

А. А. Мартынюк, Н. В. Никитина

## О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ В ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua

**Abstract.** The sufficient conditions of existence of closed trajectory in a system given in the three-dimensional space are presented. The conservative and dissipative systems are considered. It is established that a strange attractor is an alternative to the Rüssler attractor.

**Key words:** nonlinear systems, periodic orbit, orbital loss of stability, spectrum CEL, strange attractor.

### Введение.

Динамика трехмерных систем связана с бифуркациями и появлением таких понятий как удвоение периода и странного аттрактора [5]. Трехмерные системы интенсивно исследуются в связи с применением их при описании управляемых движений, модели синтеза протеина, нейронных систем с циклической архитектурой и других явлений [8, 9]. При этом процесс моделируется как обыкновенными дифференциальными уравнениями [7], так и уравнениями с запаздыванием [6, 9].

Целью данной статьи является установление условий появления замкнутой траектории. Кроме того, в статье исследуется модель генератора с квадратичной нелинейностью [1], а также аттракторы в модели Рёсслера [1, 14, 17]. Исследование данных систем основано на принципе симметрии [11, 16] и принципе сравнения [2].

Существование периодических движений в двумерных системах было установлено с помощью принципа симметрии и изложено в работе [15]. Расширение принципа симметрии в виде принципа кососимметрии получило применение в работ [3,12,13]. В качестве исходных результатов, приведем некоторые сведения о принципе симметрии [15]. Запишем двумерную систему в следующем виде:  $dx_1/dt = F_1(x)$ ;  $dx_2/dt = F_2(x)$ , где  $x_1, x_2 \in R$  и  $F_1 \in C(R^2, R)$ ,  $F_2 \in C(R^2, R)$ , и  $F_i(0,0) = 0$  ( $i = 1, 2$ ). Геометрический принцип симметрии, на основе которого можно установить условия замыкания фазовой траектории относительно центра, формулируется так [15]: *в двумерной системе существует симметрия траектории, если выполняются условия четности функции  $F_1(x)$  относительно  $x_1$  и нечетности функции  $F_2(x)$  относительно  $x_1$ , т. е.*

$$F_1(-x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2); F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2). \quad (1)$$

Это утверждение основано на том, что на плоскости  $Ox_1x_2$  ось  $Ox_2$  является осью симметрии и всякая интегральная кривая слева от оси  $x_2$  является зеркальным отображением кривой справа. На основе принципа симметрии можно заключить, что *в системе существует симметрия траектории, если выполняются условия четности функции  $F_2(x)$  относительно  $x_2$  и нечетности  $F_1(x)$  относительно  $x_2$ , т. е.*

$$F_2(x_1, -x_2) = F_2(x_1, x_2); F_1(x_1, -x_2) = -F_1(x_1, x_2). \quad (2)$$

Достаточно предположить, что интегральная кривая, начинаясь на оси  $x_1$  при дальнейшем продолжении вновь приходит на ось  $x_1$ . Здесь ось  $Ox_1$  является осью симметрии.

Условия кососимметрии для двумерной системы имеет вид

$$F_1(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2); \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, -x_2) \quad (3)$$

или

$$F_1(x_1, -x_2) = -F_1(-x_1, x_2); \quad F_2(x_1, -x_2) = -F_2(-x_1, x_2).$$

С помощью условий кососимметрии также можно установить существование замкнутой интегральной кривой в случае нелинейного осциллятора с неустойчивой особой точкой (неустойчивый фокус). В случае устойчивого фокуса траектория, имея тенденцию к кривой симметрии, может приходиться в особую точку. В обоих случаях выполняются условия (3).

Существование замкнутой траектории в трехмерных системах связано с характеристическими показателями Ляпунова (ХПЛ). В случае замыкания траектории в трехмерной системе ХПЛ удовлетворяют условию  $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 \leq 0$ . В автономной системе, для произвольно ограниченного решения, не стремящегося к особой точке, один из показателей спектра ХПЛ равен нулю ( $\Lambda_2 = 0$ ).

В консервативной системе при замыкании траектории имеем  $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 = 0$ . Если траектория замкнута, то неустойчивость (например, в случае [4, с. 27]) не сопровождается потерей устойчивости орбиты.

### §1. Движение твердого тела (случай Эйлера).

Теорема о неустойчивости Четаева [4] применима к задаче о неустойчивости вращения твердого тела вокруг средней оси эллипсоида инерции. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} = (J_y - J_z)\omega_y\omega_z; \quad J_y \frac{d\omega_y}{dt} = (J_z - J_x)\omega_x\omega_z; \quad J_z \frac{d\omega_z}{dt} = (J_x - J_y)\omega_x\omega_y. \quad (4)$$

Для эллипсоида инерции механической системы (4) в случае неустойчивости верны неравенства [4]

$$J_x < J_z < J_y. \quad (5)$$

В случае Эйлера оси координат являются главными центральными осями инерции и уравнения (4) суть дифференциальные уравнения относительно проекций вектора угловой скорости  $\omega$ . Учитывая неравенство (5) и полагая, что  $J_x = J$ ,  $J_z = 2J$ ,  $J_y = 3J$ , запишем систему (4) в виде

$$\frac{du}{dt} = vw; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{3}uw; \quad \frac{dw}{dt} = -uv \quad (u = \omega_x; v = \omega_y; w = \omega_z). \quad (6)$$

В уравнениях (6) существует следующая совокупность неизолированных особых точек:

$$u \neq 0, v = 0, w = 0; \quad v \neq 0, u = 0, w = 0; \quad w \neq 0, u = 0, v = 0. \quad (7)$$

Для возмущенного движения системы (6) необходимо, чтобы начальное возмущение было, по крайней мере, по двум координатам. Тогда изображающая точка не останется в неизолированных особых точках (7). Доказательство неустойчивости системы (6), связанной с неравенством (5), приводится в [4, с. 27] на основе теоремы Четаева.

О существовании в системе (6) замкнутой траектории. Обозначим начальные условия в системе (6): при  $t = 0$ :  $u(0) = u_0$ ;  $v(0) = v_0$ ;  $w(0) = w_0$ .

Введем безразмерные величины  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t}$  следующим образом:  $\bar{u} = u / v_0$ ;  $\bar{v} = v / v_0$ ;  $\bar{w} = w / v_0$ ;  $\bar{t} = tv_0$ . Рассмотрим следующие системы: систему из первого и второго уравнений системы (6), которая отображает движение на плоскости  $uv$

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = \bar{v}\bar{w}; \quad \frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = 1 / 3\bar{u}\bar{w}; \quad (8)$$

систему из второго и третьего уравнений системы (6), которая отображает движение на плоскости  $vw$

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = 1 / 3\bar{u}\bar{w}; \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{t}} = -\bar{u}\bar{v}; \quad (9)$$

систему из первого и третьего уравнений системы (6)

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = \bar{v}\bar{w}; \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{t}} = -\bar{u}\bar{v}. \quad (10)$$

Согласно физическому аспекту задачи Эйлера изображающая точка движется по поверхности. На основании первого интеграла системы (6) поверхность имеет вид

$$\frac{2}{3}u^2 + v^2 + w^2 = \text{const}. \quad (11)$$

При движении по поверхности (11) изображающая точка описывает замкнутую кривую. Запишем систему (6) в общем виде (безразмерные величины здесь и далее приведены без черты сверху)

$$\frac{du}{dt} = Q(u, v, w); \quad \frac{dv}{dt} = S(u, v, w); \quad \frac{dw}{dt} = F(u, v, w). \quad (12)$$

При рассмотрении системы вида (8) получим условия четности и нечетности функций  $Q(u, v, w)$  и  $S(u, v, w)$  относительно  $u$  –

$$Q(-u, v, w) = Q(u, v, w); \quad S(-u, v, w) = -S(u, v, w), \quad (13)$$

условия четности и нечетности тех же функций относительно  $v$

$$S(u, -v, w) = S(u, v, w); \quad Q(u, -v, w) = -Q(u, v, w), \quad (14)$$

которые устанавливают тенденцию к замыканию проекций траектории на плоскости  $uv$  с осями симметрии  $v$  и  $u$ .

При рассмотрении системы вида (9) получим условия четности и нечетности функций  $S(u, v, w)$  и  $F(u, v, w)$  по отношению к  $v$  –

$$S(u, -v, w) = S(u, v, w); \quad F(u, -v, w) = -F(u, v, w), \quad (15)$$

условия четности и нечетности тех же функций относительно  $w$

$$F(u, v, -w) = F(u, v, w); \quad S(u, v, -w) = -S(u, v, w), \quad (16)$$

которые устанавливают тенденцию к замыканию проекций траектории на плоскости  $vw$  с осями симметрии  $w$  и  $v$ .

При рассмотрении системы вида (10) получим условия четности и нечетности функций  $Q(u, v, w)$  и  $F(u, v, w)$  по отношению к  $u$  –

$$Q(-u, v, w) = Q(u, v, w); \quad F(-u, v, w) = -F(u, v, w), \quad (17)$$

условия четности и нечетности тех же функций относительно  $w$  –

$$F(u, v, -w) = F(u, v, w); \quad Q(u, v, -w) = -Q(u, v, w), \quad (18)$$

которые устанавливают тенденцию к замыканию проекций траектории на плоскости  $uw$  с осями симметрии  $w$  и  $u$ .

Сформулируем принцип симметрии с привлечением неповторяющихся условий из приведенных (13) – (18) на правые части уравнений (12).

В системе (12) существует замкнутая траектория, если в функциях  $Q(u, v, w)$ ,  $S(u, v, w)$ ,  $F(u, v, w)$  выполняются следующие условия: четности –

$$Q(-u, v, w) = Q(u, v, w); \quad S(u, -v, w) = S(u, v, w); \quad F(u, v, -w) = F(u, v, w)$$

и нечетности –

$$Q(u, -v, w) = -Q(u, v, w); \quad Q(u, v, -w) = -Q(u, v, w); \quad S(-u, v, w) = -S(u, v, w);$$

$$S(u, v, -w) = -S(u, v, w); \quad F(-u, v, w) = -F(u, v, w); \quad F(u, -v, w) = -F(u, v, w)$$

относительно переменных  $u, v, w$ .

Для замыкания траекторий на плоскости необходимо одно условие четности и нечетности, например, (1), либо (2). Поэтому количество условий можно уменьшить. Сформулируем принцип симметрии, уменьшая количество условий из приведенных (13) – (18). Остаются условия (14) (ось симметрии  $u$ ), условия (16) (ось симметрии  $v$ ), условия (17) (ось симметрии  $w$ ).

В системе (12) существует замкнутая траектория, если в функциях  $Q(u, v, w)$ ,  $S(u, v, w)$ ,  $F(u, v, w)$  выполняются следующие условия:

четности –

$$Q(-u, v, w) = Q(u, v, w); \quad S(u, -v, w) = S(u, v, w); \quad F(u, v, -w) = F(u, v, w) \quad (19)$$

и нечетности –

$$Q(u, -v, w) = -Q(u, v, w); \quad S(u, v, -w) = -S(u, v, w); \quad F(-u, v, w) = -F(u, v, w) \quad (20)$$

относительно переменных  $u, v, w$ .

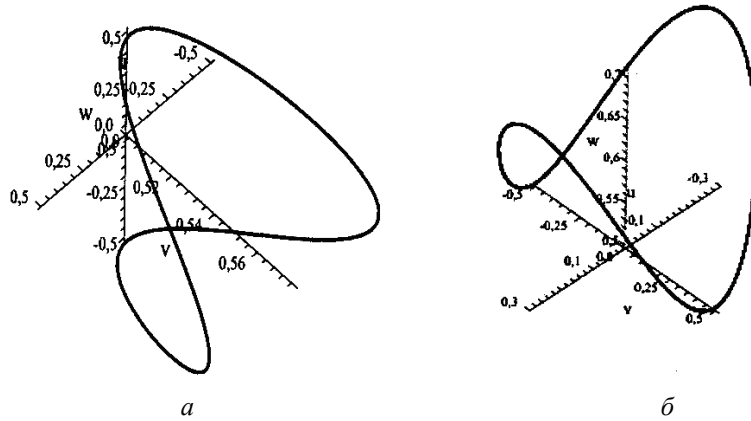


Рис. 1

На рис. 1, а приведена замкнутая кривая, удовлетворяющая неравенству (5) и условиям (19), (20). На рис. 2, а – б приведены временные реализации по координатам  $u, v, w$ . Начальные условия следующие:

$$v(0) = 0,5; \quad w(0) = 0,5; \quad u(0) = 0. \quad (21)$$

Неустойчивость вращений в окрестности средней оси эллипсоида инерции проявляется как увеличение отклонения от нуля (рис.2, б) при сохранении устойчивости орбиты.

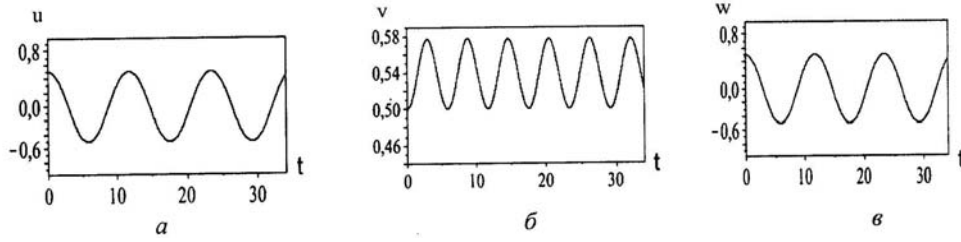


Рис. 2

О бифуркациях в системе (6). Введем малые отклонения  $\delta u, \delta v, \delta w$  в системе (6) от частных решений  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$  и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta u}{dt} = \hat{w}\delta v + \hat{v}\delta w, \quad \frac{d\delta v}{dt} = \frac{1}{3}(\hat{w}\delta u + \hat{u}\delta w), \quad \frac{d\delta w}{dt} = -(\hat{v}\delta u + \hat{u}\delta v).$$

Характеристическое уравнение, соответствующее системе в вариациях, имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda(\hat{u}^2/3 + \hat{v}^2 - \hat{w}^2/3) + 2/3\hat{u}\hat{v}\hat{w} = 0.$$

Запишем характеристические показатели точек на следующих плоскостях:  $uv, uw, vw$ , соответственно, т.е.

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\hat{v}^2 - \hat{u}^2/3}; \quad \lambda_3 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\hat{u}^2/3 + \hat{w}^2/3}; \quad \lambda_3 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\hat{w}^2/3 - \hat{v}^2/3}; \quad \lambda_3 = 0.$$

На плоскости  $uv$  все точки имеют эллиптический характер. На плоскостях  $uw, vw$  можно построить сепаратрису, которая разделяет эллиптические и седловые точки. Геометрическая симметрия может быть тождественна симметрии ХПЛ точек на траектории. Для трехмерной консервативной системы, имеющей симметрию проекций на трех плоскостях, сигнатура спектра ХПЛ траектории имеет вид  $(0,0,0)$ . Так как траектория замкнута, то неустойчивость согласно теореме Четаева (см. [4]) не сопровождается потерей орбитальной устойчивости.

Об устойчивом вращении вокруг наибольшей полуоси эллипсоида инерции. В [4] установлена устойчивость движения вокруг наибольшей полуоси инерции. Пусть эллипсоид инерции удовлетворяет неравенству

$$J_x > J_y > J_z. \quad (22)$$

Учитывая условие (22) и полагая, что  $J_x = 3J, J_y = 2J, J_z = J$ , запишем систему (4) так:

$$du/dt = vw/3; \quad dv/dt = -uw; \quad dw/dt = uv \quad (u = \omega_x; \quad v = \omega_y; \quad w = \omega_z). \quad (23)$$

Уравнения (23) представлены системой (12). Для системы (12) согласно принципу симметрии существует замкнутая траектория в трехмерном пространстве. На рис. 1, б приведена замкнутая устойчивая кривая, удовлетворяющая неравенству (22). На рис. 3, а – в приведены временные реализации по координатам  $u, v, w$  системы (23) при начальных условиях (21).

Физический результат такой: если траектория имеет тенденцию замыкания на каждой плоскости, то существует траектория, замкнутая в трехмерном пространстве.

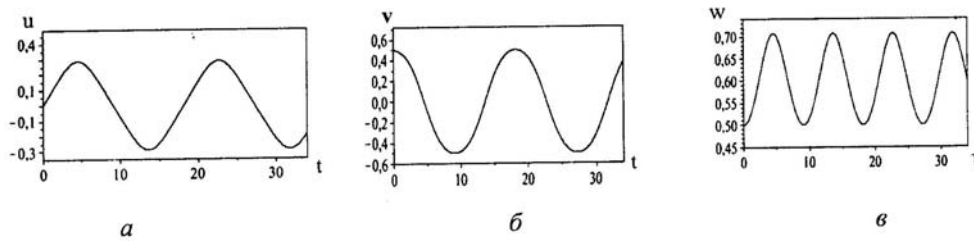


Рис. 3

Далее рассмотрен случай диссипативной системы.

## §2. Теорема о принципе симметрии в трехмерной диссипативной системе.

Принцип симметрии в трехмерных системах состоит в нахождении координатной плоскости, на которую пространственная интегральная кривая проецируется в замкнутую симметричную кривую. На двух других координатных плоскостях процесс устойчив и может сопровождаться симметрией.

Рассмотрим систему трех дифференциальных нелинейных уравнений в виде

$$dx/dt = -xz + y; \quad dy/dt = -x; \quad dz/dt = f(x, z). \quad (24)$$

Предположим, что замкнутая траектория лежит на поверхности и имеет определенный вид симметрии. Можно отыскать плоскость, на которую траектория проецируется в замкнутую кривую. Замкнутая траектория имеет определенные проекции на две другие плоскости. Последние две проекции на координатные плоскости могут иметь симметрию, но не обязательно замыкание. Еще одно предположение относится к неустойчивости системы (24) в окрестности нуля. Поскольку двумерные проекции доступны прогнозированию геометрической симметрии и устойчивости, то все приведенное выше можно сформулировать в виде теоремы.

**Теорема 1.** Рассмотрим систему (24) при следующих предположениях:

- 1) Система (24) имеет неустойчивое решение в окрестности нуля;
- 2) Движение изображающей точки (соответствующей системе (24)) на плоскости  $xz$  определяется системой

$$dx/dt = -xz; \quad dz/dt = f(x, z), \quad (25)$$

которая имеет две устойчивые особые точки, симметрично расположенные относительно оси  $z$ .

Тогда в трехмерной системе (24) существует замкнутая интегральная кривая.

**Доказательство.** Движение на плоскости  $xy$  уравнений (24) определяется системой

$$dx/dt = y; \quad dy/dt = -x, \quad (26)$$

которая имеет симметричную замкнутую траекторию: особая точка центр, траектория на плоскости имеет симметрию относительно осей  $x, y$ . Движение на плоскость  $yz$  уравнений (24) определяется системой

$$dy/dt = 0; \quad dz/dt = f(z). \quad (27)$$

Переменные  $y, z$  в системе (27) не связаны между собой. Пусть начальные условия системы (24) возбуждают образование замкнутой симметричной траектории системы (26). Тогда возмущается система (25), образуются траектории, стремящиеся к особым точкам с координатами  $(\pm x_0, z_0)$ . Колебания системы (24) приобретают вид установившегося процесса, который характеризуется интегральной кривой в пространстве  $xyz$ . Теорема доказана.

Предлагаемая теорема носит геометрический характер. При анализе движений на координатных плоскостях находится плоскость, на которой образуется симметричная по двум осям замкнутая кривая (плоскость  $xu$ ). Две остальные координатные плоскости стабилизируют качественную картину и симметрию.

**Пример.** О замыкании траектории генератора с квадратичной нелинейностью. Рассмотрим генератор с квадратичной инерционной нелинейностью в виде безразмерной системы, приведенной в [1], т.е.

$$\frac{dX}{dt} = mX - XZ + Y; \quad \frac{dY}{dt} = -X; \quad \frac{dZ}{dt} = -b(Z - X^2). \quad (28)$$

Система (28) имеют одну особую точку  $O(0,0,0)$ . Введем малые отклонения  $\delta X, \delta Y, \delta Z$  в системе (28) от частных решений  $\bar{X}(t), \bar{Y}(t), \bar{Z}(t)$  и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta X}{dt} = (m - \bar{Z})\delta X + \delta Y - \bar{X}\delta Z; \quad \frac{d\delta Y}{dt} = -\delta X; \quad \frac{d\delta Z}{dt} = -b(\delta Z - 2\bar{X}\delta X). \quad (29)$$

Характеристическое уравнение системы (29) имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(b - m + \bar{Z}) + \lambda(b(-m + \bar{Z}) + 2\bar{X}^2 + 1) + b = 0. \quad (30)$$

Корни, соответствующие особой точке  $O(0,0,0)$  системы (28), определяются из уравнения  $\lambda^3 + \lambda^2(b - m) + \lambda(-bm + 1) + b = 0$  либо  $(\lambda + b)(\lambda^2 - \lambda m + 1) = 0$  и равны  $\lambda_{1,2} = m/2 \pm \sqrt{(m/2)^2 - 1}$ ;  $\lambda_3 = -b$ . Точка  $O$  имеет тип седлофокуса при значениях параметра  $(m/2)^2 < 1$ .

Покажем, что на оси  $Z$  существуют точки, которым соответствует разделение характеристического уравнения вида (30) на два. В точке  $A(X = 0, Y = 0, Z = m + b)$  характеристическое уравнение имеет вид  $(\lambda + b)(\lambda^2 + b\lambda + 1) = 0$ . Значения характеристических показателей –  $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - 1}$ ;  $\lambda_3 = -b$ . В точке  $C(X = 0, Y = 0, Z = m)$  характеристическое уравнение имеет вид  $(\lambda + b)(\lambda^2 + 1) = 0$  и значения характеристических показателей в этой точке –  $\lambda_{1,2} = \pm i$ ;  $\lambda_3 = -b$ . В точке  $D(X = 0; Y = 0; Z = -m)$  характеристическое уравнение имеет вид  $(\lambda + b)(\lambda^2 - 2m\lambda + 1) = 0$ . Значения характеристических показателей в этой точке –  $\lambda_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$ ,  $\lambda_3 = -b$ .

Таким образом, в точке  $C$  происходит смена знака действительной части двух комплексно-сопряженных корней. В характеристическое уравнение (30) входят частные решения  $\bar{X}, \bar{Z}$ . Плоскость  $OXZ$  является координатной плоскостью, которая определяет бифуркационные процессы системы (28).

Применим метод сравнения для доказательства неустойчивости решения системы (28) [2, 3, 15]. Введем функции  $V_1 = X^2/2, V_2 = Y^2/2, V_3 = X^2/2 + Z^2/2$ . Производные функций  $V_j (j = 1, 2, 3)$  в силу системы (28) допускают оценки

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= mX^2 - X^2Z + XY \leq mX^2 + Y^2/2 + X^2/2 + Z^2/2 + X^4/2; \\ \frac{dV_2}{dt} &= -XY \leq X^2/2 + Y^2/2; \quad \frac{dV_3}{dt} = bX^2Z + mX^2 - X^2Z + XY - bZ^2 \leq \\ &\leq (2m + b)X^2/2 + Y^2/2 + (1 - b)(X^2 + Z^2)/2 + (1 + b)X^4/2. \end{aligned}$$

Здесь производные двух переменных заменены на сумму

$$\pm bX^2Z \leq bX^4/2 + bZ^2/2, \pm XY \leq X^2/2 + Y^2/2, \pm X^2Z \leq X^4/2 + Z^2/2.$$

Запишем систему сравнения

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = 2m\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + 2\vartheta_1^2; \quad \frac{d\vartheta_2}{dt} = \vartheta_1 + \vartheta_2; \quad (31)$$

$$\frac{d\vartheta_3}{dt} = (2m+b)\vartheta_1 + \vartheta_2 + (1-b)\vartheta_3 + 2(1+b)\vartheta_1^2.$$

При выполнении условия  $b < 1$  система сравнения (31) показывает, что траектория уходит от нуля. Зададим следующие значения параметров:  $(m, b) = (1; 0, 2)$ .

Перенесем начало координат в точку  $C$ . Введем новую систему координат  $Cxyz$ , где  $x = X$ ;  $y = Y$ ;  $z = Z - m$ . Тогда система (28) примет вид системы (24), т.е.

$$\frac{dx}{dt} = -xz + y; \quad \frac{dy}{dt} = -x; \quad \frac{dz}{dt} = -b(z + m - x^2). \quad (32)$$

Рассмотрим движение траектории системы (32) на плоскости  $xz$ , которая определяется системой уравнений

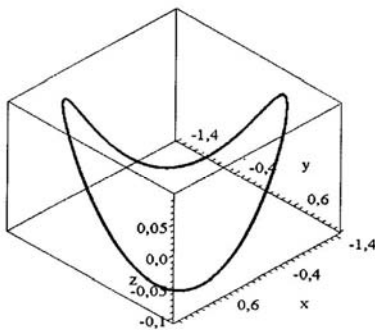
$$dx/dt = -xz; \quad dz/dt = -b(z + m - x^2). \quad (33)$$

Находим особые точки системы (33). Примем  $z = 0$ . Система (33) имеет две особые точки, координаты которых  $x = \pm\sqrt{m}, z = 0$ . Особые точки  $C_1(\sqrt{m}, 0), C_2(-\sqrt{m}, 0)$  имеют характеристические показатели  $\lambda_{1,2} = -b/2(1 \pm \sqrt{1 - 8m/b})$ . Возникновение замкнутой траектории в системе (32) связано с начальным возмущением по переменной  $x$ , которое вызывает возмущение переменной  $y$ . Так как все предполагаемые условия теоремы 1 удовлетворяются, то можно утверждать о существовании замкнутой кривой в системе (32).

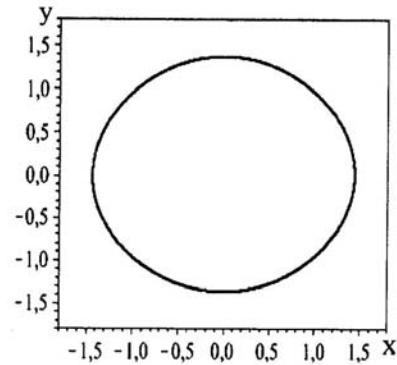
На рис. 4, *a*, *б* показаны объемное изображение траектории системы (32) и проекция на плоскость  $xy$ . Начальное возмущение  $x(0) = 0,01$ .

Рассмотрим второй вариант определения особой точки в уравнениях (33). Примем  $x = 0$ , тогда особая точка имеет координаты

$$x = 0; \quad z = -m. \quad (34)$$



*a*



*б*

Рис. 4



Особая точка с координатами (34) совпадает с точкой  $O$  системы (28). При начальном возмущении только по переменной  $z$  в системе (28) не рождается замкнутая траектория, т.к. проекция на плоскость  $xu$  системы (32) – точка, поскольку отсутствует возбуждение системы относительно переменных  $x, y$ .

Качественный результат, полученный с помощью принципа симметрии, можно получить методом построения функции Ляпунова.

### §3. Аттракторы в модели Рёсслера.

Модель Рёсслера возникла в динамике химических реакций, протекающих в некоторой среде с перемешиванием [17]. Она описывается безразмерной системой

$$\frac{dx}{dt} = -y - z; \quad \frac{dy}{dt} = x + ay; \quad \frac{dz}{dt} = b - cz + xz, \quad (35)$$

где  $a, b, c$  – положительные величины. Система (35) рассматривалась многими авторами (см. [14, 18] и библиографию там). Координаты особых точек системы (35) получим из уравнения  $az^2 - cz + b = 0$ . Примем в процессе исследования следующие значения параметров:

$$a = 0, 1; 0, 2; \quad b = 0, 2; 0, 4; \quad c = 1, \dots, 4, 3. \quad (36)$$

Рассмотрим ближайшую к нулю особую точку  $A(x = az_a, y = -z_a, z = z_a)$ , где  $z_a = c / (2a) - \sqrt{(c / 2a)^2 - b / a}$ . Вторая особая точка  $B(x = az_b, y = -z_b, z = z_b)$ , где  $z_b = c / (2a) + \sqrt{(c / 2a)^2 - b / a}$ . Свяжем с точкой  $A$  систему координат  $A\xi\eta\chi$ , где  $\xi = x - az_a$ ;  $\eta = y + z_a$ ;  $\chi = z - z_a$ . Система (35) в новых координатах примет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = -\eta - \chi; \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi + a\eta; \quad \frac{d\chi}{dt} = z_a\xi - b / z_a\chi + \xi\chi. \quad (37)$$

Здесь принято во внимание, что  $-b / z_a = -c + az_a$ . Система (37) может быть представлена в виде математической модели нелинейного автоматически регулируемого осциллятора

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - a \frac{d\eta}{dt} + \eta + \chi = 0; \quad \frac{d\chi}{dt} = -b / z_a\chi + (z_a + \chi) \left( \frac{d\eta}{dt} - a\eta \right).$$

Такое представление системы (37) облегчает процесс поиска периодического решения. Введем малые отклонения  $\delta\xi, \delta\eta, \delta\chi$  в системе (37) от частных решений  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\chi}$  и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = -\delta\eta - \delta\chi; \quad \frac{d\delta\eta}{dt} = \delta\xi + a\delta\eta; \quad \frac{d\delta\chi}{dt} = -(b / z_a - \bar{\xi})\delta\chi + (z_a + \bar{\chi})\delta\xi.$$

Характеристическое уравнение системы в вариациях имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2 \left( \frac{b}{z_a} - \bar{\xi} - a \right) + \lambda \left( -a \left( \frac{b}{z_a} - \bar{\xi} \right) + z_a + \bar{\chi} + 1 \right) - a(z_a + \bar{\chi}) + \frac{b}{z_a} - \bar{\xi} = 0. \quad (38)$$

Из уравнения (38) следует, что бифуркационный процесс связан с решениями  $\bar{\xi}, \bar{\chi}$ .

Подставим в уравнение (38) координаты особых точек и получим, что в пределах значений параметров (36) в точке  $A$  имеет место пара корней комплексных  $\lambda_{1,2}$  с положительной действительной частью и корень  $\lambda_3 < 0$ , седловая величина (термин

принят согласно работе [18])  $\sigma_a = \operatorname{Re}\lambda_1 + \operatorname{Re}\lambda_1 + \lambda_3 < 0$ . Точка  $A$  – седлофокус. В точке  $B$  – пара корней мнимых и действительный корень  $\lambda_3 > 0$ . Точка  $B$  отдалена от начала координат (при значениях параметров  $(a, b, c) = (0, 2; 0, 2; 2)$  имеет место  $z_b = 9,899$ , а при  $(a, b, c) = (0, 2; 0, 2; 4, 3)$  –  $z_b = 21,453$ ), и можно предположить, что рассматривается устойчивость трехмерной диссипативной системы с одной особой точкой (здесь имеется в виду, что вторая особая точка весьма слабо влияет на качественную картину в окрестности точки  $A$ ). В задаче Рёсслера отметим две координатные плоскости, которые формируют трехмерную кривую:  $\xi\eta$  и  $\xi\chi$ . На плоскости  $\eta\chi$  проекция определяется уравнениями  $d\eta/dt = a\eta$ ;  $d\chi/dt = 0$ . Переменные  $\eta, \chi$  не связаны между собой. На плоскости  $\xi\eta$  уравнения движения

$$\frac{d\xi}{dt} = -\eta; \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi + a\eta \quad (39)$$

описывают траекторию периодического характера линейного осциллятора  $\ddot{\xi} - a\dot{\xi} + \xi = 0$  либо  $\dot{\eta} - a\eta + \eta = 0$ , где  $a < 1$ . Уравнение (39) имеет тенденцию к образованию в плоскости  $\xi\eta$  кососимметричной замкнутой кривой, так как удовлетворяет условию (3). Особая точка линейной системы (39) – неустойчивый фокус.

На плоскость  $\xi\chi$  траектория проецируется согласно системе

$$\frac{d\xi}{dt} = -\chi; \quad \frac{d\chi}{dt} = -b/z_a\chi + z_a\xi + \xi\chi. \quad (40)$$

С помощью уравнений в вариациях системы (40) запишем характеристическое уравнение  $\lambda^2 + \lambda(b/z_a - \bar{\xi}) + \bar{\chi} + z_a = 0$ . Характеристические показатели для любой точки на плоскости  $\xi\chi$  имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b/z_a + \bar{\xi}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-b/z_a + \bar{\xi}}{2}\right)^2 - \bar{\chi} - z_a}. \quad (41)$$

Особая точка ( $\xi = 0, \chi = 0$ ) имеет характеристические показатели  $\lambda_{1,2} = -b/z_a \pm \sqrt{b^2/4z_a^2 - z_a}$ . Для значений параметров (36) ( $z_a < 1$  либо  $z_a = 1$ ) это – устойчивый узел. Тенденция к кососимметрии двумерной кривой на плоскости  $\xi\eta$  может реализовать замкнутую трехмерную кривую, если на плоскости  $\xi\chi$  двумерная кривая имеет устойчивую особую точку.

Приведенный выше предварительный анализ показывает, что в системе (37) может иметь место регулярный аттрактор с кососимметрией на плоскости  $\xi\eta$  при следующих условиях:

а) особая точка системы (37) имеет седлофокусный характер с седловой величиной  $\sigma_a < 0$ ; б) круговая траектория трехмерной системы на плоскости  $\xi\eta$  образует предельный цикл (вследствие кососимметрии) и имеет седлофокусные точки с седловой величиной  $\sigma_s < 0$ , где  $\sigma_s = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(t) dt$ , где  $\sigma(t)$  – седловая величина трехмерной системы на плоскости  $\xi\eta$ ;

в) соотношение седловых величин в пунктах а) и б) должно быть таким:  $|\sigma_s| > |\sigma_a|$ .

**Теорема 2.** Рассмотрим систему (37) при следующих предположениях.

1) Система (39) на плоскости  $\xi\eta$  имеет неустойчивую круговую кривую, которая удовлетворяет условию (3). На плоскости  $\xi\chi$  система (40) имеет устойчивую особую точку, согласно выражению (41).

2) Выполняются условия а), б), в).

Тогда в трехмерной системе (37) существует замкнутая интегральная кривая.

**Доказательство.** На плоскости  $\xi\eta$  круговая кривая может сохранять кососимметрию и устойчивость на  $t \rightarrow \infty$ , если на плоскости  $\xi\chi$  имеет место устойчивая особая точка. Изображающая точка системы (37) стремится к образованию предельного цикла в силу выполнения условия в). При некоторых значениях параметров образуется замкнутая круговая траектория, которая имеет частоту, близкую к периодической кривой системы (39). В тех случаях, когда частота, вследствие замедления движения изображающей точки, уменьшается, возникает замыкание через кратное число периодов. Теорема доказана.

На рис. 5, а изображена замкнутая кривая при параметрах

$$(a, b, c) = (0, 2; 0, 2; 2). \quad (42)$$

Речь идет об аттракторе с седлофокусной особой точкой с отрицательной седловой величиной ( $\sigma = 2\text{Re}\lambda_{1,2} + \lambda_3 < 0$ ) и с седлофокусными точками на всей замкнутой кривой. С помощью численного решения системы (37) и характеристического уравнения (38) определим значения характеристических показателей и  $\sigma$  в точках кривой. Точки почти на всей замкнутой кривой имеют характеристические показатели  $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$ ;  $|\text{Re}\lambda_{1,2}| \ll 1$ ,  $\lambda_3 < 0$  с величиной  $\sigma < 0$ . На рис. 5, б изображены две замкнутые траектории: внутри – при значениях параметров  $(a, b, c) = (0, 2; 0, 2; 1)$ ; снаружи –  $(a, b, c) = (0, 1; 0, 2; 4)$ . Жирной линией отмечены точки, для которых  $\sigma > 0$ . Бифуркации происходят при переходе к участкам, которые отмечены жирными линиями (рис. 5, б). Среднее за период  $\sigma_s$  по всем точкам замкнутой кривой – меньше нуля.

Кососимметрия в данной задаче указывает на существование замкнутой траектории. При увеличении значения параметра  $b$  в данных (42) аттрактор вырождается в точку. Покажем, что альтернативой аттрактора Рёсслера является странный аттрактор.

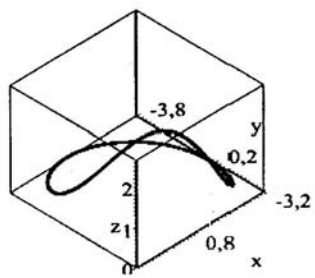
**Механизм образования странного аттрактора.** Зададим значения параметров  $(a, b, c) = (0, 2; 0, 2; 4, 3)$ . С помощью характеристического уравнения (38) приведем анализ точек поля, на котором можно просматривать бифуркационные процессы (плоскость  $A\xi\chi$ ).

**Первый квадрант** ( $\xi \geq 0, \chi \geq 0$ ) разделен штриховой вертикальной прямой (рис. 5, в). Штриховая линия является следом плоскости параллельной координатной плоскости  $A\eta\chi$ . Слева от штриховой линии все точки – седлофокусные, величина  $\sigma < 0, |\text{Re}\lambda_{1,2}| \ll 1$ ;  $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0, \lambda_3 < 0$ . Справа от штриховой прямой все точки окрестности нуля – седлофокусные ( $\sigma > 0, |\text{Re}\lambda_{1,2}| > 1$ ;  $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0, \lambda_3 < 0$ ) либо и узлофокусные ( $\sigma > 0, |\text{Re}\lambda_{1,2}| > 1$ ;  $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0, \lambda_3 > 0$ ).

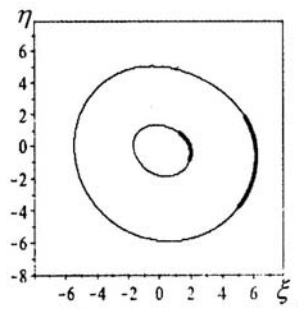
**Первый квадрант** порождает неустойчивые круговые кривые, которые при каждом обороте кривой имеют неодинаковую кинематику из-за седлофокусных точек.

**Второй квадрант** ( $\xi \leq 0, \chi \geq 0$ ). В окрестности нуля второго квадранта все точки узлофокусные с величиной  $\sigma < 0, |\text{Re}\lambda_{1,2}| < 1, \text{Re}\lambda_{1,2} < 0, \lambda_3 < 0$ .

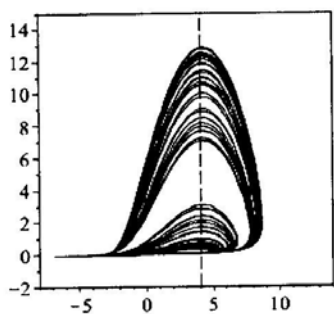
**Третий квадрант** ( $\xi \leq 0, \chi \leq 0$ ). Интегральная кривая, попадая в третий квадрант, остается притянутой к плоскости  $A\eta\xi$  в силу того, что точки, в основном, узлофокусные и величина  $\sigma < 0$ .



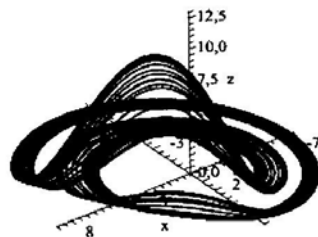
*a*



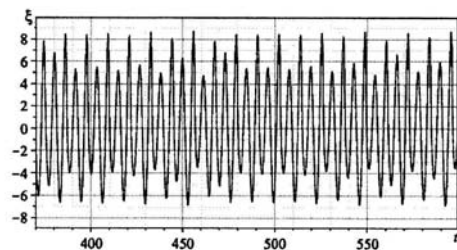
*б*



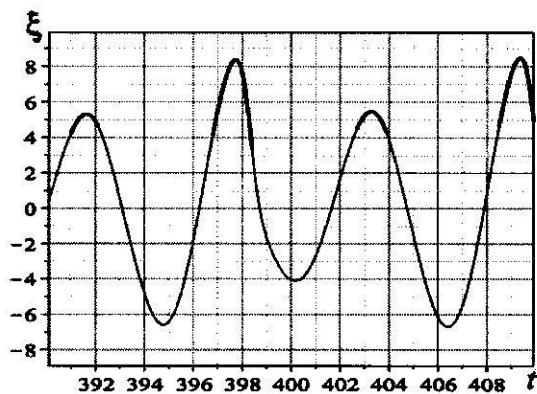
*в*



*г*



*д*



*е*

*Рис. 5*

*Четвертый квадрант* ( $\xi \geq 0, \chi \leq 0$ ). Здесь также имеет место разделение на область с  $\sigma_2 < 0$  и область с  $\sigma > 0$ . Первый и четвертый квадранты порождают неустойчивость орбиты интегральной кривой.

На рис. 5, *г* показана трехмерная картина странного аттрактора системы Рёслера.

Рассмотрим временную реализацию хаоса  $\xi(t)$  (рис. 5, *д*) и фрагмент этой реализации (рис. 5, *е*). На фрагменте жирными линиями отмечены совокупности  $j$ -ых точек на  $\xi(t)$ , которые имеют положительную величину  $\sigma_j = \text{Re}\lambda_{1j} + \text{Re}\lambda_{2j} + \lambda_{3j} > 0$ . На тонких линиях траектории –  $\sigma_j < 0$ . Отметим, что траектория сохраняет периодичность движения. Орбитальная неустойчивость порождена неравномерностью бифуркационного процесса (рис. 5, *е*). Это определяет хаос. Однако, орбитальная неустойчивость может не порождать ХПЛ со знаком плюс [10].

Рассмотрим систему (37) при следующих предположениях: 1) траектория системы (37) имеет периодическую составляющую, так что характер точек седлофокусный либо узлофокусный; 2) на каждом обороте интегральная кривая теряет устойчивость орбиты; 3) на каждом обороте интегральная кривая притягивается к координатной плоскости  $A\eta\xi$ . Кульминация притяжения относится к третьему квадранту.

**Утверждение.** *При выполнении предположений 1) – 3) система (37) порождает хаотический аттрактор.*

Известно, что все траектории хаотического аттрактора неустойчивы по Ляпунову. Поэтому хотя бы один ХПЛ должен быть положительным [1, 14]. Ряд основополагающих работ по динамике хаотических систем предполагает вычисление ХПЛ по алгоритму Бенеттина и др. [1, 14]. В данной работе применен один подход вычисления характеристических показателей точек траектории. Отметим, что траектория сохраняет периодичность движения и орбитальная неустойчивость выступает как повторяемость бифуркационных процессов за период. Однако, известно [10], что из орбитальной неустойчивости не следует существование положительного ХПЛ.

Таким образом, симметрия на одной из координатных плоскостей указывает на существование замкнутой кривой при выполнении определенных условий, по которым можно подобрать параметры трехмерной системы. Это отражено в виде Теорем 1, 2. Согласно Утверждению альтернативой аттрактора системы (37) является странный аттрактор.

#### **Заключение.**

Консервативная система является примером следующего физического результата: существование замкнутой траектории связано с тенденцией к замыканию на координатной плоскости.

Теоремы 1, 2 устанавливают существование замкнутых траекторий в трехмерном пространстве с диссипацией, если имеет место замыкание траектории в силу симметрии, либо кососимметрии на одной из координатных плоскостей и дополнительных условий на двух других координатных плоскостях. По этим условиям можно подобрать параметры трехмерной системы.

При анализе системы Рёслера привлекается рассмотрение механизма бифуркаций точек на траектории. Согласно Утверждению альтернативой аттрактора системы (37) является странный аттрактор. Система порождает кратное увеличение периода и хаос. Хаосу свойственно появление нерегулярных участков траектории с положительной седловой величиной.

**РЕЗЮМЕ.** Наведено достатні умов існування замкненої траєкторії у системі, заданій у тривимірному просторі. Розглянуто консервативну та дисипативну системи. Встановлено, що альтернативою аттрактору системи Рёслера є дивний аттрактор.

1. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. – М.:Наука, 1990. – 312 с.
2. Мартынюк А.А., Оболенский А.Ю. Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 8. – С. 1392 – 1407.
3. Мартынюк А.А., Никитина Н.В. О периодическом движении и бифуркациях в трехмерных нелинейных системах // Нелінійні коливання – 2014. – **17**, № 2. – С.268 – 280.
4. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. – М.: Наука, 1990. – 176 с.
5. Belhaq M., Lakrad F. Analytics of homoclinic bifurcations in three-dimensional systems // Int. J. Bifurc. and Chaos. – 2002. – **12**, N 11. – P. 2479 – 2486.
6. Bi P., Han M. Existence and bifurcation of periodic solutions of three-dimensional delay differential equations // Int. J. Bifurc. and Chaos. – 2004. – **14**, N 11. – P. 3921 – 3929.
7. Campos J. Massera's theorem for monotone dynamical systems in three dimensions // J. Mat. Anal. and Appl. – 2002. – **269**. – P. 607 – 615.
8. Chamberland M., Gasull A. Chini equations and isochronous centers in three-dimensional differential systems // Qualitative Theory of Dynamical Systems. – 2009. – **99**. – P. 1 – 10.
9. Ivanov A.F., Lani-Wayda B. Periodic solutions for tree-dimensional non-monotone systems with time delays // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2004. – **2**, **3**. – P.667 – 692.
10. Leonov G.A. Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St-Peterburg: University Press, 2008. – 160 p.
11. Martynyuk A.A., Nikitina N.V. Bifurcation Processes Periodically Perturbed Systems // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 1 – P. 103 – 113.
12. Martynyuk A.A., Nikitina N.V. On Stability and Bifurcations in a Model of Earth Magnetic // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 6. – P. 510 – 520.
13. Martynyuk A.A., Nikitina N.V. Bifurcations and Multi-Stabilty of Vibrations of Three-Dimensional System // Int.Appl.Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 223 – 232.
14. Neimark Yu.I, Landa P.S. Stochastic and Chaotic Oscillations. – Dordrecht: Kluwer, 1992. – 424p.
15. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equations. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. – 550 p.
16. Nikitina N.V. On Bifurcational Processes in Systems with Periodic Disturbations // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, № 1. – P. 97 – 106.
17. Rössler O.E. Chemical turbulence: chaos in a simple reaction – diffusion system // Z. Naturforsch. – 1976. – **31** a, H.10. – S. 1168 – 1172.
18. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. – Singapore: World Scientific, 2001. – 592 p.

Поступила 20.04.2013

Утверждена в печать 19.02.2015