]. На основе уточненной сдвиговой модели Тимошенко в [10, 14] рассмотрены задачи термопластического состояния и колебаний разветвленных оболочек в линейной и нелинейной постановках.

Для решения соответствующих одномерных и двумерных линейных (нелинейных) краевых задач применяются различные методы прикладной математики: разно-

стные, вариационные и проекционные, конечных элементов, итерационные и др. [4 – 9, 11 – 13, 15]. Среди них по критерию реализации условий сопряжения отдельных оболочек можно выделить два подхода. В первом подходе заимствована идеология строительной механики для статически неопределимых систем с построением частных решений задачи при действии единичных обобщенных сил и последующим удовлетворением условиям сопряжения. Это, в основном, методы суперэлементов и сегментные методы. Во втором подходе использовано сведение к одномерным задачам с последующим их решением методами прогонки. Применение процедуры прогонки на этапе решения одномерных задач позволяет реализовать условия сопряжения в едином процессе решения задачи в целом [1, 4, 5].

В данной работе исследование НДС составных оболочек вращения с разветвленной формой меридиана проведено на основе неклассической модели, где кроме поперечных сдвигов дополнительно учтено поперечное обжатие. Для решения соответствующих двумерных задач использовано сведение их к одномерным задачам, которые решаются методом ортогональной прогонки С.К. Годунова с автоматическим удовлетворением условиям сопряжения составных элементов.

### 1. Постановка задачи.

Рассмотрена оболочечная система, координатная (в частном случае, срединная) поверхность которой образована вращением некоторой плоской многосвязной кусочно-гладкой кривой вокруг прямолинейной оси  $Oz$  (рис. 1). Эта поверхность отнесена к криволинейной системе координат  $\alpha, \theta$ , где  $\alpha$  изменяется по образующей-меридиану, а  $\theta$  – центральный угол в плоскости поперечного сечения  $\alpha = \text{const}$ . Толщина оболочек изменяется по нормали к выбранной поверхности и характеризуется переменной  $\gamma$ .

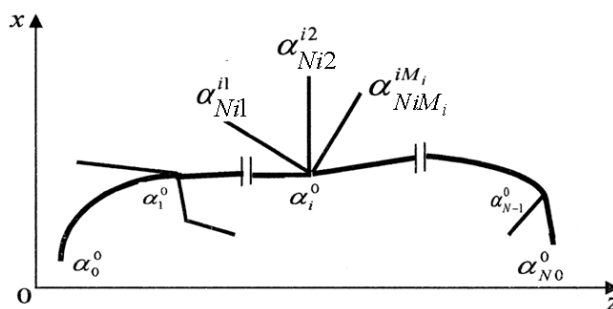


Рис. 1

Условимся, что некоторая односвязная кусочно-гладкая кривая является основным меридианом, а отходящие от него в точках  $\alpha_i^0 = \text{const}$  ( $i = 1, N-1$ ) незамкнутые кривые – ветвями. Соответственно, оболочку, образованную основным меридианом, называем основной оболочкой, а оболочки, образованные ветвями – ответвленными оболочками. Точки многосвязности меридиана  $\alpha_i^0 = \text{const}$ , в которых сопрягаются координатные поверхности основной оболочки и ее ответвлений, назовем (как это принято и в [1, 4]) узловыми точками. Все узловые точки принадлежат основному меридиану. В каждой узловой точке  $\alpha_i^0$  может сопрягаться разное количество ветвей  $M_i$  ( $p = \overline{1, M_i}$ ), которые, как и основная оболочка, отнесены к локальной системе координат  $\alpha^{ip} \in [\alpha_0^{ip}, \alpha_{Ni p}^{ip}]$ . Если из этого узла выходит одна ветвь, то  $\alpha^{ip} = \alpha^i$ , а при рассмотрении основного меридиана –  $\alpha^{ip} = \alpha^0$ . Сечения  $\alpha = \alpha_0^0$  и  $\alpha = \alpha_{N0}^0$  соответствуют торцам основной оболочки, а сечения  $\alpha = \alpha_i^0 = \alpha_0^{ip}$  и  $\alpha = \alpha_{Ni p}^{ip}$  являются, соот-

ответственно, линией контакта с основной оболочкой и торцом  $p$ -го ответвления. Заметим, что в отдельных случаях выбор основной оболочки является неоднозначным, но результаты решения задачи от этого не зависят.

Каждая ветвь системы, как и основная оболочка, может быть выполнена из ряда последовательно сопрягаемых соосных относительно  $Oz$  оболочек вращения, иметь переменную по образующей толщину или состоять из ряда идеально контактирующих между собой слоев. Материал составляющих слоев является линейно-упругим, подчиняется обобщенному закону Гука во всем диапазоне действующих нагрузок и может быть изотропным и (или) ортотропным.

На торцах основной оболочки и неузловых контурах ответвлений ( $\alpha^{ip} = \alpha_{Nip}^{ip}$ ) допускаются любые физически непротиворечивые граничные условия, а на линиях контакта  $\alpha = \alpha_i^0 = \alpha_0^{ip}$  в общей системе координат  $xOz$  формулируются условия сопряжения в виде условий равновесия статических и условий неразрывности кинематических характеристик напряженного состояния.

Оболочечную систему рассмотрим при воздействии неосесимметричных нагрузок, распределенных произвольным образом в окружном и меридиональном направлениях, а также усилий-моментов, заданных на граничных контурах основной оболочки и (или) ее ответвлений.

## 2. Методика решения.

Исследование НДС таких разветвленных систем проведено на основе неклассической модели оболочек, учитывающей поперечные сдвиги и обжатие при следующей линейной аппроксимации всех компонент вектора перемещений по толщине [3]:

$$\begin{aligned} u_\alpha^j(\alpha, \theta, \gamma) &= u(\alpha, \theta) + \gamma \psi_\alpha(\alpha, \theta); \quad u_\theta^j(\alpha, \theta, \gamma) = v(\alpha, \theta) + \gamma \psi_\theta(\alpha, \theta); \\ u_r^j(\alpha, \theta, \gamma) &= w(\alpha, \theta) + \gamma \psi_\gamma(\alpha, \theta) \quad (j = 1, \dots, J), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_\alpha^j, u_\theta^j, u_r^j$  – перемещения точек  $j$ -го слоя оболочки;  $u, v, w$  – перемещения точек координатной поверхности  $\gamma = 0$  в направлениях  $\alpha, \theta, \gamma$ , соответственно;  $\psi_\alpha, \psi_\theta$  – полные углы поворота прямолинейного элемента;  $\psi_\gamma$  – поперечная нормальная деформация;  $J$  – количество слоев оболочки.

В качестве основных неизвестных, описывающих на основе принятой модели НДС рассматриваемой системы, выберем вектор-функцию  $\vec{N} = \begin{Bmatrix} \vec{Q} \\ \vec{U} \end{Bmatrix}$  со следующими статическими

$$\vec{Q} = \{T_x, T_z, T_{\alpha\theta}, M_\alpha, M_{\alpha\theta}, P_\alpha\}^T \quad (2)$$

и кинематическими

$$\vec{U} = \{u_x, u_z, v, \psi_\alpha, \psi_\theta, \psi_\gamma\}^T \quad (3)$$

компонентами.

Здесь  $T_x, T_z$  и  $u_x, u_z$  – соответственно, радиальные и осевые усилия и перемещения, выраженные формулами:  $T_x = T_\alpha \cos \varphi + Q_\alpha \sin \varphi$ ;  $T_z = T_\alpha \sin \varphi - Q_\alpha \cos \varphi$ ,  $u_x = u \cos \varphi + v \sin \varphi$ ,  $u_z = u \sin \varphi - v \cos \varphi$ ;  $T_\alpha, T_{\alpha\theta}, Q_\alpha$  – нормальное, сдвиговое и перерезывающее усилия в сечении  $\alpha = \text{const}$ ;  $M_\alpha, M_{\alpha\theta}$  – изгибающий и крутящий моменты, а  $P_\alpha$  – момент первого порядка от касательного напряжения поперечного сдвига в этом же сечении;  $\varphi$  – угол, образованный нормалью к координатной поверхности и осью вращения.

Относительно этих неизвестных соответствующая двумерная краевая задача для основной оболочки (индекс  $ip$  принимаем равным 0) и ее разветвлений ( $i = \overline{1, N-1}$ ,  $p = \overline{1, M_i}$ ) может быть сформулирована в векторно-матричном виде для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial \alpha^{ip}} = A_0^{ip} \bar{N} + A_1^{ip} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \theta} + A_2^{ip} \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \theta^2} + \bar{q}^{ip}; \quad \alpha^{ip} \in (\alpha_0^{ip}, \alpha_{Nip}^{ip}); \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (4)$$

при граничных условиях на торцевых контурах основной оболочки

$$B_0^0 \bar{N} = \bar{b}_0^0, \quad \alpha^0 = \alpha_0^0; \quad (5)$$

$$B_{N0}^0 \bar{N} = \bar{b}_{N0}^0, \quad \alpha^0 = \alpha_{N0}^0; \quad (6)$$

условиях сопряжения в ее узловых сечениях

$$\bar{Q}_i^+ = \bar{Q}_i^- + \sum_{p=1}^{M_i} \bar{Q}_*^{ip}; \quad (7)$$

$$\bar{U}_i^+ = \bar{U}_i^- = \bar{U}_*^{ip}; \quad \alpha^{ip} = \alpha_0^{ip} \quad (i = \overline{1, N-1}); \quad (8)$$

граничных условиях на торцевых контурах ответвлений

$$B_{Nip}^{ip} \bar{N} = \bar{b}_{Nip}^{ip}; \quad \alpha^{ip} = \alpha_{Nip}^{ip} \quad (9)$$

и условиях периодичности в окружном направлении

$$\bar{N}(\alpha, \theta + 2\pi) = \bar{N}(\alpha, \theta). \quad (10)$$

Ненулевые элементы матриц  $A_j^{ip}$  ( $j = 0, 1, 2$ ) приведены в [3], знаками « $\leftarrow$ », « $\rightarrow$ » отмечены значения рассматриваемых функций при подходе к узловой линии, соответственно, слева и справа, знаком «\*» – значения усилий – моментов и перемещений, вызванные наличием ветвей; векторы  $\bar{q}^{ip}$ ,  $\bar{b}_0^0$ ,  $\bar{b}_{N0}^0$  и  $\bar{b}_{Nip}^{ip}$  определяют заданные распределенные нагрузки, воздействия на граничных торцах основной оболочки и ответвлений.

Ввиду замкнутости оболочечной системы и периодичности всех факторов НДС в окружном направлении (10), искомое решение задачи представим в виде разложений в тригонометрические ряды Фурье

$$\bar{N} = \left\{ N_n(\alpha, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} N_{nk}(\alpha) \begin{bmatrix} \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{bmatrix} \right\}, \quad n = \overline{1, 12}, \quad (11)$$

где выражение в квадратных скобках означает, что часть компонент вектор-функции  $\bar{N} = (T_x, T_z, M_\alpha, P_\alpha, u_x, u_z, \psi_\alpha, \psi_\gamma)$  представлены по  $\cos k\theta$ , а часть –  $(T_{\alpha\theta}, M_{\alpha\theta}, v, \psi_\theta)$  – по  $\sin k\theta$ .

Соответственно, двумерная краевая задача (4) – (10) для каждого номера гармоники  $k$  сводится к последовательности одномерных краевых задач 12-го порядка относительно функциональных коэффициентов  $\bar{N}_k = \{T_{xk}, T_{zk}, T_{\alpha\theta k}, M_{\alpha k}, M_{\alpha\theta k}, P_{\alpha k}, u_{xk}, u_{zk}, v_k, \psi_{\alpha k}, \psi_{\theta k}, \psi_{\gamma k}\}$  следующего вида:

$$\frac{d\bar{N}_k}{d\alpha^{ip}} = \tilde{A}_k^{ip} \bar{N}_k + \tilde{q}_k^{ip}; \quad \alpha^{ip} \in (\alpha_0^{ip}, \alpha_{Nip}^{ip}) \quad (12)$$

при граничных условиях на концах основного меридиана

$$B_{0k}^0 \bar{N}_k = \bar{b}_{0k}^0, \quad \alpha^0 = \alpha_0^0; \quad (13)$$

$$B_{N0k}^0 \bar{N}_k = \bar{b}_{N0k}^0, \quad \alpha^0 = \alpha_{N0}^0; \quad (14)$$

условиях сопряжения в его узловых точках

$$\bar{Q}_{ik}^+ = \bar{Q}_{ik}^- + \sum_{p=1}^{M_i} \bar{Q}_*^{ipk}; \quad (15)$$

$$\bar{U}_{ik}^+ = \bar{U}_{ik}^- = \bar{U}_*^{ipk}, \quad \alpha^{ip} = \alpha_0^{ip} \quad (16)$$

и граничных условиях на неузловых концах разветвлений

$$B_{Nipk}^{ip} \bar{N} = \bar{b}_{Nipk}^{ip}, \quad \alpha^{ip} = \alpha_{Nip}^{ip}. \quad (17)$$

Элементы матрицы  $\tilde{A}_k^{ip} = A_0^{ip} \pm kA_1^{ip} \pm k^2 A_2^{ip}$  с учетом представления (11) приведены в [3] (в дальнейшем индекс  $k$  опускаем).

Алгоритм решения одномерных задач о НДС оболочек вращения с разветвлённой формой меридиана методом ортогональной прогонки С.К. Годунова изложен в [1, 4] в случае классической модели оболочек и в [10] – в случае учета поперечных сдвигов. Здесь он обобщен для случая оболочечной модели (1), учитывающей не только поперечные сдвиги  $\psi_\alpha, \psi_\theta$ , но и поперечное обжатие  $\psi_\gamma$ .

Согласно методу прогонки Годунова С.К. решение краевой задачи (12) – (17)  $\bar{N} = \bar{N}^{ip}$  примем в виде линейной комбинации

$$\bar{N}^{ip} = Z^{ip} \bar{C}^{ip} + \bar{N}_7^{ip}, \quad (18)$$

составленной из решений 6-ти задач Коши для однородной системы (12) при задании начальных условий некоторой матрицей с линейно-независимыми столбцами. Здесь  $Z^{ip} = \{z_{jn}^{ip}, j = \overline{1,6}; n = \overline{1,12}\}$  – матрица решений задач Коши;  $\bar{C}^{ip} = \{c_j^{ip}, j = \overline{1,6}\}$  – вектор неизвестных коэффициентов в (18);  $\bar{N}_7^{ip}$  – частное решение неоднородной системы (12).

Учитывая статическую (2) и кинематическую (3) составляющие вектора  $\bar{N}^{ip}$  представим матрицу  $Z^{ip}$  как две соответствующие матрицы  $Z_Q^{ip}$  и  $Z_U^{ip}$  порядка  $(6 \times 6)$  каждая. Тогда (18) запишем в виде

$$\bar{Q}^{ip} = Z_Q^{ip} \bar{C}^{ip} + \bar{Q}_7^{ip}; \quad \bar{U}^{ip} = Z_U^{ip} \bar{C}^{ip} + \bar{U}_7^{ip}. \quad (19)$$

Выразим неизвестные коэффициенты  $\bar{C}^{ip}$  каждой ветви ( $i = \overline{1, N-1}; p = \overline{1, M_i}$ ) через неизвестные коэффициенты  $\bar{C}^0$  основной оболочки из условий совместности перемещений в узле (16)

$$\bar{C}^{ip} = (Z_U^{ip})^{-1} Z_U^0 \bar{C}^0 + (Z_U^{ip})^{-1} (\bar{U}_7^0 - \bar{U}_7^{ip}). \quad (20)$$

Используя (20), выразим из (19) статические составляющие ветвей  $\bar{Q}^{ip}$  ( $i = \overline{1, N-1}; p = \overline{1, M_i}$ ):

$$\bar{Q}^{ip} = \bar{Q}_*^{ip} = Z_Q^{ip} (Z_U^{ip})^{-1} Z_U^0 \bar{C}^0 + \bar{Q}_7^{ip} + Z_Q^{ip} (Z_U^{ip})^{-1} (\bar{U}_7^0 - \bar{U}_7^{ip}). \quad (21)$$

На прямом ходе прогонки для основной оболочки условия перехода через  $i$ -ый узел имеют вид (15) с учетом полученной зависимости (21), а коэффициенты  $\bar{C}^0$  в представлении (18) определяются из граничных условий (14) согласно процедуре метода С.К. Годунова.

Таким образом, общая схема определения НДС разветвленных оболочек вращения для отдельного номера гармоники  $k$  в представлении (11) состоит в следующем:

1) для каждой ветви оболочечной системы проводим прямой ход решения задачи от точки  $\alpha^{ip} = \alpha_{Nip}^{ip}$  с построением матрицы  $Z^{ip}$  и вектора  $\bar{N}_7^{ip}$  в точке сопряжения  $\alpha^{ip} = \alpha_0^{ip}$ ;

2) находим решение задачи для основной оболочки с перестройкой решений задач Коши в узловых точках согласно условиям сопряжения (15) с учетом (21) для сопрягаемых ветвей;

3) находим решение задачи для каждой ветви при заданных граничных условиях (17) и полученных условиях сопряжения в узловых точках  $\alpha^{ip} = \alpha_0^{ip}$ .

### 3. Примеры решения задач.

На основе разработанной методики приведены результаты расчета двух составных оболочечных систем с разветвлениями. Первая задача является модельной и служит для косвенного подтверждения работоспособности методики. Во второй задаче на примере фрагмента реальной разветвленной конструкции проведено сравнение с аналитическим решением для частного случая геометрических параметров, исследовано НДС в зависимости от жесткостных характеристик ее элементов и проанализировано влияние учета обжатия на расчетные значения прогиба и напряжений на линии контакта.

**3.1.** Рассмотрена оболочечная система, состоящая из трех элементов: цилиндра радиуса  $R$  (I) и двух конических оболочек (II, III), сопряженных с ним по общей линии контакта  $s=l$  и образующих с осью вращения углы  $\alpha$  и  $-\alpha$ , соответственно ( $s$ -длина меридиана в текущей точке). Форма меридиана-образующей системы схематически приведена на рис. 2, а. Все составляющие элементы изготовлены из одного и того же ортотропного материала, соответствующего волокнистому стеклопластику, а также имеют одинаковые толщину  $h$  и длину  $l$ . Левый торец цилиндра  $s=0$  – жестко закреплен, все остальные края системы – свободны. На систему действует нормальная нагрузка  $q_n(s, \theta) = q_0 \cos 2\theta$ , равномерно распределенная по всей образующей.

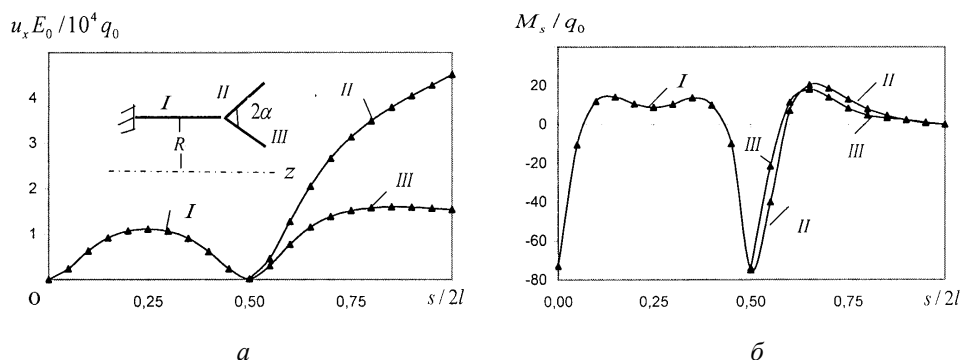


Рис. 2

Решение задачи представим для следующих исходных данных:

$$R = 100l_0; \quad l/R = 0,7; \quad h/R = 0,01; \quad \alpha = -\alpha = 30^0; \quad E_s = 5,7E_0; \quad E_\theta = E_\gamma = 1,4E_0;$$

$$G_{s\theta} = G_{s\gamma} = 0,575E_0; G_{\theta\gamma} = 0,281E_0; \mu_s = 0,277; \mu_\theta = 0,068.$$

Для подтверждения работоспособности методики рассмотрены два расчетных варианта:

А – основная оболочка состоит из элементов I и II, а коническая оболочка III является ответвлением;

Б – основная оболочка состоит из элементов I и III, а коническая оболочка II является ответвлением.

Результаты решения задачи приведены на рис. 2 для амплитудных значений радиального перемещения  $u_x E_0 / 10^4 q_0$  (рис. 2, а) и изгибающего момента  $M_s / q_0$  (рис. 2, б).

Сплошные линии соответствуют варианту А, треугольниками нанесены результаты расчета по варианту Б. Как видно, решение задачи не зависит от конкретного выбора основного меридиана и его разветвлений, что может служить косвенным подтверждением работоспособности методики. Следует отметить, что максимальные значения радиальных перемещений конуса II почти втрое превышают соответствующие значения конуса III, в то время как величины изгибающих моментов на этих участках системы различаются несущественно.

**3.2.** Рассмотрена оболочечная система цилиндр – кольцевая пластина, моделирующая участок трубопровода с наружным оребрением (рис. 3, а – общий вид системы). Замкнутый тонкостенный цилиндр постоянной толщины  $h_c$  с радиусом средней поверхности  $R$  укреплен кольцевыми пластинами толщины  $h_{pl}$ . Пластины имеют одинаковую длину  $l_{pl} = r_{pl} - R$  и равномерно расположены по длине цилиндра с шагом  $b$  ( $r_{pl}$  – наружный радиус пластин). Цилиндр нагружен внутренним давлением интенсивности  $q_0$  и, как и пластина, является изотропным, но может иметь другие физико-механические свойства материала. В силу периодичности расположения кольцевых ребер в цилиндре выделен участок конечной длины  $l_c = b$ , сопряженный в центральном сечении  $z = l_c / 2$  с кольцевой пластиной. На торцах выделенного участка приняты условия симметрии, наружный контур пластины – свободен, в сечении  $z = l_c / 2$  сформулированы условия сопряжения. Расчётный фрагмент сопряжения цилиндра и пластины представлен на рис. 3, б.

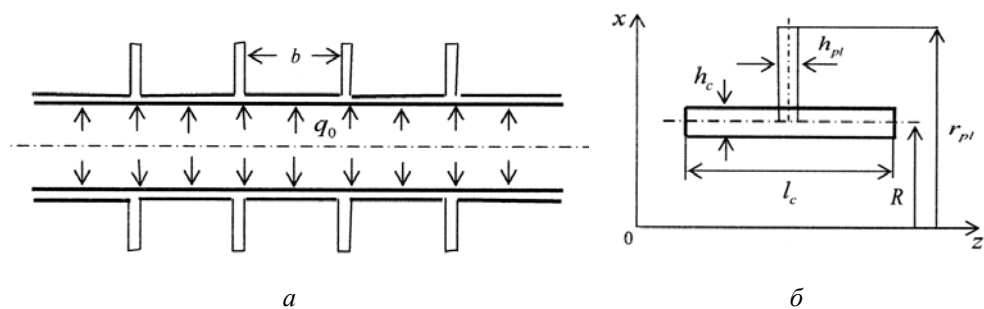


Рис. 3

Для сравнения с аналитическим решением [5] (в частном случае одинаковых жесткостных характеристик цилиндра и пластины) проведены расчеты по классической модели оболочек и по модели, учитывающей поперечные сдвиги и обжатие. Эти результаты получены при следующих исходных данных:  $R = 0,1$  м;  $h_c = h_{pl} = 5 \cdot 10^{-3}$  м;  $l_c = b = 0,2$  м;  $r_{pl} = 0,2$  м;  $E_c = E_{pl} = 2,9,81 \cdot 10^4$  МПа;  $\mu = 0,3$ ;  $q_0 = 9,81$  МПа и представлены в табл. 1 для прогиба  $w$  и изгибающего момента  $M_s$  цилиндра, радиального перемещения  $u_x$  и усилия  $T_x$  пластины.

Таблица 1

$z/l_c,$ $x/2l_{pl}$	Модели	Цилиндр $z \in [0, l_c/2]$		Пластина $x \in [0, l_{pl}]$	
		$w \cdot 10^5, \text{м}$	$M_s / 9,81; \text{Н}$	$u_x \cdot 10^5, \text{м}$	$T_x / 9,81; \text{кН/м}$
0	[5]	8,489	0,667	3,453	-17,56
	K-L	8,489	0,6669	3,453	-17,56
	R	8,489	0,643	2,790	-14,21
0,1	[5]	8,549	0,695	3,028	-10,40
	K-L	8,549	0,6949	3,028	-10,40
	R	8,500	1,071	2,440	-8,384
0,2	[5]	8,700	-1,607	2,747	-6,092
	K-L	8,700	-1,607	2,747	-6,091
	R	8,697	-1,623	2,214	-4,908
0,3	[5]	8,460	-10,82	2,558	-3,292
	K-L	8,459	-10,82	2,558	-3,292
	R	8,399	-10,93	2,061	-2,653
0,4	[5]	6,388	-12,19	2,428	-1,373
	K-L	6,388	-12,19	2,428	-1,373
	R	6,079	-11,96	1,957	-1,106
0,5	[5]	3,453	76,36	2,341	0
	K-L	3,453	76,36	2,341	0
	R	2,790	91,06	1,886	0

Расчеты по классической модели (К – L) оболочек полностью совпали с аналитическим решением задачи [5]. С ними качественно согласуются результаты, полученные по модели с учетом обжатия (R), существенно различаясь только в окрестности линии сопряжения ( $z/l_c \geq 0,4$ ). Это свидетельствует об эффекте учета поперечной деформации  $\varepsilon_\gamma$  в проведенных расчетах.

На примере этой же оболочечной системы при разных жесткостях ее составляющих элементов более детально проиллюстрируем влияние учета поперечного обжатия на ее НДС.

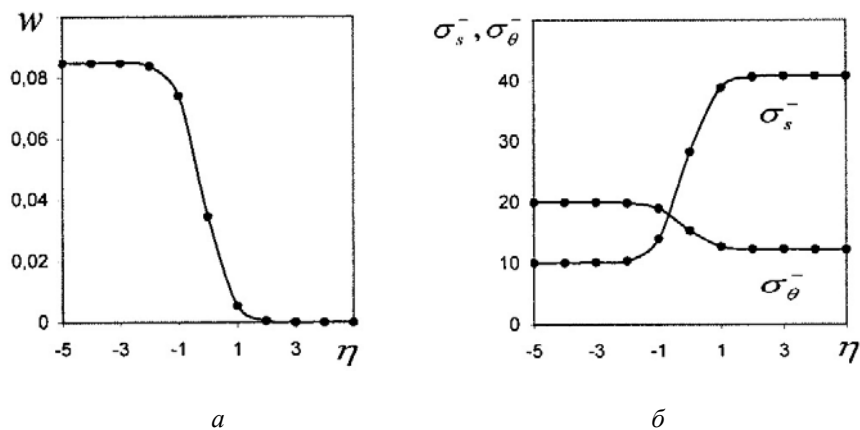


Рис. 4

Относительную жесткость пластины и цилиндра будем характеризовать параметром  $\eta = \lg(E_{pl}/E_c)$   $\eta \in [-5; 5]$  ( $E_c = \text{fixed}$ ). Для предельного значения  $\eta = -5$  напряженное состояние системы практически соответствует состоянию гладкого цилиндра, а для  $\eta = 5$  – цилиндра с защемлением на линии контакта  $s = l_c/2$ . Эти данные для значений прогиба  $w(l_c/2)$ , м и напряжений на внутренней поверхности (индекс «-»)  $\sigma_s^-(l_c/2)$ , МПа и  $\sigma_\theta^-(l_c/2)$ , МПа на линии контакта представлены на



рис. 4, а и рис. 4, б, соответственно. Как видно, цилиндр и пластина деформируются как единое целое фактически только в диапазоне  $\eta \in [-2; 1,5]$ . При этом для  $\eta \geq -0,5$  максимальными становятся меридиональные напряжения внутренней поверхности цилиндра.

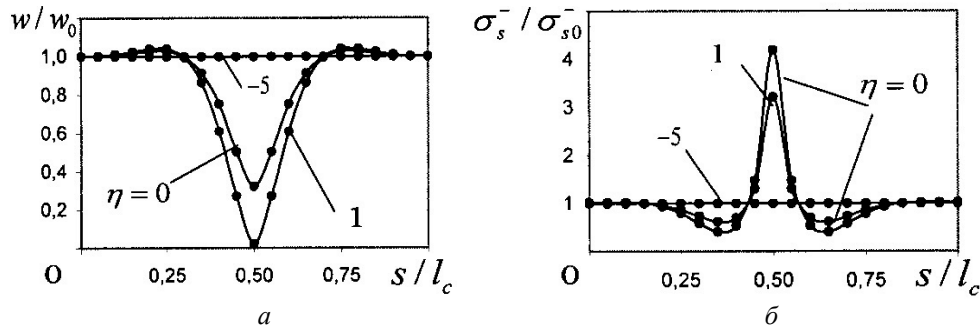


Рис. 5

Для полноты картины, на рис. 5, а представлены распределения прогиба  $w/w_0$  и напряжения на внутренней поверхности  $\sigma_s^- / \sigma_{s0}^-$  (рис. 5, б) по образующей цилиндра  $s \in [0; l_c]$ , а на рис. 6, а – меридионального перемещения  $u_x / w_0$  и напряжения на внутренней поверхности  $\sigma_s^- / \sigma_{s0}^-$  (рис. 6, б) по образующей пластины  $s \in [0; l_{pl}]$  при  $\eta = 0; 1; -5$  ( $w_0$  и  $\sigma_{s0}^-$  – прогиб и меридиональное напряжение гладкого цилиндра). Значение прогиба на линии контакта цилиндра и пластины при их равных жесткостях ( $\eta = 0$ ) снижается более, чем на 60% по сравнению с гладким цилиндром ( $\eta = -5$ ) и более, чем на 90%, когда жесткость пластины на порядок выше жесткости цилиндра ( $\eta = 1$ ). Меридиональное напряжение более, чем в 3 ( $\eta = 0$ ) и 4 ( $\eta = 1$ ) раза превышает напряжения гладкого цилиндра. Аналогичная картина наблюдается для перемещений пластины.

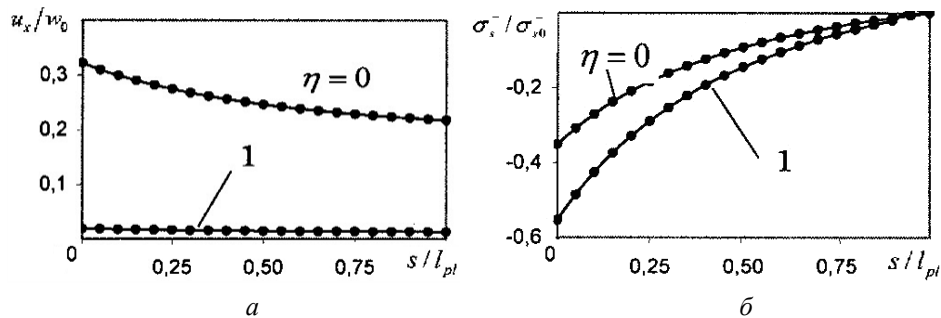
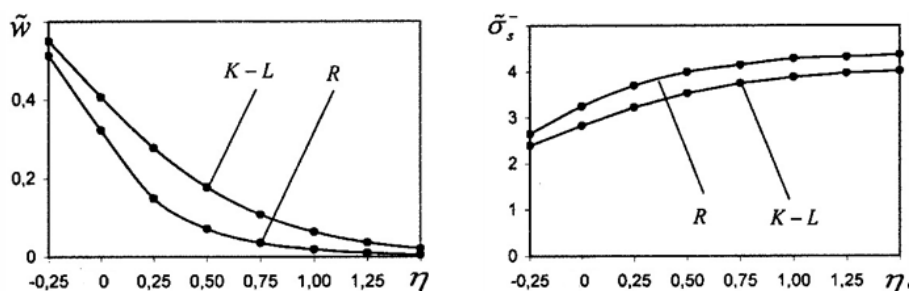


Рис. 6

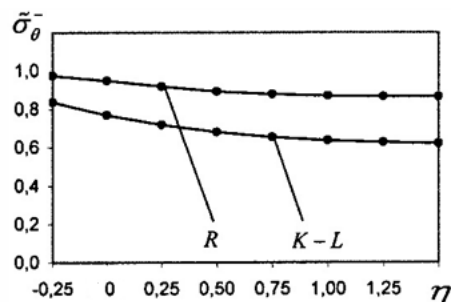
Для оценки влияния учета обжатия сопоставлены данные проведенных расчетов с результатами, полученными по классической модели оболочек Кирхгофа – Лява. Значения характеристик НДС на линии контакта  $s = l_c / 2$  приведены на рис. 7 для прогиба  $\tilde{w} = w(l_c / 2) / w_0$  (рис. 7, а), меридионального  $\tilde{\sigma}_s^- = \tilde{\sigma}_s^-(l_c / 2) / \tilde{\sigma}_{s0}^-$  (рис. 7, б) и окружного  $\tilde{\sigma}_\theta^- = \tilde{\sigma}_\theta^-(l_c / 2) / \tilde{\sigma}_{\theta 0}^-$  (рис. 7, в) напряжений, полученные согласно модели Кирхгофа – Лява (К – Л) и по модели с учетом поперечных сдвигов и обжатия (R) в диапазоне изменения  $\eta \in [-0,25; 1,5]$  ( $w_0, \sigma_{s0}^-, \sigma_{\theta 0}^-$  – значения прогиба и соответствующих напряжений гладкого цилиндра). Классическая теория оболочек для всех значений  $\eta$  дает завышенные величины прогиба и заниженные величины напряжений в этом сечении цилиндра. Уточнения значе-

ний прогиба, связанные с учетом обжатия, становятся более существенными с возрастанием жесткости пластины  $\eta$ . Если при равных жесткостях пластины и цилиндра ( $\eta = 0$ ) уточнение  $\varepsilon = |f_{K-L} - f_R| / f_{K-L} \cdot 100$  составляло порядка 20%, то уже при  $\eta = 0,5$  – порядка 60%. Учет обжатия для меридиональных напряжений влияет значительно меньше и составляет 10 – 15% в рассмотренном диапазоне  $\eta$ ; в тоже время уточнение окружных напряжений может превышать 40% ( $\eta \geq 0$ ). Поскольку в данной конструкции меридиональные напряжения при  $\eta \geq -0,5$  превышают окружные, то уточнение эквивалентного напряжения ( $\sigma_s = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_\theta^2} - \sigma_s \sigma_\theta$ ) находится в пределах 15% – 20%. В ситуациях, близких к критическим, такое уточнение эквивалентного напряжения может оказаться существенным при оценке перехода системы в пластическое состояние.



a

б



в

Рис. 7

В заключение отметим, что разработанная методика позволяет дополнительно оценить влияние подкрепляющих пластин в рассмотренной конструкции на величину предельного давления в цилиндре. Это влияние будем характеризовать параметром  $\beta = q_{c+pl} / q_c$ , где  $q_c$  и  $q_{c+pl}$  – предельные давления гладкого цилиндра и цилиндра, подкрепленного кольцевыми пластинами.

Анализ НДС данной оболочечной системы показал, что максимальные растягивающие напряжения имеют место на внутренней поверхности цилиндра под пластиной ( $\sigma_s^-(l_c/2) / \sigma_s^-(0) = 2,83$  при  $\eta = 0$ ), а максимальные сжимающие напряжения, способствующие переходу в пластическое состояние, – на наружной поверхности (индекс «+») этого же сечения ( $\sigma_s^+(l_c/2) / \sigma_s^-(0) = -0,83$  при  $\eta = 0$ ). Для перехода цилиндра в пластическое состояние по всей длине и толщине оценку предельного давления проводим по напряжениям на внутренней поверхности в наиболее удаленном от пластины сечении  $z = 0$  или  $z = l$ . Таким образом, используя условие пластичности Мизеса, определяем предельное давление из равенства

$$q_p \sqrt{(\sigma_{sp}^-(0))^2 + (\sigma_{\theta p}^-(0))^2 - \sigma_{sp}^-(0)\sigma_{\theta p}^-(0)} \Big|_{q_0=1} = \sigma_\tau,$$

где  $\sigma_\tau$  – предел текучести материала, индекс  $p$  принимает обозначения  $p = c$  и  $p = c + pl$ , соответственно, для гладкого цилиндра и цилиндра с пластиной.

В результате для параметра  $\beta$  имеем следующее выражение:

$$\beta = \frac{\sqrt{(\sigma_{sc}^-(0))^2 + (\sigma_{\theta c}^-(0))^2 - \sigma_{sc}^-(0)\sigma_{\theta c}^-(0)}}{\sqrt{(\sigma_{sc+pl}^-(0))^2 + (\sigma_{\theta c+pl}^-(0))^2 - \sigma_{sc+pl}^-(0)\sigma_{\theta c+pl}^-(0)}}. \quad (22)$$

Проиллюстрируем зависимость предельного давления в цилиндре (параметр  $\beta$  (22)) от расстояния между пластинами (параметр  $\delta = b / h_{pl}$ ) для случая, когда материалы пластины и цилиндра имеют одинаковые упругие свойства (параметр  $\eta = \lg(E_{pl} / E_c) = 0$ ) и толщины ( $h_c = h_{pl}$ ). Эти данные приведены в табл. 2.

Таблица 2

$b, \text{м}$	$\delta = b / h_{pl}$	$\sigma_{sc+pl}^-(0) / \sigma_{s0}^-$	$\sigma_{\theta c+pl}^-(0) / \sigma_{s0}^-$	$\beta$
0,3	60	1,000	2,000	1,00
0,2	40	1,016	2,001	1,00
0,15	30	1,025	2,004	0,998
0,05	10	0,244	1,243	1,52
0,01	2	0,979	0,310	1,998
0,005	1	0,982	0,446	2,03

Как видно из результатов расчета, наличие подкреплений не оказывает влияния на предельное давление в цилиндре при значительном расстоянии между пластинами (при  $\delta \geq 30$  имеем  $\beta = 1$ , т.е.  $q_{c+pl} \approx q_c$ ) и вдвое увеличивает его значение при частом их расположении (при  $\delta \leq 2$  имеем  $\beta = 2$ , т.е.  $q_{c+pl} \approx 2q_c$ ). Для промежуточных значений  $\delta$  ( $2 < \delta < 30$ ) предельное давление возрастает на величину ( $\beta^*$  в диапазоне  $1 < \beta^* < 2$ ). В частности, при  $\delta = 10$  имеем  $\beta^* = 1,52$ .

#### Выводы.

Предложена методика определения напряженно-деформированного состояния составных соосных оболочек вращения с разветвленной формой меридиана на основе неклассической модели, учитывающей поперечные сдвиги и обжатие. Для решения соответствующих одномерных задач 12-го порядка в неодносвязных областях обобщен алгоритм, разработанный в [1, 4] для систем 6-го, 8-го (классическая модель) и в [10] 10-го (уточненная модель Тимошенко) порядков.

Эффект учета обжатия в сравнении с классической моделью оболочек исследован на примере конкретной оболочечной системы с разными упругими свойствами ее составляющих элементов. Показано, что учет обжатия проявляется лишь в окрестности линии контакта оболочек и в зависимости от различия в их упругих характеристиках может составлять порядка 60% для перемещений, 40% – для окружных и 20% – для меридиональных напряжений.

РЕЗЮМЕ. На основі неklasичної оболочкової моделі, яка враховує поперечні зсуви та обтиск, розроблена методика визначення напруженого стану оболонок обертання з розгалуженою формою меридіану. Для розв'язання відповідних двовимірних задач в неодносв'язних областях проведено зведення їх до одновимірних задач з подальшим розв'язанням методом ортогональної прогонки з автоматичним виконанням умов спряження. Ефект обтиску та аналіз напружень оболочкової системи в залежності від її параметрів проілюстровано на прикладі розрахунку реальної конструкції з відгалуженнями.

1. *Галишин А.З.* Исследование осесимметричного термоупруго-пластического напряжённо - деформированного состояния разветвлённых оболочек при простых процессах нагружения // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 8. – С. 46 – 50.
2. *Ганеева М.С., Косолапова Л.А., Моисеева В.Е.* Нелинейное деформирование оболочечной конструкции с разветвляющимся меридианом под действием неосесимметричного термосилового нагружения // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2001. – № 1. – С. 3 – 7.
3. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П.* Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью. – К.: Наук. думка 1987. – 216 с.
4. *Григоренко Я.М., Гололобов В.И., Криворучко Л.Д., Лобкова Н.А., Семенова В.В.* Расчет напряженного состояния конструкций в виде оболочек вращения с разветвлениями // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 7. – С. 101 – 104.
5. *Егоров М.И., Корягин В.С., Федоров В.И. и др.* Расчет осесимметричного напряженного состояния разветвленных составных оболочек вращения // Пробл. прочности. – 1974. – № 5. – С. 25 – 30.
6. *Benjeddou A., Hamdi M.A.* A new B-spline finite element for the dynamic analysis of shells of revolution // European Journal of Finite Elements. – 1994. – **3**. – P. 101 – 127.
7. *Bespalova E.I.* Finite Integral Transform Method in Static Problems for Inhomogeneous Plates // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 6. – P. 651 – 663.
8. *Bushnell D.* Stress, Stability and Vibration of Complex, Branched Shells of Revolution // Computers & Structures. – 1974. – **4**. – P. 399 – 435.
9. *Dzhabrailov A.Sh., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P.* The finite element analysis of shells of revolution with a branching meridian // Russian Aeronautics (Iz VUZ). – 2009. – **52**, N 1. – P. 22 – 29.
10. *Galishin A.Z., Merzlyakov V.A., Shevchenko Yu.N.* Application of the Newton Method for Calculating the Axisymmetric Thermoelastoplastic State of Flexible Laminar Branched Shells Using the Shear Model // Mech. of Compos. Mater. – 2001. – **37**, N 3. – P. 189 – 200.
11. *Goldfield Y.* Mixed Formulation for Sensitivity Analysis of Laminated Conical Shells // AIAA Journal. – 2011. – **49**, N 8. – P. 1816 – 1819.
12. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya.* The Problems of Statical and Dynamical Deformation of Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 193.
13. *Grigorenko Ya. M., Rozhok L.S.* Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2014 – **50**, N 2. – P. 105 – 127.
14. *Kayran A., Yavuzbalkan E.* Free-Vibration Analysis of Ring-Stiffened Branched Composite Shells of Revolution // AIAA Journal. – 2010. – **48**, N 4. – P. 749 – 762.
15. *Santos, H., Soares, C. M. M., Soares, C. A. M., Reddy, J. N.* A Semi-Analytical Finite Element Model for the Analysis of Laminated 3D Axisymmetric Shells: Bending, Free-Vibration and Buckling // Compos. Struct. – 2005. – **71**, N 3 – 4. – P. 273 – 281.
16. *Toorani, M. H., Lakis, A. A.* General Equations of Anisotropic Plates and Shells Including Transverse Shear Deformations, Rotatory Inertia and Initial Curvature Effects // J. of Sound and Vibration. – 2000. – **237**, N 4. – P. 561 – 615.
17. *Whitney, J. M.* The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates // J. of Compos. Mater. – 1969. – **3**, N 3. – P. 534 – 547.

Поступила 04.07.2013

Утверждена в печать 19.02.2015