А. А. Мартынюк

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ (ОБЗОР)

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: center@inmech.kiev.ua

Abstract. The sufficient conditions of different types of stability are given for three classes of hybrid systems, that are modeled by the dynamical equations over the time scale, the systems with aftereffect under impulsive perturbations, and the equations in the Banach space. Some general results are illustrated by examples and applications to mechanics and theory of neural networks.

Key words: DE-model of hybrid system, hybrid impulsive systems with aftereffect, hybrid systems in metric spaces, matrix Lyapunov functions method, stability, boundedness, periodicity.

Введение.

Классическая теория устойчивости движения объединяет совокупность методов и подходов, которые позволяют ответить на вопрос об устойчивости состояния равновесия в математической модели движения или определенного процесса, встречающихся в реальных условиях. Как правило, такими моделями являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными. Имеется ряд монографий и книг [см. 10, 13, 14, 15, 67, 77, 117], в которых приведены основные подходы к решению данной проблемы.

Для описания современных технических и технологических устройств и систем применяются математические модели, отличные от упомянутых выше, и такие, для исследования которых требуются адекватные по содержанию методы качественного анализа. Одной из первых моделей гибридной системы была модель Витсенхаузена (см. [115]).

В этой модели состояние системы имеет две компоненты: непрерывную и дискретную во времени. Непрерывное состояние системы описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которых зависит от дискретного состояния. Дискретное состояние изменяется, когда непрерывное состояние попадает в некоторую область в пространстве состояний.

«Гибридность» математической модели реальной системы возникает тогда, когда ее поведение описывается различными типами уравнений. Примерами таких физических систем являются:

- непрерывные системы с фазовыми изменениями (прыгающий шар, шагающий робот, рост биологических клеток и их деление);
- непрерывные системы, управляемые дискретными автоматами (термостат, химическое производство с дискретно вносимым катализатором, автопилот);
- координируемые процессы (взлет и посадка самолетов крупного аэропорта, управление потоком автомобилей на автобанах).

Кроме того, термин «гибридная система» применяется в настоящее время для описания динамики объектов, содержащих нейронные сети, различные устройства нечеткой логики, электрические и механические составляющие в сложных системах и многих других ситуациях. Важным примером гибридных систем являются также системы, состоящие из цифрового управляющего устройства и непрерывной компоненты, описывающей модель рассматриваемого процесса. Традиционно при исследовании таких систем производится дискретизация математической модели непрерывной компоненты и в результате получается система разностных уравнений, подлежащая исследованию. Такой подход может быть не приемлемым в современных теориях робастного управления, где как непрерывная, так и дискретная компоненты играют важную роль в их естественном представлении.

Следовательно, построение теории устойчивости гибридных систем является важной научной проблемой на данном этапе развития этого научного направления.

В данной статье рассмотрены некоторые классы гибридных систем. А именно:

- системы на временной шкале, поведение которых описывается динамическими уравнениями (DE–модель) (не путать с динамическими системами в смысле Немыцкого – Степанова [41]);
- системы с последействием при импульсных возмущениях (IE–модель);
- слабосвязанные системы, подсистемы которых определены в Банаховых пространствах (BE–модель).

Перечисленные системы, при определенных предположениях, относятся к разряду гибридных динамических систем, так как в их состав входят, по крайней мере, два или больше различных типа уравнений, которые описывают динамику независимых подсистем.

В §1 анонсированы некоторые сведения из математического анализа на временной шкале, применяемые при исследовании устойчивости DE-модели гибридной системы. Здесь обсуждаются основные подходы, применяемые при анализе устойчивости движения. Эти подходы основаны на динамических интегральных неравенствах, прямом методе Ляпунова и принципе сравнения. Создание этих подходов основано на применении результатов классической теории устойчивости движения, адаптированных к рассматриваемым задачам на основе математического анализа на временной шкале.

В §2 рассмотрены гибридные системы с последействием при импульсных возмущениях. Импульсная система считается гибридной, если в формировании динамического поведения всей системы ее компоненты (непрерывная и дискретная) играют тождественную роль. При этом достаточные условия различных типов устойчивости основаны на матричнозначных функциях, определенных на произведении пространств. Этот класс вспомогательных функций позволяет упростить применение прямого метода Ляпунова для систем с последействием и импульсным возмущением.

В §3 приведены результаты анализа устойчивости гибридных систем, состоящих из подсистем, заданных в некоторых банаховых пространствах. Здесь применяется метод векторных функций Ляпунова, компоненты которых связаны с независимыми подсистемами. При слабых связях между подсистемами получены алгебраические условия различных типов устойчивости, выраженные в терминах знакоопределенности специальных матриц при ограничениях на величину малого параметра при функциях связи подсистем.

В §4 приведены некоторые приложения общих результатов к анализу устойчивости процессов в некоторых системах с последействием при импульсных возмущениях. В частности, в задачах динамики нейронных сетей при импульсных возмущениях и задачах механики регулируемых систем.

§5 содержит краткие заключительные замечания и обсуждение некоторых новых задач для гибридных систем.редложенная Брокеттом (см. [54]), описывает динамику непрерывной системы,

§1. DE-модель гибридной системы.

Среди многих моделей гибридных систем (см. обзор в работе [66]), предложенных после модели Витсенхаузена, B-модель, п эволюционирующую согласно обыкновенному дифференциальному уравнению, и динамику дискретной системы, которая подчинялась разностному уравнению. Эта модель близка к тому, что позже было названо динамическим уравнением на временной шкале [51]. Однако Брокетт применял классический математический анализ, что не позволило представить однообразно такую ситуацию. Создание специального математического анализа на временной шкале позволило описать непрерывно дискретные системы как одно целое и открыло новые возможности для моделирования реальных процессов. Далее будут необходимы некоторые сведения из этого математического анализа на временной шкале.

1.1. Элементы математического анализа на временной шкале.

Приведем краткие сведения из математического анализа на временных шкалах, следуя статье [50] и монографии [51].

Временной шкалой $\mathbb{T}$ является любое непустое, топологически замкнутое подмножество вещественных чисел $\mathbb{R}$. Примерами временной шкалы являются: множество $\mathbb{R}$, целые числа $\mathbb{Z}$, натуральные числа $\mathbb{N}$, неотрицательные натуральные числа $\mathbb{N}_0$. Наиболее распространенными являются: шкала $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ для непрерывных процессов; $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ для дискретных во времени процессов и $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} = \{q^k\colon\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, где $q > 1$ для квантового анализа в математической физике, где применяются q-разностные уравнения. Примером временной шкалы для описания импульсных процессов является шкала

$$\mathbb{P}_{a,b} = \bigcup_k \{k(a+b),\, k(a+b)+a\},$$

где a — длина импульса и b — пробел между импульсами.

Для любого $t \in \mathbb{T}$ функция скачка вперед (назад) определяется формулами $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}\colon\ s > t\}$ и $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}\colon\ s < t\}$, соответственно.

Расстояние от произвольного элемента $t \in \mathbb{T}$ до его последователя называем зернистостью временной шкалы и определяем так:

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \quad \text{— для скачка вперед;} \quad \nu(t) = t - \rho(t) \quad \text{— для скачка назад.}$$

При помощи операторов $\sigma(t)$ и $\rho(t)$ текущие значения $\{t\}$ на временной шкале $\mathbb{T}$ классифицируются так: если $\sigma(t) = t$ $(\rho(t) = t)$, то точка $t \in \mathbb{T}$ называется плотной справа (слева); если $\sigma(t) > t$ $(\rho(t) < t)$, то точка $t \in \mathbb{T}$ называется рассеянной справа (слева), соответственно. Если точка t является рассеянной слева и рассеянной справа, тогда точка t называется изолированной или дискретной. Если точка t является плотной слева и плотной справа, тогда t является плотной.

В теории динамических уравнений наряду с множеством $\mathbb{T}$ применяется множество $\mathbb{T}^k$:

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}), & \text{если} \quad \sup \mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T}, & \text{если} \quad \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Для $f\colon\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{T}^k$ определим $f^{\Delta}(t)$, если существует такое $\gamma \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ и W-окрестности точки $t \in \mathbb{T}^k$ выполняется неравенство

$$\big|[f(\sigma(t)) - f(s)] - \gamma[\sigma(t) - s]\big| \le \varepsilon|\sigma(t) - s| \quad \text{при всех} \quad \sigma \in W.$$

В этом случае $f^{\Delta}\colon\ \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ называется Δ-производной функции f на $\mathbb{T}^k$.

Некоторые дифференциальные операторы на временной шкале приведены в табл. 1.

Из интеграла Лебега на $\mathbb{T}$ по мере, индуцируемой μ-зернистостью временной шкалы

$$J = \int_{\mathbb{T}} f(s)\, d\mu(s),$$

нетрудно получить известные стандартные результаты, приведенные в табл. 2.

Функция $p\colon\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ является регрессивной, если $1 + \mu(t)p(t) \ne 0$ при всех $t \in \mathbb{T}^k$. Далее применяются множества:

$$\mathcal{R} = \{p\colon\ \mathbb{T} \to \mathbb{R},\ \ p \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T}) \ \ \text{и} \ \ 1 + \mu(t)p(t) \ne 0 \ \ \text{при всех} \ \ t \in \mathbb{T}^k\},$$
$$\mathcal{R}^+ = \{p \in \mathcal{R}\colon\ 1 + \mu(t)p(t) > 0 \ \ \text{при всех} \ \ t \in \mathbb{T}^k\}.$$

Таблица 1

Временная шкала	Дифференциальный оператор	Название
$\mathbb{T}$	$x^{\Delta}(t) = \dfrac{x(\sigma(t)) - x(t)}{\mu(t)}$	Δ-производная
$\mathbb{R}$	$x^{\Delta}(t) = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{x(t+\theta) - x(t)}{\theta}$	эйлерова производная
$\mathbb{Z}$	$x^{\Delta}(t) = \Delta(t) = x(t+1) - x(t)$	первая разность
$h\mathbb{Z}$	$x^{\Delta}(t) = \Delta_h x(t) = \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}$	h-разность
$\overline{q^{\mathbb{Z}}}$	$x^{\Delta}(t) = \Delta_q x(t) = \dfrac{x(qt) - x(t)}{(q-1)t}$	q-разность
$\mathbb{P}_{a,b}$	$x^{\Delta}(t) = \begin{cases} \dfrac{x(t+b) - x(t)}{b}, & \sigma(t) > t, \\ \dot{x}(t), & \sigma(t) = t \end{cases}$	импульсная производная

Таблица 2

Временная шкала	Интегральный оператор	Название
$\mathbb{T}$	$J = \int\limits_{\mathbb{T}} f(s\Delta s)$	Δ-интеграл
$\mathbb{R}$	$\int\limits_a^b f(s)\Delta s = \int\limits_a^b f(s)\,ds$	стандартный интеграл Лебега
$\mathbb{Z}$	$\int\limits_a^b f(s)\Delta s = \sum\limits_{t=a}^{b-1} f(s)$	оператор суммирования
$h\mathbb{Z}$	$\int\limits_a^b f(s)\Delta s = \sum\limits_{t=a}^{b-h} f(s)h$	оператор h-суммирования
$\overline{q^{\mathbb{Z}}}$	$\int\limits_a^b f(s)\Delta s = \sum\limits_{t=a}^{b/q} \dfrac{f(s)}{(q-1)s}$	оператор q-суммирования

Далее, по мере необходимости, будут приведены некоторые другие сведения из математического анализа на временной шкале.

За последние два десятилетия появилось большое количество статей [5, 21, 46, 50, 58, 68] и др., содержащих новые результаты, полученные при разработке теории уравнений на временной шкале. Далее обзор некоторых из этих работ будет продолжен.

1.2. Уравнения возмущенного движения гибридных систем.

Известно (см. [50]), что динамика непрерывно-дискретной во времени механической и/или другой природы системы на временной шкале $\mathbb{T}$ описывается системой динамических уравнений

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где

$$x^{\Delta}(t) = \begin{cases} \dfrac{x(\sigma(t)) - x(t)}{\mu(t)}, & t \in \mathcal{A} \cup \mathcal{C}; \\ \dot{x}(t) \qquad - & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Здесь $\mathcal{A} = \{t \in \mathbb{T}\colon\ \rho(t) = t \ \text{ и } \ t < \sigma(t)\}$, $\mathcal{C} = \{t \in \mathbb{T}\colon\ \rho(t) < t \ \text{ и } \ t < \sigma(t)\}$, $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T},\ s > t\}$, $\rho(t) = \sigma(t) - t$.

Пусть вектор-функция $f(t, x) = Ax$, где A — $n \times n$-постоянная матрица и $x \in \mathbb{R}^n$, тогда система (1.1) является линейной системой уравнений на временной шкале

$$x^{\Delta}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

При $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ система (1.2) обращается в непрерывную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.3}$$

и при $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ — в дискретную во времени систему

$$x(t + k) - x(t) = Ax(t); \quad x(t_0) = x_0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{1.4}$$

Далее рассмотрим систему уравнений (cf. [35])

$$x^{\Delta}(t) = \mu(t)g(t, x(t)) + (1 - \mu(t))f(t, x(t)), \tag{1.5}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $g\colon\ \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $f\colon\ \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, тогда для любого $t \in \mathbb{R}$, $\sigma(t) = \inf(t, \infty) = t$ и $\mu(t) \equiv 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$. В этом случае из уравнений (1.5) получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{1.6}$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, тогда для любого $t \in \mathbb{Z}$, $\sigma(t) = \inf(s \in \mathbb{Z}\colon\ \ s > t) = \inf(t + 1, t + 2, \dots) = t + 1$ и $\mu(t) \equiv 1$ при всех $t \in \mathbb{T}$. В этом случае из динамического уравнения (1.5) получаем систему разностных уравнений

$$\Delta x(t) = g(t, x(t)) \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

Таким образом, уравнение (1.5) является общим видом нелинейной системы, описывающей непрерывно-дискретный во времени процесс.

1.3. Постановка задачи об устойчивости.

Напомним некоторые определения устойчивости невозмущенного движения (решения $x = 0$) системы динамических уравнений (1.1).

Определение 1.1. Состояние $x = 0$ системы (1.1):

(a) устойчиво на $\mathbb{T}$ если для любого $t_1 \in \mathbb{T}$ и любого $\varepsilon \in (0, H)$ существует $\delta = \delta(t_1, \varepsilon) > 0$ такое, что из условия $\|x(t_1)\| < \delta$ следует $\|x(t, t_0, x(t_1))\| < \varepsilon$ при всех $t \in [t_1, \infty) \cap \mathbb{T}$;

(*б*) асимптотически устойчиво на $\mathbb{T}$, если оно устойчиво и для любого $t_1 \in \mathbb{T}$ существует $\delta_1 = \delta_1(t_1) > 0$ такое, что из условия $\|x(t_1)\| < \delta_1$ следует, что $\lim \|x(t, t_0, x(t_1))\| = 0$ при $t \to \infty$;

(*в*) экспоненциально устойчиво на $\mathbb{T}$, если для любого $t_1 \in \mathbb{T}$ существуют величины $K = K(t_1)$, $\delta_1 > 0$ и $q > 0$ такие, что $\|x(t, t_1, x(t_1))\| \le K e_{-q}(t, t_1)\|x(t_1)\|$ при всех $t \in [t_1, \infty) \cap \mathbb{T}$.

Если в определениях (*а*), (*в*) величины δ и K не зависят от t_1, тогда состояние $x = 0$ системы (1.1) равномерно устойчиво или равномерно экспоненциально устойчиво на $\mathbb{T}$, соответственно.

Вернемся к линейным системам (1.2)–(1.4). Для асимптотической устойчивости состояния $x = 0$:

(*а*) системы (1.4) необходимо и достаточно, чтобы модуль собственных значений λ матрицы $I + A$ был меньше единицы;

(*б*) системы (1.3) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ матрицы A имели отрицательные действительные части;

(*в*) системы (1.2) достаточно, чтобы для всех собственных значений λ матрицы A существовала постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\gamma^{-1} \le |1 + \mu(t)\lambda| \quad \text{при всех} \quad t \in \mathbb{T}$$

и $\sigma(A) \subset S_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, где $\sigma(A)$ обозначает множество собственных значений матрицы A и

$$S_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}\colon \ \lim_{T \to \infty} \sup \frac{1}{T - t_0} \int\limits_{t_0}^{T} \lim_{s \searrow \mu(t)} \frac{\log|1 + s\lambda|}{s} \Delta t < 0 \right\},$$

$\mu(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}\colon \ t < s\} - t$ — зернистость временной шкалы $\mathbb{T}$ (см. [103] и библиографию там).

Из анализа условий (*а*) – (*в*) следует, что система, описываемая уравнением (1.2) на временной шкале, имеет желаемое свойство асимптотической устойчивости состояния $x = 0$ при более широких условиях на параметры системы, по сравнению с условиями, которые формулируются для систем (1.3), (1.4), соответственно.

Таким образом, в том случае, когда реальная физическая система описывается линейной системой уравнений (1.2), на основе условий (*в*) могут быть найдены такие области параметров, гарантирующие асимптотическую устойчивость состояния $x = 0$, которые не следуют из условий (*а*) либо (*б*).

В общем случае, задача об устойчивости нулевого решения уравнений возмущенного движения на временной шкале сводится к выяснению условий, при которых для этого типа уравнений имеет место непрерывная зависимость от начальных данных на неограниченном интервале времени.

1.4. Методы анализа устойчивости систем на временной шкале.

Общими методами анализа устойчивости нулевого решения уравнений этого типа являются:

(1) метод динамических интегральных неравенств [26, 45, 50, 58];

(2) прямой метод Ляпунова, основанный на скалярных, векторных либо матричнозначных функциях [26, 33, 34, 35, 36, 90];

(3) метод сравнения [26, 93];

(4) подходы, основанные на комбинировании методов (1)–(3) [23, 26].

Для некоторых специальных классов динамических уравнений применяются другие подходы, адаптированные из общей качественной теории обыкновенных либо разностных уравнений. Остановимся кратко на некоторых результатах, полученных на основе упомянутых подходов.

1.4.1. Применение динамических интегральных неравенств. Рассматривается квазилинейная система

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)), \quad f(t, 0) = 0, \tag{1.7}$$

где $A \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $n \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $F(t) = f(t, x(t))$ удовлетворяет условию $F \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T})$ для любой дифференцируемой функции x. В работе [50] на основе формулы вариации постоянных на временной шкале при условиях

$$\|f(t, x)\| \le a(t)\|x\|^m \quad \text{при} \quad t \ge t_0, \quad a \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T}) \tag{1.8}$$

для любого целого $m \in \mathbb{Z}$ и при выполнении оценки

$$\|e_A(t, s)\| \le \varphi(t)\psi(s) \quad \text{при} \quad t \ge s \ge t_0,$$

где $\varphi, \psi \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T})$, получены условия различных типов устойчивости состояния $x = 0$ системы динамических уравнений (1.7). При этом применяется неравенство Гронуолла (при $m = 1$) и аналог нелинейного неравенства Стахурской (при $m \ge 2$) на временной шкале.

Напомним, что множество $\mathcal{R}(\mathcal{R}^+)$ регрессивных (положительно регрессивных) функций вместе с выражением $(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)$ образует Абелеву группу. Для $p \in \mathcal{R}$ обратный элемент определяется формулой $(\ominus p)(t) = -p(t)/(1+ +\mu(t)p(t))$.

Перепишем систему уравнений (1.5) в виде

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)) + \mu(t)(g(t, x(t)) - f(t, x(t))) \tag{1.9}$$

и предположим, что нулевое решение системы (1.6) экспоненциально устойчиво.

Предположим, что в системе (1.9) вектор-функция $f(t, x) = A(t)x$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и $x \in S(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| < \rho\}$ и для системы

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x, \quad t \in \mathbb{T} \tag{1.10}$$

известна фундаментальная матрица $\Phi_A(t, \tau) = \Phi_A(t, s)\Phi_A(s, \tau)$ при всех $\tau \le s \le t$, $\tau, s, t \in \mathbb{T}$. Обозначим вектор-функцию $Q(t, x) = g(t, x) - A(t)x$ и будем предполагать, что $Q(t, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$.

Покажем, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Предположим, что в системе* (1.2) *вектор функция* $f(t, x) = = A(t)x$ *и выполняются следующие условия:*

(1) *нулевое решение системы* (1.6) *экспоненциально устойчиво с постоянными* q *и* K*;*

(2) *существует постоянная* $L > 0$ *такая, что вектор-функция* $Q(t, x)$ *удовлетворяет оценке* $\|Q(t, x)\| \le L\|x\|$ *при всех* $(t, x) \in \mathbb{T} \times S(\rho)$*;*

(3) *при заданной зернистости* $\mu(t) > 0$ *временной шкалы* $\mathbb{T}$ *неравенство* $q - - \mu(t)KL > 0$ *выполняется при всех* $t \in \mathbb{T}$.

Тогда состояние $x = 0$ *системы* (1.8) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. При выполнении условий (1), (2) теоремы 1.1 для любого решения $x(t)$ системы (1.8) верно представление

$$x(t) = \Phi_A(t, \tau)x(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} \Phi_A(t, \sigma(s))\mu(s)Q(s, x(s))\Delta s \tag{1.11}$$

при всех $t \geq \tau$. Из соотношения (1.11) получим оценку

$$
\begin{aligned}
\|x(t)\| \leq \|\Phi_A(t,\tau)x(\tau)\| + \int\limits_{\tau}^{t} \|\Phi_A(t,\sigma(s))\mu(s)Q(s,x(s))\|\Delta s \leq \\
\leq K\|x(\tau)\|e_{-q}(t,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} KLe_{-q}(t,\sigma(s))\mu(s)\|x(s)\|\Delta s \leq \\
\leq K\|x(\tau)\|e_{-q}(t,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\mu(s)KL}{1-q\mu(s)}e_{-q}(t,s)\|x(s)\|\Delta s.
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Так как $1/(e_{-q}(t,\tau)) > 0$ при всех $t \geq \tau$, то в силу того, что $-q \in \mathcal{R}^+$ оценку (1.12) продолжим так:

$$
\frac{\|x(t)\|}{e_{-q}(t,\tau)} \leq K\|x(\tau)\| + \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\mu(s)KL}{1-q\mu(s)} \frac{\|x(s)\|}{e_{-q}(s,\tau)}\Delta s. \tag{1.13}
$$

Применяя к оценке (1.13) неравенство Гронуолла на временной шкале, получим

$$
\frac{\|x(t)\|}{e_{-q}(t,\tau)} \leq K\|x(\tau)\|e_{\frac{\mu(t)KL}{1-q\mu(t)}}(t,\tau)
$$

или

$$
\begin{aligned}
ed\|x(t)\| \leq K\|x(\tau)\|e_{-q}(t,\tau)e_{\frac{\mu(t)KL}{1-q\mu(\cdot)}}(t,\tau) = K\|x(\tau)\|e_{-q\oplus\frac{\mu(t)KL}{1-q\mu(\cdot)}}(t,\tau) = \\
= K\|x(\tau)\|e_{-q+\mu(t)KL}(t,\tau)
\end{aligned}
$$

при всех $t \geq \tau$.

Согласно условия (3) теоремы 1.1 имеем $-(q-\mu(t)KL) \in \mathcal{R}^+$ и поэтому из оценки

$$
\|x(t)\| \leq K\|x(\tau)\|e_{-(q-\mu(t)KL)}(t,\tau)
$$

следует, что состояние $x = 0$ системы (1.2) экспоненциально устойчиво на $\mathbb{T}$.

Теорема доказана.

Замечание 1.1. Если условие (3) теоремы 1.1 выполняется при значениях $0 < < \mu(t) < \mu^*$, где $\mu^* = \mathrm{const} < +\infty$, тогда μ^* является предельным значением зернистости временной шкалы, при которой сохраняется свойство экспоненциальной устойчивости в системе (1.2), если оно имело место в линейном приближении системы (1.5).

Аналогично подходу, предложенному в работе [50], анализ устойчивости квазилинейной системы (1.7) проводится в работе [45].

При помощи этого неравенства получены условия различных типов устойчивости состояния $x = 0$ системы (1.7) при условиях (1.2) и (1.3) для любого $m > 1$. При этом в используемом интегральном неравенстве

$$
u(t) \leq a(t) + b(t)\int\limits_{t_0}^{t} h(s)u^m(s)\Delta s \quad \text{при всех} \quad t \geq t_0 \tag{1.14}
$$

ослаблены требования к функциям $a(t)$, $b(t)$ и $h(t)$. Оценка функции $u(t)$, удовлетворяющей неравенству (1.14) при ослабленных требованиях, приведена в лемме 1.1.

Лемма 1.1. *Предположим, что функции $a(t), b(t)$ — положительные rd-непрерывные на $\mathbb{T}$, функция $h(t)$ — неотрицательная rd-непрерывная на $\mathbb{T}$ и $m > 1$*

— действительное число. Если частное $a(t)/b(t)$ является неубывающим на $\mathbb{T}$, то для любой функции $u(t)$, удовлетворяющей неравенству (1.14), верна оценка

$$u(t) \le \frac{a(t)}{\left[1 + \int\limits_{t_0}^{t} \dfrac{a^{m-1}(\sigma(s)) - (a(\sigma(s)) + \mu(s)b(\sigma(s))a^m(s)h(s))^{m-1}}{\mu(s)(a(\sigma(s)) + \mu(s)b(\sigma(s))a^m(s)h(s))^{m-1}}\,\Delta s\right]^{\frac{1}{m-1}}} \tag{1.15}$$

на интервале $[t_0, \widetilde{t})$, где $\widetilde{t}$ является первой точкой из промежутка $[t_0, +\infty) \cap \mathbb{T}$, в которой основание степени в знаменателе в правой части неравенства (1.15) становится неположительным.

Пусть $h(t) = \psi(\sigma(t))\varphi^m(t)\alpha(t)$,

$$D(t, a, \rho) = \int\limits_a^t \frac{1}{\mu(s)}\left(1 - \frac{1}{(1 + \mu(s)h(s)\psi^{m-1}(a)\rho^{m-1})^{m-1}}\right)\Delta s.$$

Приведем достаточные условия устойчивости, равномерной устойчивости и асимптотической устойчивости состояния $x = 0$ системы динамических уравнений (1.1). При этом относительно системы (1.1) предполагается, что матричнозначная функция $A\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и вектор-функция $f\colon \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим условиям:

1) функции $A(t)$ и $f(t,x)$ являются rd-непрерывными и $A \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$;
2) функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по пространственной переменной в $\mathbb{R}^n$, т. е. существует $L > 0$ такое, что
$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\| \quad \text{при всех} \quad (t,x_1),(t,x_2) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n;$$
3) существуют функции $\alpha(t), \varphi(t), \psi(t) \in \mathbb{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$ и постоянная $m > 1$ такие, что:
a) $\|f(t,x)\| \le \alpha(t)\|x\|^m$; *b)* $\|e_A(t,t_0)\| \le \varphi(t)\psi(t_0)$
при всех $t \ge t_0$, принадлежащих $\mathbb{T}$, и $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2. *Если для системы уравнений (1.7) при всех $s \ge t_0$ существует $K(s)$ такое, что $\varphi(t) \le K(s)$ при всех $t \ge s \ge t_0$ и $\widetilde{D}(t_0,\rho) = \lim\limits_{t\to\infty} D(t,t_0,\rho) < \infty$ при всех $t_0 \in \mathbb{T}$ и $\rho > 0$, то решение $x = 0$ системы уравнений (1.7) устойчиво.*

Теорема 1.3. *Если для системы уравнений (1.7) существуют положительная постоянная K_1 и непрерывная неубывающая функция $K_2(\rho)$ такие, что $\varphi(t)\psi(s) \le K_1$ при всех $t \ge s \ge t_0$ и $\widetilde{D}(s,\rho) = \lim\limits_{t\to\infty} D(t,s,\rho) \le K_2(\rho)$ при всех $s \ge t_0$ и $\rho > 0$, то решение $x = 0$ системы уравнений (1.7) равномерно устойчиво.*

Теорема 1.4. *Если для системы уравнений (1.7) выполняются условия*

$$\widetilde{D}(s,\rho) = \lim_{t\to\infty} D(t,s,\rho) < \infty$$

при всех $s \ge t_0$ и $\rho > 0$, и $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$, то решение $x = 0$ системы уравнений (1.7) асимптотически устойчиво. При этом область притяжения решения $x = 0$ содержит шар $B(0, \rho_\lambda(t_0))$, где $\rho_\lambda(t_0)$ — наибольшее решение уравнения $\widetilde{D}(t_0,\rho) = \lambda$, $\lambda \in (0,1)$.

Доказательства приведенных теорем имеются в статье [45].

Основной проблемой применения этого подхода при исследовании квазилинейных систем динамических уравнений является эффективное построение фундаментальной матрицы для линейного приближения системы динамических уравнений. Эта проблема, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, является, в общем случае, открытой.

1.4.2. Обобщенный прямой метод Ляпунова. Применение прямого метода Ляпунова для качественного анализа решений динамических уравнений к настоящему времени развито в нескольких направлениях. Остановимся на некоторых из них, а именно:

(*а*) обобщение теорем прямого метода Ляпунова для динамических уравнений на основе матричнозначной функции [78 – 85, 87];

(*б*) применение матричнозначных функций для анализа устойчивости динамических уравнений с неточными значениями параметров [35, 93];

(*в*) анализ полидинамики нелинейной системы на временной шкале [21, 22, 88];

(*г*) построение функций Ляпунова для некоторых классов уравнений на временной шкале [26].

Вместе с системой уравнений (1.1) рассмотрим матричнозначную функцию

$$U(t,x) = [v_{ij}(t,x)] \quad (i,j = 1,2,\dots,m), \tag{1.16}$$

в которой $v_{ij}\colon \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ при $i = 1,2,\dots,m$ и $v_{ij}\colon \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ при $i \neq j$, $i,j = 1,2,\dots,m$. Предполагается, что элементы $v_{ij}(t,x)$ матричнозначной функции (1.16) удовлетворяют условиям:

(1) $v_{ij}(t,x)$ локально Липшицевы по x при всех $t \in \mathbb{T}$;

(2) $v_{ij}(t,x) = 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$, если только $x = 0$;

(3) $v_{ij}(t,x) = v_{ji}(t,x)$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и $i,j = 1,2,\dots,m$.

Построим скалярную функцию (cf. [62])

$$V(t,x,\theta) = \theta^T U(t,x)\theta \quad (\theta \in \mathbb{R}^m_+) \tag{1.17}$$

и введем ее полную Δ-производную в силу системы (1.1)

$$V^\Delta(t,x,\theta) = \theta^{\mathrm{T}} U^\Delta(t,x)\theta \quad (\theta \in \mathbb{R}^m_+, \quad t \in \mathbb{T}). \tag{1.18}$$

Здесь $U^\Delta(t,x)$ вычисляется согласно формуле (см. [26] и библиографию там)

$$U^\Delta(t,x) = U^\Delta(t,x(t)) = U^\Delta_t(t,x(\sigma(t))) + f(t,x)\int\limits_0^1 U^{'}_x(t,x(t) + h\mu(t)f(t,x))\,dh,$$

где U^Δ_t — Δ-производная матричнозначной функции по t и $U^{'}_x$ — обычная частная производная функции (1.16) по x.

Заметим, что матричнозначная вспомогательная функция (1.16) позволяет развить как скалярный, так и векторный варианты прямого метода Ляпунова для динамических уравнений.

Далее о системе (1.1) сделаем следующие предположения.

H_1. Вектор функция $F(t) = f(t,x(t))$ удовлетворяет условию $F \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T})$, как только x является Δ-дифференцируемой функцией со значениями в N, $N \subset \mathbb{R}^n$ — открытая связная окрестность состояния $x = 0$.

H_2. Вектор-функция $f(t,x)$ является покомпонентно регрессивной, т. е. $e^{\mathrm{T}} + \;+ \mu(t)f(t,x) \neq 0$ при всех $t \in [t_0,\infty)$, где $e^{\mathrm{T}} = (1,1,\dots,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$.

H_3. На множестве $S \subset \mathbb{T}\times N$ вектор-функция $f(t,x)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица.

H_4. При всех $t \in [t_0,\infty)$ вектор-функция $f(t,x) = 0$, если только $x = 0$.

При выполнении этих условий решение начальной задачи для системы (1.1) существует на максимальном интервале времени и состояние $x = 0$ является единственным.

В терминах существования функции (1.16) и ее полной Δ-производной (1.18) в работах [26, 33, 34, 90] доказаны основные теоремы прямого метода Ляпунова для динамических уравнений (1.1). Приведем одну из этих теорем.

Теорема 1.5. *Предположим, что вектор-функция f в системе* (1.1) *удовлетворяет условиям H_1–H_4 на $\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n$ и функция* (1.17) *локально Липшицева по x при всех $t \in \mathbb{T}$. Если существуют:*

(1) *функции сравнения ψ_{i1}, ψ_{i2}, $\psi_{i3} \in \mathcal{K}$-классу, $i = 1, 2, \ldots, m$, функции $\widetilde{\psi}_{i2}(t, u)$ rd-непрерывные по t и возрастающие по u, $\widetilde{\psi}_{i2}(t, 0) = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и симметрические $(m \times m)$-матрицы $A_1(\theta)$, $\widetilde{A}_2(\theta)$ такие, что*

   (а) $\psi_1^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_1(\theta)\psi_1(\|x\|) \le V(t, x, \theta) \le \widetilde{\psi}_2^{\mathrm{T}}(t, \|x\|)\widetilde{A}_2(\theta)\widetilde{\psi}_2(t, \|x\|)$ *при всех* $(t, x, \theta) \in \mathbb{T} \times N \times \mathbb{R}_+^m$;

   (б) $\psi_1^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_1(\theta)\psi_1(\|x\|) \le V(t, x, \theta) \le \psi_2^{\mathrm{T}}(\|x\|)\widetilde{A}_2(\theta)\psi_2(\|x\|)$ *при всех* $(t, x, \theta) \in \mathbb{T} \times N \times \mathbb{R}_+^m$;

(2) *постоянная симметрическая $(m \times m)$-матрица A_3 такая, что*

$$V^{\Delta}(t, x, \theta)|_{(1.1)} \le \psi_3^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_3(\theta)\psi_3(\|x\|)$$

   при всех $(t, x, \theta) \in \mathbb{T} \times N \times \mathbb{R}_+^m$,

тогда, если матрицы $A_1(\theta)$ и $\widetilde{A}_2(\theta)$ положительно определенные и матрица $A_3(\theta)$ полуопределенно отрицательная, тогда

(а) *состояние $x = 0$ системы* (1.1) *устойчиво при условии (1)(а);*

(б) *состояние $x = 0$ системы* (1.1) *равномерно устойчиво при условии (1)(б).*

Замечание 1.2. Следствиями теоремы 1.5 являются теорема 2.5.1 из монографии [81] при $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ и теорема 3.3.3 из монографии [83] при $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Если параметры системы уравнений (1.1) известны неточно, тогда уравнения возмущенного движения (1.1) принимают вид [35, 93]

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x, \alpha), \tag{1.19}$$

где $\alpha \in \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^d$ — компактное подмножество пространства параметров $\mathbb{R}^d$. Теоремы прямого метода Ляпунова для динамических уравнений (1.19) сформулированы и доказаны в монографии [35]. Приведем достаточные условия неустойчивости состояния $x = 0$ системы (1.19).

Теорема 1.6. *Предположим, что вектор-функция $f(t, x, \alpha)$ в системе* (1.19) *удовлетворяет предположениям H_1–H_4 на $\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathcal{G}$. Пусть:*

(1) *существуют матричнозначная функция $U\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \times m}$ и вектор $\theta \in \mathbb{R}_+^m$ такие, что функция (1.17) локально липшицева по x при всех $t \in \mathbb{T}$;*

(2) *существуют вектор-функция сравнения $\psi_1 \in \mathcal{K}$-классу и симметрическая $(m \times m)$-матрица A_1 такая, что при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{N}$ верна оценка $\psi_1^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_1\psi_1(\|x\|) \le V(t, x, \theta)$ и минимальное собственное значение $\lambda_m(A_1) >$ > 0;*

(3) *существует $(m \times m)$-матрица $C = C(t, \alpha)$ такая, что*

$$V^{\Delta}(t, x, \theta)|_{1.23} \ge \psi_1^{\mathrm{T}}(\|x\|)C(t, \alpha)\psi_1(\|x\|) + \omega(t, \psi_1(\|x\|))$$

   при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{\psi_1 \to 0} \frac{\omega(t, \psi_1)}{\psi_1} = 0$ равномерно по $t \in \mathbb{T}$;

(4) *существует постоянная $(m \times m)$-матрица C^* такая, что*

$$\frac{1}{2}\left[C^{\mathrm{T}}(t, \alpha) + C(t, \alpha)\right] \ge C^*$$

   и хотя бы при одном значении $\alpha \in \mathcal{G}$ выполняется условие $\lambda_m(C^*) > 0$ и $\lambda_m(C^*)\lambda_m^{-1}(A_1) \in \mathcal{R}$.

Тогда состояние $x = 0$ неточной системы (1.19) *неустойчиво.*

Доказательство этой теоремы имеется в монографии [35].

1.4.4. Общая задача полидинамики (см. [21, 22, 88] и библиографию там). Проблема полидинамики возникает тогда, когда рассматриваются динамические уравнения возмущенного движения с дельта и набла-производными одновременно.

Такие уравнения получаются следующим способом. В дополнение к множествам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ на временной шкале $\mathbb{T}$ будем рассматривать множества

$$\mathcal{B} = \{t \in \mathbb{T}\colon\ \rho(t) < t \quad \text{и} \quad t = \sigma(t)\};$$
$$\mathcal{D} = \{t \in \mathbb{T}\colon\ \rho(t) = t \quad \text{и} \quad t = \sigma(t)\}.$$

Если $\mathbb{T}$ имеет рассеянный справа минимум a, тогда $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}\backslash\{a\}$ и в остальных случаях $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$. При этом ∇-производная вектора состояния $x(t)$ определяется формулой

$$x^{\nabla}(t) = \begin{cases} \dfrac{x(t) - x(\rho(t))}{\nu(t)}, & t \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}; \\ \dot{x}(t) \qquad - & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

где $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}\colon\ s < t\}$ и зернистость $\nu(t) = t - \rho(t)$.

Предположим, что ∇-динамика нелинейной системы на временной шкале $\mathbb{T}$ описывается динамическими уравнениями

$$x^{\nabla}(t) = g(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.20}$$

где $g\colon\ \mathbb{T}_k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы (1.20) в момент времени $t \in \mathbb{T}$.

Полидинамика гибридной системы на временной шкале $\mathbb{T}$ описывается динамическим уравнением (cf. [109])

$$x^{\diamond_\alpha}(t) = F(t, x(t), \alpha), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.21}$$

где $x^{\diamond_\alpha}(t)$ — α-ромбическая производная вектора $x(t)$, определяемая формулой $x^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha x^{\Delta}(t) + (1-\alpha)x^{\nabla}(t)$, $\alpha \in [0,1]$, и $F(t, x(t), \alpha) = \alpha f(t,x) + (1-\alpha) g(t,x)$ при всех $t \in \mathbb{T}^k \cap \mathbb{T}_k$.

Предположим, что для функции (1.17) существуют Δ- и ∇-производные вдоль решений систем (1.1) и (1.20):

$$V^{\Delta}(t,x,\theta) = \theta^{\mathrm{T}} U^{\Delta}(t, x(t))\theta \ \text{ при } \ t \in \mathbb{T}^k \ \text{ и } \ V^{\nabla}(t,x,\theta) = \theta^{\mathrm{T}} U^{\nabla}(t, x(t))\theta \ \text{ при } \ t \in \mathbb{T}_k.$$

Функция

$$V^{\diamond_\alpha}(t,x,\theta) = \alpha V^{\Delta}(t,x,\theta) + (1-\alpha) V^{\nabla}(t,x,\theta)$$

называется α-ромбической производной функции Ляпунова (1.17) на временной шкале, если и только если функция (1.17) определенно положительная и убывающая на $\mathbb{T}$ и $V^{\diamond_\alpha}(t,x,\theta) \leq 0$ на множестве $B \subseteq \mathbb{R}^n$ при всех $t \in \mathbb{T}^k \cap \mathbb{T}_k$.

Условия устойчивости и неустойчивости нулевого решения системы (1.21) приведены в работах [21, 22, 26, 88]. Эти условия являются обобщением условий из теорем прямого метода Ляпунова для системы динамических уравнений (1.1).

Среди открытых проблем полидинамики гибридных систем на временной шкале отметим следующие:

– построение последовательных приближений для решения динамических уравнений (1.21) и исследование их сходимости;

– получение условий существования решений системы (1.21) и их единственность;

– получение условий продолжимости решений системы (1.21) и анализ их зависимости от зернистости временной шкалы;

– получение критериев колеблемости решений системы (1.21) их ограниченности и диссипативности;

– разработка способов оценки влияния возмущений в системе (1.21);

– установление условий распада регулярных решений динамического уравнения (1.21) и условий возникновения хаотического поведения траекторий.

1.4.5. Построение функции Ляпунова. В общем случае проблема построения функций Ляпунова для уравнений на временной шкале, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, остается открытой.

Решение этой проблемы упрощается, если для системы динамических уравнений (1.10) известна фундаментальная матрица $\Phi(t,t_0)$.

В случае $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ этот подход был реализован в монографии [16] для линейной неавтономной системы, включая случай периодической матрицы.

Рассмотрим систему динамических уравнений (1.10) и квадратичную форму с матрицей B. Функцию $V(t,x)=x^{\mathrm{T}}Bx$, $x\in\mathbb{R}^n$, будем искать, исходя из квазистационарного уравнения Ляпунова

$$A^{\mathrm{T}}(t)B+BA(t)+\mu(t)A^{\mathrm{T}}(t)BA(t)=-M(t), \tag{1.22}$$

где $M(t)$ — $n\times n$-определенно положительная симметрическая матрица при всех $t\in\mathbb{T}$. Уравнение (1.22) получается при вычислении $V^{\Delta}(t,x(t))$ в силу системы (3.3).

В работе [68] показано, что если $0\le\mu(t)\le\mu_{\max}$ при всех $t\in\mathbb{T}$, тогда существует область

$$\mathcal{H}_{\min}=\left\{z\in\mathbb{C}_{\mu_{\max}}:\ \left|z+\frac{1}{\mu_{\max}}\right|<\frac{1}{\mu_{\max}}\right\}$$

такая, что $\mathcal{H}_{\min}\subset\mathbb{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$.

Имеет место следующее утверждение (cf. [58]).

Теорема 1.7. *Пусть для квазистационарного уравнения* (1.22) *выполняются условия:*

(1) *зернистость временной шкалы $\mathbb{T}$ ограничена и определена шкала*

$$\mathbb{S}_t=\begin{cases}\mu(t)\mathbb{N}_0 & \textit{при}\ \ \mu(t)\neq 0,\\ \mathbb{R}_+ & \textit{при}\ \ \mu(t)=0;\end{cases}$$

(2) *известна переходная матрица решений $\Phi(t,t_0)$;*

(3) $\lambda\in\mathcal{H}_{\min}$ *при всех* $\lambda\in\operatorname{spec}A$ *и при всех* $t\ge t_0$, $t_0\in\mathbb{T}$.

Тогда решением уравнения (1.22) *является $n\times n$-матрица*

$$B(t)=\int_{\mathbb{S}_t}\Phi_A^{\mathrm{T}}(s,0)M(t)\Phi_A(s,0)\Delta s.$$

При этом матрица $B(t)$ будет определенно положительной при всех $t\in\mathbb{T}$, если матрица $M(t)$ — симметрическая определенно положительная при всех $t\in\mathbb{T}$.

Далее рассмотрим квадратичную форму $V(t,x)=x^{\mathrm{T}}B(t)x$, $x\in\mathbb{R}^n$, где $B(t)$ — нестационарная $n\times n$-матрица при всех $t\in\mathbb{T}$. В этом случае из выражения для $V^{\Delta}(t,x(t))$ в силу системы (1.10) получим динамическое уравнение Ляпунова в виде

$$\begin{aligned}A^{\mathrm{T}}(t)B(t)+B(t)A(t)+\mu(t)A^{\mathrm{T}}(t)B(t)A(t)&+\\ +(I+\mu(t)A^{\mathrm{T}}(t))B^{\Delta}(t)(I+\mu(t)A(t))&=-W(t),\end{aligned} \tag{1.23}$$

где $W(t)$ — $n\times n$-симметрическая положительно определенная матрица при всех $t\in\mathbb{T}$.

Имеет место следующее утверждение (cf. [58]).

Теорема 1.8. *Пусть для динамического уравнения* (1.23) *выполняются условия:*

(1) *нулевое решение $x=0$ экспоненциально устойчиво на $\mathbb{T}$;*

(2) *известна фундаментальная матрица $\Phi(t,t_0)$ системы (1.10).*

Тогда $n \times n$-матрица

$$B(t) = (\Phi^{\mathrm{T}}(t,t_0))^{-1} B(t_0)(\Phi(t,t_0))^{-1} - \\ - (\Phi^{\mathrm{T}}(t,t_0))^{-1}\left[\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{\mathrm{T}}(s,t_0)W(s)\Phi(s,t_0)\Delta s\right](\Phi(t,t_0))^{-1} \tag{1.24}$$

является решением уравнения (1.23) *при* $B(t_0) = B_0$ — $n \times n$*-постоянной матрице. При этом матрица* $B(t)$ *будет определенно положительной при всех* $t \in \mathbb{T}$*, если матрица* $W(t)$ — *симметрическая и положительно определенная при всех* $t \in \mathbb{T}$*.*

Если начальное значение $B(t_0)$ *выбрать в виде*

$$B(t_0) = \int\limits_{t_0}^{\infty} \Phi^{\mathrm{T}}(s,t_0)W(s)\Phi(s,t_0)\Delta s,$$

тогда решение (1.24) *уравнения* (1.23) *принимает вид*

$$B(t) = \int\limits_{t}^{\infty} \Phi^{\mathrm{T}}(s,t)W(s)\Phi(s,t)\Delta s.$$

При исследовании крупномасштабных систем динамических уравнений естественным является применение матричнозначных функций. Получающиеся при этом результаты охватывают результаты, которые получаются при помощи как скалярных, так и векторных функций Ляпунова для динамических уравнений.

1.4.6. Метод сравнения на временной шкале [26]**.** Далее для динамических уравнений (1.1) будем рассматривать функцию (1.17) и ее Δ-производную (1.18). В этом случае имеет смысл формулировать принцип сравнения со скалярной функцией Ляпунова, построенной на основе матричнозначной функции (1.16). Известно, что этот принцип основан на соответствующих дифференциальных и/или интегральных динамических неравенствах и позволяет делать заключение о качественном поведении решений исследуемой системы уравнений (1.1) на основе анализа решений скалярного динамического уравнения сравнения. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.9 *Предположим, что для системы* (1.1) *выполняются условия:*

(1) *существует функция* (1.17) *локально Липшицева по* x *при всех* $t \in \mathbb{T}$, $V \in C_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+, \mathbb{R}_+)$*;*

(2) *для* Δ*-производной* (1.18) *существует мажоранта* $G(t, V(t,x,\theta))$, $G(t,0) = 0$ *такая, что* $G(t,V_1) \le G(t,V_2)$ *при всех* $t \in \mathbb{T}$*, если только* $V_1 \le V_2$ *и, кроме того,* $V^{\Delta}(t,x,\theta) \le G(t,V(t,x,\theta))$ *при всех* $t \in \mathbb{T}^k \setminus \{t_0\}$*, где* $t_0 \in \mathbb{T}$*;*

(3) *существует максимальное решение* $R(t)$ *динамического неравенства*

$$w^{\Delta} \ge G(t,w(t)), \quad w(t_0) = w_0 \ge 0, \quad \textit{при всех} \quad t \ge t_0.$$

Тогда выполняется оценка $V(t,x(t),\theta) < R(t)$ *при всех* $t \ge t_0$*, как только* $V(t_0,x_0,\theta) < w(t_0)$.

Доказательство этой теоремы основано на принципе индукции на временной шкале (см. [51] и библиографию там).

Следствие 1.1. Пусть в теореме 1.9 функция $G(t,V(t,x,\theta)) = g(V(t,x,\theta))$, $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является неубывающей и $V(t) = V(t,x(t),\theta)$, $V\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ такая, что $G \circ V$ — rd-непрерывная функция. Пусть функция $p \ge 0$ является rd-непрерывной и функция $m\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ — Δ-дифференцируемая. Тогда из неравенства

$$V(t,x,\theta) \le m(t) + \int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)G(V(\tau,x(\tau),\theta))\Delta\tau \tag{1.25}$$

следует оценка $V(t,x,\theta) < w(t)$, где $w(t)$ — максимальное решение начальной задачи

$$w^{\Delta} = m^{\Delta} + p(t)G(w(t)), \quad w(t_0) = w_0 > m(t_0).$$

Следствие 1.2. Пусть в условиях следствия 1.1 вместо неравенства (1.25) выполняется интегральное неравенство

$$V(t,x,\theta) \le \alpha + \int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)G(V(\tau,x(\tau),\theta))\Delta\tau,$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда оценка $V(t,x(t),\theta) < R(t)$ верна при всех $t \ge t_0$, где $w(t)$ является максимальным решением динамического уравнения сравнения

$$w^{\Delta} = p(t)G(w(t)), \quad w(t_0) = w_0 > \alpha.$$

Принцип сравнения (теорема 1.9) позволяет установить общую схему получения достаточных условий устойчивости нулевого решения системы динамических уравнений (1.1) в следующем виде.

Теорема 1.10. *Предположим, что для уравнений* (1.1)*:*

(1) *существует функция* $V \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+, \mathbb{R}_+)$*,* $V(t,x,\theta)$ *— локально липшицева по* x *при всех* $t \in \mathbb{T}$*;*

(2) *существуют* $m\times m$*-постоянные матрицы* A_1*,* A_2 *и векторные функции класса Хана* $(a,b) \in \mathcal{K}$*-классу покомпонентно такие, что при всех* $(t,x) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n$

$$b^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_1 b(\|x\|) \le V(t,x,\theta) \le a^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_2 a(\|x\|);$$

(3) *для* Δ*-производной* (1.18) *существует мажоранта* $G(t,V(t,x,\theta))$ *такая, что* $G(t,V_1) \le G(t,V_2)$ *как только* $V_1 \le V_2$ *при всех* $t \in \mathbb{T}$ *и* $V^{\Delta}(t,x,\theta) \le$ $\le G(t,V(t,x,\theta))$ *при всех* $(t,x) \in \mathbb{T}^k \setminus \{t_0\}\times\mathbb{R}^n$*.*

Тогда нулевое решение уравнений (1.1) *обладает тем же типом устойчивости, что и динамическое уравнение сравнения*

$$w^{\Delta}(t) = G(t,w(t)), \quad w(t_0) = w_0 \ge 0.$$

Доказательство этого утверждения проводится применительно к типу рассматриваемой устойчивости по схеме, принятой в теории устойчивости движения (см. [1, 2, 9, 18, 24, 37–39, 77, 87, 89] и библиографию там).

Пусть задана регрессивная линейная система динамических уравнений

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathbb{T}. \tag{1.26}$$

Для функции $V(x) = x^{\mathrm{T}}x$ имеем

$$V^{\Delta}(x(t)) = (x^{\Delta})^{\mathrm{T}}x(\sigma(t)) + x^{\mathrm{T}}x^{\Delta}(t) = x^{\mathrm{T}}(t)\big[A^{\mathrm{T}}(t) + A(t) + \mu(t)A^{\mathrm{T}}(t)A(t)\big]x(t). \tag{1.27}$$

Обозначим $(A^{\mathrm{T}}\oplus A)(t) = A^{\mathrm{T}}(t) + A(t) + \mu(t)A^{\mathrm{T}}(t)A(t)$ и предположим, что $A \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ и $(A^{\mathrm{T}}\oplus A)(t) \le 2cI < 0$ для некоторого $c \in \mathcal{R}^+$ при всех $t \in \mathbb{T}$, I — единичная матрица. Из соотношения (1.27) следует

$$V^{\Delta}(x(t)) \le G(t,V(x(t))), \tag{1.28}$$

где $G(t,V(x(t))) = (2c + \mu(t)c^2)V(x(t))$. Обозначим $m(t) = V(x(t))$ и рассмотрим динамическое уравнение сравнения

$$m^{\Delta}(t) = (2c + \mu(t)c^2)m(x(t)). \tag{1.29}$$

Согласно условиям теоремы 1.9 из определенного типа устойчивости нулевого решения уравнения сравнения (1.29) следует соответствующий тип устойчивости в целом нулевого решения системы (1.1).

Если для анализа системы (1.1) применяется функция $V(t,x) = x^{\mathrm{T}}H(t)x$ с матрицей $H \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}^k, \mathbb{R}^{n\times n})$, удовлетворяющей оценке

$$\alpha\|x(t)\|^2 \le x^{\mathrm{T}}H(t)x \le \beta\|x(t)\|^2, \quad t \in \mathbb{T}^k,$$

где $\alpha, \beta > 0$ — const, то динамическое уравнение сравнения имеет вид

$$m^{\Delta}(t) = \lambda_M(t)m(t), \quad m(t_0) = m_0 \ge 0, \tag{1.30}$$

где $\lambda_M(t)$ — максимальное собственное значение матрицы $(I + \mu(t)A^{\mathrm{T}}(t))H^{\Delta}(t)(I + \mu(t)A(t)) + A^{\mathrm{T}}(t)H(t) + H(t)A(t) + \mu(t)A^{\mathrm{T}}(t)H(t)A(t)$.

Пусть $\lambda_M \in \mathcal{R}$ и обозначим

$$\theta_\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{\log|1+\mu(t)\lambda_M(t)|}{\mu(t)}, & \text{если} \quad \mu(t) > 0, \\ \lambda_M(t), & \text{если} \quad \mu(t) = 0 \end{cases}$$

при всех $t \in [t_0, \infty) \cap \mathbb{T}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.11. *Нулевое решение* $m(t) = 0$ *уравнения сравнения* (1.29)*:*

(1) *экспоненциально устойчиво в целом, если* $\lim\limits_{t\to\infty}\sup \theta_\lambda(t) = q < 0$*;*

(2) *равномерно экспоненциально устойчиво в целом, если* $\theta_\lambda(t) \le q^* < 0$ *при всех* $t \in [t_0, \infty) \cap \mathbb{T}$*;*

(3) *неустойчиво, если* $\lim\limits_{t\to\infty}\inf \theta_\lambda(t) = \widetilde{q} > 0$.

При выполнении оценки (1.28) для функции $V(t,x)$ и условий теоремы 1.11 нулевое решение $x = 0$ системы (1.1) обладает тем же типом устойчивости (неустойчивости), что и нулевое решение динамического уравнения (1.30).

Это утверждение следует из условий теорем 1.10, 1.11 и некоторых результатов статьи [23].

1.4.7. Комбинированный подход. Покажем на примере анализа экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.1) применение прямого метода Ляпунова и метода вариации произвольных постоянных на временной шкале.

Рассмотрим скалярное уравнение

$$m^{\Delta}(t) = \lambda(t)m(t) + \Phi(t, m(t)), \tag{1.31}$$

решение $m(t) = m(t; t_1, m_1)$ которого предполагается единственным для начальной задачи (1.31)–(1.32)

$$m(t_1; t_1, m_1) = m_1. \tag{1.32}$$

Это уравнение получается при оценке полной производной вспомогательной функции в силу системы уравнений на временной шкале (1.1).

Пусть $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathcal{R}$ и при всех $t \in [t_0, \infty)$ определена функция

$$\theta^*_\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{\log|1+\mu(t)\alpha\lambda(t)|}{\mu(t)}, & \text{если} \quad \mu(t) > 0; \\ \alpha\lambda(t), & \text{если} \quad \mu(t) = 0. \end{cases}$$

Имеет место следующее утверждение (cf. [64]).

Теорема 1.12. *Предположим, что для уравнений* (1.1) *выполняются условия* H_1*–*H_4*. Если существуют:*

(1) *функция* $V(t,x,\theta)$*,* $V \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+, \mathbb{R}_+)$*,* V *— локально липшицева по* x *при всех* $t \in \mathbb{T}$*;*

(2) *функции сравнения* $\psi_{i1}, \psi_{i2} \in \mathcal{K}$*-классу Хана и имеющие один и тот же порядок роста,* $(m \times m)$*-постоянные матрицы* A_i, $i = 1, 2$, *и постоянная* $r > 1$ *такие, что*

  (а) $u^{\mathrm{T}} A_1 u \le V(t, x, \theta)$ *при всех* $(t, x) \in \mathbb{T} \times S$, *где* $u = (\|x\|^{r/2}, \dots, \|x\|^{r/2})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m_+$;

  (б) $V(t, x, \theta) \le \psi_1^{\mathrm{T}}(\|x\|) A_2 \psi_1(\|x\|)$;

(3) *симметрическая* $m \times m$*-матрица* $A_3(t)$ *и функция* $\Phi(t, V(t, x, \theta))$ *такие, что*

  (а) $V^{\Delta}(t, x, \theta) \le \psi_2^{\mathrm{T}}(\|x\|) A_3 \psi_2(\|x\|) + \Phi(t, V(t, x, \theta))$;

  (б) $\lim\limits_{V(t,x,\theta) \to 0} \frac{\Phi(t, V(t,x,\theta))}{V(t,x,\theta)} = 0$ *равномерно по* $t \in \mathbb{T}$ *при всех* $(t, x) \in \mathbb{T} \times S$;

(4) *постоянные* $\alpha > 0$ *и* $M > 0$ *такие, что при заданной зернистости* $\mu(t)$ *временной шкалы* $\mathbb{T}$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{1 + \mu(t)\alpha\lambda_M(t)} \le M \quad \text{при всех} \quad t \in [t_0, \infty),$$

где $\lambda_M(t) = \lambda_M(A_3(t))$ — *максимальное собственное значение матрицы* $A_3(t)$.

Тогда, если матрицы A_1 *и* A_2 *положительно определенные и если* $\alpha\lambda_M(t) \in \mathcal{R}$ *и* $\lim\limits_{t\to\infty} \sup \theta_{\alpha\lambda_M}(t) = q < 0$, *то состояние* $x = 0$ *системы* (2.1) *экспоненциально устойчиво на* $t \in [t_0, \infty)$, *и, если* $\sup\{\theta_{\alpha\lambda_M}(t) : t \in [t_0, \infty)\} = \overline{q} < 0$, *то равномерно экспоненциально устойчиво при всех* $t \in [t_0, \infty) \cap \mathbb{T}$.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [26]. Оно основано на комбинировании прямого метода Ляпунова и метода вариации постоянных на временной шкале. Один из вариантов этой теоремы, использующий обычную скалярную функцию Ляпунова, приведен в статье [36].

Математическое моделирование процессов и явлений реального мира при помощи динамических уравнений является новым направлением исследований в общей теории гибридных систем. Представленные результаты иллюстрируют потенциальные возможности динамических DE-моделей гибридных систем [4, 5, 26, 46].

§2. IE-модель гибридных систем с последействием.

Гибридные динамические системы, как системы, состоящие из двух и более разнородных подсистем, связанных между собой, являются широко распространенными моделями реальных процессов и явлений (см. [66, 100] и библиографию там). Первоначально к разряду гибридных систем были отнесены системы, динамика которых описывалась системами обыкновенных дифференциальных уравнений на $\mathbb{R}_+$ и системами разностных уравнений на $\mathbb{Z}$. Примерами таких систем являются системы импульсных уравнений (см. [30, 32, 42, 48, 94, 95, 105] и др.), системы с переключениями (см. [8, 49, 54, 99, 102]), системы с переменной структурой (см. [30]) и другие.

Этот класс систем, состоящих из непрерывной и дискретной компонент, является широким классом гибридных систем со многими приложениями (см. [3, 42, 47, 60, 66] и библиографию там). Как и в случае системы без последействия, импульсное возмущение может стабилизировать движение системы с последействием даже в том случае, когда обе компоненты гибридной системы имеют неустойчивое решение.

В этом разделе излагается один подход к решению проблемы устойчивости движения систем с последействием при импульсном возмущении на основе нового класса матричнозначных функций Ляпунова [25].

2.1. Постановка задачи.

Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения [31]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x_t, \alpha), \quad t \ne \tau_k, \\ \Delta x &= I_k(t, x(t^-)), \quad t = \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}_+, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $x_t \in PC([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$, $f\colon \mathbb{R}_+ \times PC \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$; $PC = PC([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$ — пространство кусочно-непрерывных справа функций $\varphi\colon [-\tau,0] \to \mathbb{R}^n$; $I_k\colon \mathbb{R}_+ \times \times S(H) \to \mathbb{R}^n$, $S(H) = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| < H\}$; $\Delta x = x(t) - x(t^-)$; $t_0 < \tau_k < \tau_{k+1}$, $\tau_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $k \in \mathbb{N}_+$; $\alpha \in \mathcal{G}$ — параметр неточности системы (2.1), $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$; $\mathbb{N}_+$ — множество всех положительных чисел.

Пусть $|\varphi| = \sup\limits_{-\tau \leq s \leq 0} \|\varphi(s)\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора в $\mathbb{R}^n$ и $x_t(s) = = x(t+s)$ при $-\tau \leq s \leq 0$; dx/dt обозначает правую производную вектора состояния системы $x(t)$.

Пусть $\sigma \geq t_0$ и

$$x(\sigma) = \varphi(s) \in PC([-\tau,0),\mathbb{R}^n), \quad \sigma \geq t_0. \tag{2.2}$$

Движение системы (2.1) корректно определено при начальном состоянии (2.2), если вектор-функция $x(t)\colon [\sigma-\tau,\beta) \to \mathbb{R}^n$ для некоторого значения β $(0 < \beta \leq +\infty)$ непрерывна при $t \in [\sigma-\tau,\beta) \setminus \{\tau_k, \quad k = 1,2,\dots\}$, ее значения $x(\tau_k^+)$, $x(\tau_k^-)$ существуют, выполняется соотношение $x(\tau_k^+) = x(\tau_k)$ для любого $\tau_k \in [\sigma-\tau,\beta)$ и $x(t)$ удовлетворяет системе уравнений (2.1) при любом $\alpha \in \mathcal{G}$.

Предположим, что порядок системы (2.1) при любом $\alpha \in \mathcal{G}$ остается неизменным, и состояние равновесия $x = 0$ для системы (2.1) является единственным, т.е. $f(t,0,\alpha) = I_k(t,0) = 0$, $k = 1,2,\dots$, при всех $t \geq t_0$ и любых $\alpha \in \mathcal{G}$.

Условия, при которых для заданных начальных функций (2.2) существует единственное решение $x(t,\alpha) = x(t,\sigma,\varphi,\alpha)$ имеют вид (cf. [107]):

H_1. Вектор-функция f непрерывна на $[\tau_{k-1},\tau_k] \times PC \times \mathcal{G}$ при любом $k \in \mathbb{N}_+$ и $\varphi \in PC(\rho^*) = \{\varphi \in PC\colon |\varphi| < \rho^*, \rho^* > 0\}$ и $\lim\limits_{(t,\varphi)\to(\tau_k^-,\varphi)} f(t,\varphi,\alpha) = f(\tau_k^-,\varphi,\alpha)$ существует при любом $\alpha \in \mathcal{G}$.

H_2. Вектор-функция f является локально липшицевой по φ для любого компактного множества в $PC(\rho^*)$ при любом значении $\alpha \in \mathcal{G}$.

H_3. Для любого $k \in \mathbb{N}_+$ $I_k(t,x) \in C(\mathbb{R}_+ \times S(H),\mathbb{R}^n)$.

H_4. Существует величина $H_1 > 0$ $(H_1 \leq H)$ такая, что при $x \in S(H_1)$ вектор $x + I_k(\tau_k,x) \in S(H)$ при всех $k \in \mathbb{N}_+$.

Далее решение $x(t,\sigma,\varphi,\alpha)$ будем обозначать $x(t,\alpha)$ для краткости написания.

Определение 2.1. Состояние равновесия $x = 0$ системы (2.1):

(*а*) устойчиво, если для любых $\sigma \geq t_0$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon,\sigma) > 0$ такое, что при $\varphi \in PC(\delta)$ при всех $t \geq \sigma$ имеет место оценка $\|x(t,\alpha)\| \leq \varepsilon$ при любых $\alpha \in \mathcal{G}$;

(*б*) равномерно устойчиво, если величина δ в определении (*а*) не зависит от σ;

(*в*) асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и существует $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$ такое, что при $\varphi \in PC(\delta_0)$ верно соотношение $\lim \|x(t,\alpha)\| = 0$ при $t \to \infty$.

2.2. Матричнозначная функция на произведении пространств.

Для гибридной системы (2.1) будем рассматривать матричнозначную функцию

$$U(t,*) = [v_{ij}(t,*)], \quad i,j = 1,2, \tag{2.3}$$

на произведении пространств $\mathbb{R}^n$ и $PC(H)$. Предположим, что элементы $v_{ij}(t,*)$ удовлетворяют таким условиям.

B_1. Функционал $v_{11}(t,\varphi)\colon \mathbb{R}_+ \times PC(H) \to \mathbb{R}_+$ определен при всех $t \geq t_0$ и, кроме того:

(*а*) $v_{11}(t,x)$ — непрерывен на $[\tau_{k-1},\tau_k) \times PC(H)$ при $\varphi \in PC(H)$, $k \in \mathbb{N}_+$, и существует предел

$$\lim_{(t,y)\to(\tau_k^-,\varphi)} v_{11}(t,y) = v_{11}(\tau_k^-,\varphi);$$

(*б*) функционал $v_{11}(t,\varphi)$ — локально липшицев по φ на любом компактом множестве в $PC(H)$ и $v_{11}(t,0) = 0$ при всех $t \geq t_0$.

B_2. Функция $v_{22}(t,x)\colon \mathbb{R}_+ \times S(H^*) \to \mathbb{R}_+$ определена при всех $t \geq t_0$ и, кроме того,

(a) функция $v_{22}(t,x)$ непрерывна на $[\tau_{k-1},\tau_k) \times S(H^*)$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ и при всех $x \in S(H^*)$ и $k \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\lim_{(t,u)\to(\tau_k^-,\psi)} v_{22}(t,u) = v_{22}(\tau_k^-,\psi);$$

($б$) функция $v_{22}(t,x)$ локально липшицева по $x \in S(H^*)$ и $v_{22}(t,0) = 0$ при всех $t \geq t_0$.

B_3. Элемент $v_{12}(t,\varphi,x) = v_{21}(t,\varphi,x)$ и $v_{12}(t,\varphi,x)\colon \mathbb{R}_+ \times PC(H) \times S(H^*) \to \mathbb{R}$ является корректирующим, определен на произведении пространств $\mathbb{R}^n \times PC(H)$ и удовлетворяет условиям B_1, B_2 по переменным φ, x, соответственно.

При помощи вектора $\theta \in \mathbb{R}^2_+$ построим функцию [20, 62, 87]

$$V(t,\varphi,x) = \theta^{\mathrm{T}} U(t,*)\theta \tag{2.4}$$

и будем применять ее вместе с полной производной

$$D^+V(t,\varphi,x) = \theta^{\mathrm{T}} D^+U(t,*)\theta \tag{2.5}$$

вдоль решений системы (2.1). Здесь $D^+U(t,x,\varphi) = \limsup\{[U(t+h, x_{t+h}(t,\varphi), \varphi(0) + + hf(t,\varphi,\alpha)) - U(t,x,\varphi)]h^{-1}\colon h \to 0^+\}$ вычисляется поэлементно.

Функция (2.4), разрешающая вместе с производной (2.5) проблему устойчивости состояния $x = 0$ системы (2.1), называется функцией Ляпунова, заданной на произведении пространств $\mathbb{R}^n$ и $PC(H)$.

Заметим, что если в матрице (2.4) $v_{ij}(t,\varphi,x) = 0$ при $i \neq j$, $i,j = 1,2$, тогда функция $V(t,\varphi,x)$ имеет вид

$$V_0(t,\varphi,x) = \theta_1^2 v_{11}(t,\varphi) + \theta_2^2 v_{22}(t,x), \quad \theta_i \in \mathbb{R}_+.$$

Далее будем обозначать $V_1(t,\varphi) = \theta_1^2 v_{11}(t,\varphi)$ и $V_2(t,x) = \theta_2^2 v_{22}(t,x)$.

Функционал $V_1(t,\varphi)\colon \mathbb{R}_+ \times PC(H) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу B_0, если $\theta_1^2 v_{11}(t,\varphi)$ удовлетворяет условию B_1 и для любого $\varphi \in PC([\sigma-\tau,\infty),\mathbb{R}^n)$ функционал $V_1(t,\varphi)$ непрерывен при всех $t \geq \sigma$.

Пример 2.1 (см. [107]). Функционал $V_1(t,\varphi)$ вида

$$V_1(t,\varphi) = \int\limits_{-\tau}^{0} b(s+t)\|\varphi(s)\|^\gamma ds, \quad \gamma \geq 1,$$

принадлежит классу B_0, если $b(u) \in PC([\sigma-\tau,\infty),\mathbb{R}_+)$ и существует постоянная $m > 0$ такая, что $\int\limits_{t-\tau}^{t} b(s)ds \leq m$ при всех $t \geq \sigma$.

Далее применяются некоторые классы функций сравнения при получении достаточных условий устойчивости движения системы (2.1). А именно,

$$K = \{w \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)\colon \text{ строго возрастающие и } w(0) = 0\};$$
$$Q = \{\psi \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)\colon \psi(0) = 0, \psi(s) > 0 \text{ при } s > 0\};$$
$$Q^* = \{\psi \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)\colon \text{ неубывающие, } \psi(0) = 0, \psi(s) \geq s \text{ при } s > 0\}.$$

2.3. Достаточные условия устойчивости.

Установим условия устойчивости состояния $x = 0$ гибридной системы (2.1) с неточными значениями параметров на основе функции (2.3) при некоторых дополнительных условиях.

Теорема 2.1. *Предположим, что для системы* (2.1) *построена функция* (2.3), *в которой элементы $v_{ij}(t,\varphi,x) = 0$ при $i \neq j$ и существуют функции сравнения $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3 \in K$-классу и $\overline{\psi} \in Q$-классу такие, что для функции $V_0(t,x,\varphi) = V_1(t,\varphi) + V_2(t,x)$ верны оценки:*

(1) $\overline{w}_1^{\mathrm{T}}(\|\varphi(0)\|)A_1\overline{w}_1(\|\varphi(0)\|) \le V_0(t,x,\varphi) \le \overline{w}_2^{\mathrm{T}}(|\varphi|)A_2\overline{w}_2(|\varphi|)$, *где* A_1, A_2 *—* 2×2 *симметрические постоянные матрицы,* $V_1 \in B_0$*-классу и* V_2 *удовлетворяет условию* B_2*;*

(2) *для любого вектора* $x \in S(H^*)$ *при* $t = \tau_k$ *верны оценки*

$$V_2(\tau_k, x + I_k(\tau_k, x)) - V_2(\tau_k^-, x) \le -\overline{\psi}^{\mathrm{T}}(V(\tau_k^-, x, \varphi))B_k\overline{\psi}(V_2(\tau_k^-, x, \varphi))$$

при всех $k \in \mathbb{N}$*, где* $B_k - 2\times 2$ *— постоянные симметрические матрицы, для которых* $\lambda_M^k(B_k) \ge 0$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_m^k(B_k) = \infty$*,* $\lambda_m^k(B_k)$ *— максимальное собственное значение матрицы* B_k*,* $k \in \mathbb{N}_+$*;*

(3) *для любого решения* $x(t,\alpha)$ *при любом значении* $\alpha \in \mathcal{G}$ *системы* (2.1) *в области значений* $x \in S(H^*)$ *при всех* $\alpha \in \mathcal{G}$ *выполняется оценка*

$$D^+V_0(t,x,\varphi)|_{(2.1)} \le \overline{w}_3^{\mathrm{T}}(|x_t|)A_3\overline{w}_3(|x_t|),$$

где $A_3 - 2\times 2$ *— постоянная симметрическая матрица;*

(4) *для любого момента* $\sigma \ge t_0$ *и числа* $\eta > 0$ *существует* $\beta > 0$ *такое, что из условия* $V_0(t,x,\varphi) \ge \eta$ *при* $t \ge \sigma$ *следует* $V_2(t,x) > \beta$ *при* $t \ge \sigma$*.*

Тогда, если выполняются условия (1)–(3) и:

(*а*) *матрицы* A_1*,* A_2 *положительно определенные и* $\lambda_M(A_3) \le 0$*, то состояние равновесия* $x = 0$ *системы* (2.1) *равномерно устойчиво;*

(*б*) *выполняются условия (1)—(4) теоремы 2.1 и условие (а), то состояние* $x = 0$ *системы* (2.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Преобразуем оценку для функции $V_0(t,x,\varphi)$ из условия (1) теоремы 2.1 к виду

$$\lambda_M(A_1)w_1(\|\varphi(0)\|) \le V_0(t,x,\varphi) \le \lambda_M(A_2)w_2(|\varphi|), \tag{2.6}$$

где $\lambda_m(A_1)$ — минимальное собственное значение матрицы A_1 и $\lambda_M(A_2)$ — максимальное собственное значение матрицы A_2, $w_1, w_2 \in K$-классу и такие, что

$$w_1(\|\varphi(0)\|) \le \overline{w}_1^{\mathrm{T}}(\|\varphi(0)\|)\overline{w}_1(\|\varphi(0)\|) \quad \text{и} \quad w_2(|\varphi|) \ge \overline{w}_2^{\mathrm{T}}(|\varphi|)\overline{w}_2(|\varphi|).$$

Пусть задано $0 < \varepsilon \le H^*$. Для заданного ε выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda_M(A_2)w_2(\delta) < \lambda_m(A_1)w_1(\varepsilon).$$

Рассмотрим решение $x(t,\alpha) = x(t,\sigma,\varphi,\alpha)$ системы (2.1) с начальным условием $\varphi \in PC(\delta)$ при $\sigma \ge t_0$. Покажем, что при выполнении условий (1)–(3) теоремы 2.1 верна оценка $\|x(t,\alpha)\| < \varepsilon$ при всех $t \ge \sigma$ и при всех $\alpha \in \mathcal{G}$.

Условие (3) теоремы 2.1 выполняется, если

$$D^+V_0(t,x,\varphi) \le \lambda_M(A_3)w_3(|\varphi|), \tag{2.7}$$

где $\lambda_M(A_3) \le 0$ — максимальное собственное значение матрицы A_3 при всех $\alpha \in \mathcal{G}$ и $w_3(|\varphi|) \ge \overline{w}_3^{\mathrm{T}}(|\varphi|)A_3\overline{w}_3(|\varphi|)$, где $w_3 \in W$-классу.

Из условия (2.7) следует, что

$$D^+V_0(t,x,\varphi)|_{(2.1)} \le 0 \quad \text{при} \quad \sigma \le \tau_{k-1} \le t < \tau_k$$

и при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, функция $V_0(t) = V_0(t, x_t, \varphi(t))$ не возрастает на интервалах $[\tau_{k-1}, \tau_k)$. Из условия (2) теоремы 2.1 следует оценка функции $V_0(t)$ для значений $t = \tau_k$:

$$V_0(\tau_k) - V_0(\tau_k^-) = V_2(\tau_k, x(\tau_k) + I_k(\tau_k, x(\tau_k^-))) - V_2(\tau_k, x(\tau_k^-)) \le -\lambda_m^k(B_k)\psi(V_0),$$

где $\psi(r) \ge \overline{\psi}^{\mathrm{T}}(r)\overline{\psi}(r)$. Поэтому функция $V_0(t)$ не возрастает на интервале $[\sigma,\infty)$ и это приводит к неравенствам

$$\lambda_m(A_1)w_1(\|x(t,\alpha)\|) \le V_0(t) \le V_0(\sigma) \le \lambda_M(A_2)w_2(\delta) < \lambda_m(A_1)w_1(\varepsilon), \quad t \ge \sigma.$$

Отсюда следует, что $\|x(t,\alpha)\| < \varepsilon$ при всех $t \ge \sigma$ и любых $\alpha \in \mathcal{G}$ как только $\varphi \in PC(\delta)$. Этим доказана равномерная устойчивость состояния $x = 0$ гибридной системы (2.1).

Далее докажем, что состояние $x = 0$ системы (2.1) асимптотически устойчиво, т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t,\alpha)\| = 0$ при всех $\alpha \in \mathcal{G}$. Обозначим $\eta = \lim V_0(t,x_t)$ при $t \to \infty$. Пусть $\eta > 0$. Тогда, согласно условия (4) теоремы 2.1, существует $\beta > 0$ такое, что $V_2(t,x) \ge \beta$ при всех $t \ge \sigma$.

Вычислим величину

$$K = \inf_{\beta \le V_2 \le \lambda_M(A_2)w_2(\delta)} [\psi(V_2)] > 0.$$

Из условия (2) теоремы 2.1 следует, что

$$V_2(\tau_k) - V_2(\tau_k^-) \le -\lambda_M^k(B_3)\psi(V_2(\tau_k^-)) < -K\lambda_m^k(B_3) \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}_+.$$

Функция $V_0(t)$ не возрастает при всех $t \ge \sigma$ и при любых значениях $\alpha \in \mathcal{G}$, т.е.

$$V_0(\tau_k) - V_0(\tau_{k-1}) \le V_0(\tau_k) - V_0(\tau_k^-) = V_2(\tau_k) - V_2(\tau_k^-) < -K\lambda_m^k(B_3).$$

Отсюда находим

$$V_0(\tau_k) \le V_0(\tau_m) - K\sum_{i=m}^{s} \lambda_M^i(B_3) \to -\infty \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Полученное противоречие доказывает, что величина η должна быть равна 0, т.е. $\lim \|x(t,\alpha)\| = 0$ при $t \to +\infty$. Этим теорема 2.1 доказана.

Пример 2.2 [106]**.** Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t) + b(t)x(t-\tau), \quad t \ne \tau_k, \quad \Delta x(\tau_k) = c_k x(\tau_k^-), \quad k \in \mathbb{N}_+,$$

где $a(t), b(t) \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, $a(t) \le \overline{a}$, $b(t) \le \overline{b}$, $\tau \ge 0$, $|c_k| \le c$.

Пусть для этого уравнения выполняются условия:

(1) $0 < c < 1$ и $\overline{a} + \overline{b}c^{-1} > 0$;

(2) существуют постоянные $\theta_1, \theta_2 > 0$ такие, что $\theta_1 \le \tau_k - \tau_{k-1} \le \theta_2$ и $\theta_2 < -\ln c/(\overline{a} + \overline{b}c^{-1})$ при всех $k \in \mathbb{N}_+$.

Тогда состояние $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

При импульсных возмущениях, не стабилизирующих движение системы (2.1), свойство устойчивости (асимптотической) состояния $x = 0$ системы (2.1) может быть достигнуто при более сильных ограничениях на полную производную $D^+V_0(t,x,\varphi)$ функции $V_0(t,x,\varphi)$ на интервалах непрерывности, т.е. при $t \ne \tau_k$, $\quad k = 1, 2, \dots$.

Теорема 2.2. *Предположим, что для гибридной системы* (2.1) *построена функция* $V_0(t,x,\varphi)$, *существуют функции сравнения* $\overline{w}_1, \overline{w}_2 \in W$*-классу и функция* $\overline{\psi} \in Q$*-классу такие, что для функции* $V_0(t,x,\varphi) = V_1(t,\varphi) + V_2(t,x)$ *верна оценка (1) из теоремы 2.1. Кроме того:*

(1) *при любом значении* $x \in S(H^*)$ *и при каждом* $k \in \mathbb{N}_+$ *верна оценка*

$$|V_2(\tau_k, x + I_k(\tau_k,x)) - V_2(\tau_k^-, x)| \le e^{\mathrm{T}}B_k e V_2(\tau_k^-, x), \quad e = (1,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}_+^2,$$

где B_k *–* 2×2 *— постоянные матрицы,* $\lambda_M^k(B_k) \ge 0$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_M^k(B_k) < +\infty$, $\lambda_M^k(B_k)$ *— максимальное собственное значение матрицы* B_k*;*

(2) *существуют* 2×2-*матрицы* $A_3(t, \alpha)$ *и* $A_3(t)$ *такие, что*

$$D^+ V_0(t, x, \varphi)|_{(2.1)} \leq -\overline{\psi}^{\mathrm{T}}(|x_t|) A_3(t, \alpha) \overline{\psi}^{\mathrm{T}}(|x_t|)$$

при всех $\alpha \in \mathcal{G}$;

(3) *максимальное собственное значение матрицы* $A_3(t) \geq \frac{1}{2}(A_3^{\mathrm{T}}(t, \alpha) + A_3(t, \alpha))$ *удовлетворяет условиям:*

$$\lambda_M(A_3(t)) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \quad \text{и} \quad \int\limits_{t_0}^{\infty} \lambda_M(A_3(s)) ds = \infty;$$

(4) *выполняется условие (4) теоремы 2.1.*

Тогда, если выполняются условия (1)–(3) теоремы 2.2 и

(*а*) *симметрические* 2×2-*матрицы положительно определенные, то состояние* $x = 0$ *системы* (2.1) *равномерно устойчиво;*

(*б*) *выполняются условия (1)–(4) теоремы 2.2, тогда состояние* $x = 0$ *системы* (2.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Обозначим $\beta = \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_m^k(B_k))$. Согласно условиям (1) теоремы 2.2 верно, что $\beta \in [1, \infty)$. Далее, учитывая оценку (2.6), для любого $0 < \varepsilon < H^*$ выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\beta \lambda_M(A_2) w_2(\delta) \leq \lambda_m(A_1) w_1(\varepsilon).$$

Пусть $\sigma \geq t_0$ и решение $x(t, \alpha) = x(t, \sigma, \varphi, \alpha)$ системы (2.1) рассмотрим для начальных функций $\varphi \in PC(\delta)$. Для значений $t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots$, на этом решении верна оценка

$$|V_0(\tau_k) - V_0(\tau_k^-)| = |V_2(\tau_k) - V_2(\tau_k^-)| \leq \lambda_M^k(B_k) V_2(\tau_k^-).$$

Согласно условиям (2), (3) теоремы 2.2 имеем

$$D^+ V_0(t)\big|_{(2.1)} \leq -\lambda_M(\overline{A}_3(t)) \psi(V_0(t)), \tag{2.8}$$

где $\psi(r) \geq \overline{\psi}^{\mathrm{T}}(r) \psi^{\mathrm{T}}(r)$ и $t \neq \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots$. Из оценки (2.8) следует, что

$$\begin{aligned} V_0(t) \leq V_0(\sigma) - \int_{\sigma}^{t} \lambda_M(\overline{A}_3(s)) \psi(V_0(s)) ds + \sum_{\sigma < \tau_k \leq t} |V_2(\tau_k) - V_2(\tau_k^-)| \leq \\ \leq V_0(\sigma) + \sum_{\sigma < \tau_k \leq t} \lambda_M^k(B_k) V(\tau_k). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Из условия (2.8) при всех $t \geq \sigma$ следует оценка

$$V_0(t) \leq V_0(\sigma) \prod_{\sigma < \tau_k \leq t} (1 + \lambda_M^k(B_k)). \tag{2.10}$$

Из оценки (2.9) следует неравенство

$$V_0(t) \leq \beta V_0(t) \leq \beta \lambda_M(A_2) w_2(\delta), \quad t \geq \sigma,$$

которое приводит к оценкам

$$\lambda_m(A_1) w_1(\|x(t, \alpha)\|) \leq V_0(t) \leq \beta \lambda_M(A_2) w_2(\delta) < \lambda_m(A_1) w_1(\varepsilon).$$

Отсюда следует, что при $\varphi \in CP(\delta)$ верна оценка $\|x(t,\alpha)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq \sigma$. Этим доказана равномерная устойчивость состояния $x = 0$ системы (2.1).

Далее покажем, что состояние $x = 0$ системы (2.1) асимптотически устойчиво. Так как это состояние равномерно устойчиво, то для $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ найдется $\delta_0 = \delta(\varepsilon_0) > 0$ такое, что при $\sigma \geq t_0$ для начальной функции $\varphi \in PC(\delta_0)$ верны оценки

$$V_0(t) \leq \beta\lambda_M(A_2)w_2(\delta_0) < \lambda_m(A_1)w_1(\varepsilon_0)$$

и $\|x(t,\alpha)\| < \varepsilon_0$ при всех $t \geq \sigma$. Из того, что при $t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots$, верна оценка

$$|V_0(\tau_k) - V_0(\tau_k^-)| \leq \lambda_M^k(B_k)V_2(\tau_k^-) \leq \lambda_M^k(B_k)V_0(\tau_k^-),$$

следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |V_0(\tau_k) - V_0(\tau_k^-)| < \infty. \tag{2.11}$$

Так как функция $V_0(t)$ не возрастает при всех $t \in [\sigma, \tau_m)$ и $[\tau_k, \tau_{k+1}) \quad (k \geq m)$, то $V_0(t) \leq V_0(\sigma)$ при $\sigma \leq t < \tau_m$ и $V_0(t) \leq V_0(\tau_k)$ при $\tau_k \leq t < \tau_{k+1} \quad (k \geq m)$. Обозначим

$$\mathbb{P}_n = \sum_{k=m}^{n} [V_0(\tau_k) - V_0(\tau_k^-)], \quad n = m+1, \ldots .$$

Из (2.11) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}_n$ существует. Введем функцию $\Xi(t)\colon [\sigma, \infty) \to \mathbb{R}$ согласно формуле

$$\Xi(t) = \begin{cases} V_0(t) & \text{при} \;\; \sigma \leq t < \tau_m, \\ -\mathbb{P}_k + V_0(t) & \text{при} \;\; \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \quad k \geq m. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $\Xi(t)$ не возрастает на $[\sigma, \tau_m)$ и на интервалах $[\tau_k, \tau_{k+1})$ при $k = m, m+1, \ldots$. Покажем, что

$$\Xi(\tau_k) \geq \Xi(\tau_{k+1}) \quad \text{при} \quad k \geq m. \tag{2.12}$$

Для значений $k \geq m$ имеем

$$\Xi(\tau_k) = -\mathbb{P}_k + V_0(\tau_k) \geq -\mathbb{P}_k + V_0(\tau_{k+1}^-) = -\mathbb{P}_k - [V_0(\tau_{k+1}) - V_0(\tau_{k+1}^-)] + \\ + V_0(\tau_{k+1}) = -\mathbb{P}_k + V_0(\tau_{k+1}) = \Xi(\tau_{k+1}).$$

Отсюда следует, что $\Xi(t)$ не возрастает на $[\tau_m, \infty)$. Кроме того, $\Xi(t)$ ограничена и $\lim\limits_{t\to\infty} \Xi(t)$ существует. Согласно условия (a) теоремы 2.2 $\lim\limits_{t\to\infty} V_0(t) = \eta$, где $\eta \geq 0$. Покажем, что при выполнении условий теоремы 2.2 величина $\eta = 0$. Предположим обратное, что $\eta > 0$. При этом найдется $\tau > 0$ такое, что $V_0(t) \geq \frac{1}{2}\alpha$ при $t \geq \tau$. Пусть

$$K = \inf\left\{\psi(s)\colon \quad \frac{1}{2}\alpha \leq s \leq \beta\lambda_M(A_2)w_2(\delta_0)\right\}.$$

Очевидно, что $K \geq 0$. Из условий (2), (3) теоремы 2.2 имеем

$$V_0(t) \leq V_0(\tau) - \int_{\tau}^{t} \lambda_M(\overline{A}_3(s))\psi(V_0(s))ds + \sum_{\tau<\tau_k\leq t} [V_0(\tau_k) - V_0(\tau_k^-)] \leq \\ \leq V_0(\tau) - K\int_{\tau}^{t} \lambda_M(\overline{A}_3(s))ds + \sum_{k=1}^{\infty} |V_0(\tau_k) - V_0(\tau_k^-)|.$$

Отсюда следует, что $\lim V_0(t) = -\infty$ при $t \to \infty$. Это противоречит предположению (1) теоремы 2.2 и, следовательно, $\eta = 0$, поэтому $\lim \|x(t,\alpha)\| = 0$ при $t \to \infty$ и при всех $\alpha \in \mathcal{G}$. Теорема 2.2 доказана.

Пример 2.3 [106]. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) + b(t)x(t-\tau), \quad t \neq \tau_k,$$
$$\Delta x(\tau_k) = I_k(x(\tau_k^-)), \quad k \in \mathbb{N}_+,$$

где $a(t), b(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a(t) \geq \overline{a} > 0$, $|b(t)| \leq \overline{b}$, $I_k(x) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Если для этого уравнения выполняются условия:

(1) существуют постоянные $b_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$ такие, что $|x + I_k(x)| \leq (1 + b_k)x^2$ при всех $k \in \mathbb{N}_+$;

(2) выполняется неравенство $\overline{a} > \overline{b}\sqrt{\beta}$, где $\beta = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 + b_k)$;

(3) существует $q > 1$ такое, что $\overline{a} - q\overline{b}\sqrt{\beta} > 0$,

тогда решение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Далее приведем условия неустойчивости состояния $x = 0$ гибридной системы (2.1).

Теорема 2.3. *Предположим, что для системы* (2.1) *построена функция* $V_0(t, x, \varphi)$ *и существуют функции сравнения* $\overline{w}_1, \overline{w}_2 \in W$*-классу,* $\psi \in Q$*-классу такие, что функция* $V_0(t, x, \varphi) = V_1(t, \varphi) + V_2(t, x)$ *ограничена и выполняются условия:*

(1) *при любых* $x \in S(\rho)$ *верна оценка*

$$\overline{w}_1^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_1\overline{w}_1(\|x\|) \leq V_2(t, x),$$

где $A_1 - 2 \times 2$ *— постоянная симметрическая матрица;*

(2) *вдоль любого решения* $x(t, \alpha)$ *системы* (2.1) *при любом значении* $\alpha \in \mathcal{G}$ *выполняется неравенство*

$$D^+V_0(t, x, \varphi)\big|_{(2.1)} \geq \overline{w}_2^{\mathrm{T}}(|x_t|)A_3\overline{w}_2(|x_t|),$$

где $A_3 - 2 \times 2$ *— постоянная симметрическая матрица;*

(3) *для каждого значения* $k \in \mathbb{N}_+$ *и* $x \in S(H^*)$ *существует* 2×2*-матрица* $B_3^{(k)}$ *такая, что*

$$V_2(t, x + I_k(\tau_k^-, x)) - V_2(\tau_k^-, x) \geq \overline{\psi}^{\mathrm{T}}(V_2(\tau_k^-, x))B_3^{(k)}\overline{\psi}(V_2(\tau_k^-, x)),$$

где $\lambda_m(B_3^{(k)}) \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_m(B_3^{(k)}) = \infty$, $\lambda_m(B_3^{(k)})$ *— минимальное собственное значение матрицы* B_3 *при* $k = 1, 2, \ldots$*;*

(4) *для любых* $\sigma \geq t_0$ *и* $\eta > 0$ *существует* $\beta > 0$ *такое, что из условия* $V_0(t, x_t, \eta) \geq \eta$ *при* $t \geq \sigma$ *следует, что* $\|x(t, \alpha)\| \geq \beta$ *при всех* $t \geq \sigma$ *и при любых* $\alpha \in \mathcal{G}$.

Тогда, если матрицы A_1, A_3 *положительно определенные, то состояние* $x = 0$ *системы* (2.1) *неустойчиво.*

Доказательство. Пусть $x(t, \alpha)$ — решение системы (2.1) при любом $\alpha \in \mathcal{G}$ и при начальной функции $\varphi \in PC(\delta)$, где $\delta > 0$ — сколь угодно малое число. Предположим, что при выполнении условий теоремы 2.3 решение $x = 0$ устойчиво. Пусть $\sigma \in [\tau_{m-1}, \tau_m)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}_+$. Из условий (1)–(3) теоремы 2.3 следует, что:

(*а*) $\lambda_m(A_1)w(\|x\|) \leq V_2(t, x, \eta)$;

(*б*) $D^+V_0(t, x, \varphi)\big|_{(2.1)} \geq \lambda_m(A_3)w_2(|x_t|)$,

где $\lambda_m(A_3)$ — минимальное собственное значение матрицы A_3 и $w_2(r) \leq \overline{w}_2^{\mathrm{T}}(r)\overline{w}_2(r)$ при любом значении $r \in [0, +\infty)$;

(*в*) $V_0(\tau_k)-V_0(\tau_k^-)=V_2(\tau_k)-V_2(\tau_k^-)\geq\lambda_m^k(B_3)\psi(V_2(\tau_k^-))$, где $\psi\in Q$-классу и $\psi(r)\leq\overline{\psi}^{\mathrm{T}}(r)\overline{\psi}(r)$.

Из условий (*б*), (*в*) следует, что функция $V_0(t,x,\varphi)$ не убывает на любом решении $x(t,\alpha)$ на интервалах $[\sigma,\tau_m)$ и $[\tau_k,\tau_{k+1})$ при $k\geq m$. Так как $V_0(\tau_k^-)\geq V_0(\tau_{k-1})$, то

$$V_0(\tau_k)-V_0(\tau_{k-1})\geq\lambda_m^k(B_3)\psi(V_2(\tau_k^-)). \tag{2.13}$$

Поэтому верна оценка $V_0(t)\geq V_0(\sigma)$ при всех $t\geq\sigma$. Согласно условию (*a*) теоремы 2.3 имеем оценку $V_2(\tau_k^-)\geq\lambda_m(A_1)w_1(\|x(\tau_k^-)\|)\geq\lambda_m(A_1)w_1(\beta)$. Отсюда из (2.13) следует

$$V_0(\tau_k)-V_0(\tau_{k-1})\geq\lambda_m^k(B_3)\psi(\lambda_m(A_1)w_1(\beta))$$

и далее

$$V_0(\tau_k)\geq V_0(\tau_m)+\psi(\lambda_m(A_1)w_1(\beta))\sum_{j=m+1}^{k}\lambda_M^k(B_3)\to\infty\quad\text{при}\quad k\to\infty.$$

Это противоречит ограниченности функции $V_0(t)$ при всех $t\geq\sigma$.

Теорема доказана.

Пример 2.4 [106]**.** Известно, что решение $x=0$ уравнения

$$\frac{dy}{dt}=ay(t)+by(t-\tau),\quad \tau>0,$$

неустойчиво, если $a+b>0$. Для импульсного уравнения

$$\frac{dx}{dt}=ax(t)+bx(t-\tau),\quad t\neq\tau_k,\quad \Delta x(\tau_k)=c_kx(\tau_k^-),\quad k\in\mathbb{N}_+,$$

где $\tau\geq0$, $|c_k|\leq c$, из условия $a+b>0$ следует $a+|b|c^{-1}>0$, если $0<c<1$. Поэтому, если $0<c<1$, $a+b>0$ и существуют постоянные $\theta_1,\theta_2>0$ такие, что $\theta_1\leq\tau_k-\tau_{k-1}\leq\theta_2$, $\theta_2<(-\ln c)/(a+|b|c^{-1})$ при всех $k\in\mathbb{N}_+$, то решение $x=0$ импульсного уравнения равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 2.4. *Предположим, что для системы* (2.1) *построена функция* (2.3) *и существуют функции сравнения $\overline{w}_1,\overline{w}_2\in W$-классу и $\psi\in Q$-классу такие, что функция $V_0(t,x,\varphi)=V_1(t,\varphi)+V_2(t,x)$ удовлетворяет условиям:*

(1) $\overline{w}_1^{\mathrm{T}}(\|\varphi(0)\|)A_1\overline{w}_1(\|\varphi(0)\|)\leq V_0(t,x,\varphi)\leq\overline{w}_2^{\mathrm{T}}(|\varphi|)A_2\overline{w}_2(|\varphi|)$, *где A_1,A_2 — постоянные симметрические 2×2-матрицы;*

(2) *при любых $\alpha\in\mathcal{G}$*

$$-\psi^{\mathrm{T}}(V_0(t,x,\varphi)A_3(t)\psi(V_0(t,x,\varphi))\leq D^+V_0(t,x,\varphi)\leq0,$$

где $A_3(t)$ — симметрическая 2×2-матрица и $\lambda_m(A_3(t))\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ — локально интегрируемая функция;

(3) *существуют функции сравнения $\psi_k,\overline{\psi}_k\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $k=1,2,\ldots$, такие, что $\varphi_k(s)\geq s$, $\overline{\psi}_k(s)\geq s$ и $\psi_k(s_1)+s_2\geq\overline{\psi}_k(s_1+s_2)$ при $0\leq s_1,s_2\leq\lambda_M(A_2)w_2(\rho)$ и для каждого $k\in\mathbb{N}_+$ и $x\in S(H^*)$ верны оценки:*

(*а*) $V_2(\tau_k,x+I_k(\tau_k,x))\geq\psi(V_2(\tau_k^-,x))$;

(*б*) $-\int\limits_{\tau_k}^{k+1}\lambda_m(A_3(s))ds+\int\limits_{m}^{\overline{\psi}_{k+1}(\mu)}\frac{ds}{\varphi(s)}\geq r_k$, *где $\mu>0$, $r_k\geq0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}r_k=\infty$.*

Тогда, если матрицы A_1, A_2 — положительно определенные и $\lambda_m(A_3(t))>0$ при всех $t\geq\sigma$, то состояние $x=0$ системы (2.1) *неустойчиво.*

Доказательство. Пусть $x(t,\alpha)$ — решение системы (2.1) при любом $\alpha\in\mathcal{G}$ и при $\varphi\in PC(\delta)$, $\delta>0$, устойчиво. Тогда при $t\geq\sigma$ верна оценка $\|x(t,\alpha)\|<\varepsilon$, где

$\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$. Пусть $\sigma \in [\tau_{m-1}, \tau_m)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}_+$. Из условия (2) теоремы 2.4 следует, что

$$\int\limits_{V(\tau_k)}^{V(\tau_{k+1}^-)} \frac{ds}{\psi(s)} \ge -\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \lambda_m(A_3(s))ds, \quad k = m, m+1, \dots. \tag{2.14}$$

Из условия (3,*а*) следует, что $V_2(\tau_k) \ge \psi(V_2(\tau_k^-))$, и согласно свойствам функций ψ_k и $\overline{\psi}_k$ получим

$$\int\limits_{V_0(\tau_{k+1}^-)}^{V_0(\tau_{k+1})} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge \int\limits_{V_0(\tau_{k+1}^-)}^{\overline{\psi}_{k+1}(V_0(\tau_{k+1}^-))} \frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Отсюда и согласно условию (3*б*) получим

$$\int\limits_{V_0(\tau_k)}^{V_0(\tau_{k+1})} \frac{ds}{\psi(s)} \ge r_k, \tag{2.15}$$

и, следовательно, $V(\tau_{k+1}) - V(\tau_k) \ge \psi(V(\tau_m))r_k$ при всех $k = m, m+1, \dots$. Поэтому приходим к неравенству

$$V_0(\tau_{k+1}) \ge V_0(\tau_m) + \psi(V_0(\tau_m)) \sum_{i=m}^{k} r_i \to +\infty \quad (k \to \infty). \tag{2.16}$$

Неравенство (2.16) противоречит условию (1) теоремы 2.3 и поэтому состояние системы (2.1) — неустойчиво.

Функции $V_1(t, \varphi)$ и $V_2(t, x)$ могут быть построены с учетом известных результатов [87 и др.]. Применение матричнозначных функций (2.3) и функций вида $V_0(t, \varphi, x) = V_1(t, \cdot) + V_2(t, \cdot)$, заданных на произведении пространств $PC(\delta) \times \mathbb{R}^n$, позволяет ослабить условия теорем прямого метода Ляпунова для систем (2.1) (cf. [113]).

2.5. Стабилизация движения гибридной системы.

Известно, что импульсное возмущение может стабилизировать и/или дестабилизировать движение нелинейной системы с последействием. В этом разделе приведены условия импульсной стабилизации движения системы с последействием на основе двух подходов: вначале путем применения функций Ляпунова–Разумихина и затем — функций Ляпунова на произведении пространств.

Далее будем рассматривать уравнения возмущенного движения в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x_t), \quad t \ne \tau_k, \\ \Delta x(t) &= I_k(x(t^-)), \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где τ_k — постоянные, $0 \le \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \ldots$, $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Наряду с системой (2.17) рассмотрим систему с последействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x_t), \quad t \ge t_0, \\ x(\sigma) &= \varphi(s) \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n), \quad \sigma \ge t_0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C(\mathbb{R}_+ \times PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$, $f(t, 0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Система с последействием (2.18) стабилизируема с помощью импульсных возмущений, если существует последовательность моментов $\{\tau_k\}$, $\tau_k - \tau_{k-1} \ne 0$, и последовательность соответствующих вектор-функций $\{I_k(x)\}$, $k \in \mathbb{N}_+$, таких, что нулевое решение системы (2.17) обладает определенным типом устойчивости, более сильным, чем устойчивость состояния $x = 0$ системы (2.18), или противоположным ему. А именно, нулевое решение системы (2.18) может быть устойчивым, но не асимптотически, в то время как импульсное возмущение упрочняет движение системы (2.17) до асимптотически устойчивого.

Для системы (2.17) будем применять функцию

$$V_2(t,x) = \theta^{\mathrm{T}} U(t,*)\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}^2_+, \tag{2.19}$$

где

$$U(t,*) = \begin{pmatrix} v_{11}(t,x_1) & v_{12}(t,x_1,x_2) \\ v_{21}(t,x_1,x_2) & v_{22}(t,x_2) \end{pmatrix}.$$

Здесь $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $v_{11}(t,x_1)\colon \mathbb{R}_+ \times S(H_1) \to \mathbb{R}_+$, $v_{22}(t,x_2)\colon \mathbb{R}_+ \times \times S(H_2) \to \mathbb{R}_+$ и $v_{12}(t,x_1,x_2) = v_{21}(t,x_1,x_2)\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$, $S(H_1) = \{x_1 \in \in \mathbb{R}^{n_1}\colon \|x_1\| < H_1\}$, $S(H_2) = \{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}\colon \|x_2\| < H_2\}$, $H_1, H_2 > 0$. Заметим, что для некоторых классов гибридных систем вида (2.17) матричная функция $U(t,\cdot)$ может быть построена в явном виде путем решения матричных уравнений Ляпунова и специального уравнения для определения элемента $v_{12}(t,x_1,x_2)$.

Функция (2.19) удовлетворяет условию B_2, если:

(а) $V_2(t,x)$ непрерывна на любом множестве $[\tau_{k-1},\tau_k)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ и при всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}_+$ существует предел $\lim\limits_{(t,y)\to(\tau_k^-,x)} = V_2(\tau_k^-,x)$;

(б) $V_2(t,x)$ — локально липшицева по $x \in \mathbb{R}^n$ и $V_2(t,0) = 0$ при всех $t \geq t_0$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.5 (cf. [113]). *Предположим, что для системы* (2.17) *построена функция $V_2(t,x)$, удовлетворяющая условию B_2. Кроме того, существуют постоянные $p, c_1, c_2, \lambda > 0$ и $\beta > \tau$ такие, что:*

(1) $c_1\|x\|^p \leq V_2(t,x) \leq c_2\|x\|^p$ *при всех $t \geq t_0$ и $x \in \mathbb{R}^n$;*

(2) *вдоль решений системы* (2.17) *верна оценка $D^+V_2(t,\varphi(0))\big|_{(2.17)} \leq 0$ при всех $t \in [\tau_{k-1},\tau_k)$, $k \in \mathbb{N}_+$, как только $qV_2(t,\varphi(0)) \geq V_2(t+s,\varphi(s))$ при $s \in [-\tau,0]$, $q \geq e^{2\lambda\beta}$;*

(3) *существуют постоянные $d_k > 0$, $k \in \mathbb{N}_+$, такие, что $V_2(\tau_k,\varphi(0)+I_k(\varphi)) \leq \leq d_k V_2(\tau_k^-,\varphi(0))$;*

(4) *при всех $k \in \mathbb{N}_+$ $\tau \leq \tau_k - \tau_{k-1} \leq \beta$ и $\ln(d_k) + \lambda\beta < -\lambda(\tau_{k+1}-\tau_k)$.*

Тогда состояние $x = 0$ системы (2.17) *экспоненциально устойчиво в целом.*

Доказательство. Пусть $x(t,\varphi) = x(t,t_0,\varphi)$ — любое решение системы (2.17) с начальной функцией $x_{t_0} = \varphi$. Оценим $c_2|\varphi|^p$ так: выберем $m > 0$ при заданном q таким, чтобы

$$c_2|\varphi|^p < m|\varphi|^p e^{-\lambda(\tau_1-\tau_0)} \leq qc_2|\varphi|^p.$$

При выполнении условий теоремы 2.5 нетрудно показать, что $V_2(t,x(t,\varphi)) \leq \leq m|\varphi|^p e^{-\lambda(t-t_0)}$ при всех $t \in [\tau_{k-1},\tau_k)$.

Поэтому в силу условия (1) теоремы 2.5 имеем $\|x(t,\varphi)\| \leq m^*|\varphi|e^{-\frac{\lambda}{p}(t-t_0)}$ при всех $t \in [\tau_{k-1},\tau_k)$, $k \in \mathbb{N}_+$, где $m^* \geq \max\left\{1,(m/c_1)^{1/p}\right\}$. Этим теорема 2.5 доказана.

При известных ограничениях на элементы $v_{ij}(t,\cdot)$ матричной функции $U(t,*)$ величины c_1, c_2 вычисляются в явном виде как собственные значения специальных матриц (см. [87]).

Заметим, что условие (2) теоремы 2.5 для системы с последействием без импульсных возмущений не гарантирует даже асимптотическую устойчивость состояния $x = 0$. Действие импульсных возмущений стабилизирует движение системы (2.17).

Далее применим функцию Ляпунова на произведении пространств $\mathbb{R}^n$ и $PC([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.6 (cf. [113]). *Предположим, что для системы* (2.17) *построена функция* (2.4) *со слагаемыми* $V_1(t,\varphi,\eta)$ *и* $V_2(t,x,\eta)$*, удовлетворяющими условиям* B_0, B_2*, соответственно. Кроме того, существуют постоянные* $0 < p_1 < p_2$ *и* $\beta, \mu, c, c_1, c_2, c_3 > 0$*,* $d_k \geq 0$ *при* $k \in \mathbb{N}_+$ *такие, что:*

(1) $c_1\|x\|^{p_1} \leq V_2(t,x) \leq c_2\|x\|^{p_1}, \quad 0 \leq V_1(t,\varphi) \leq c_3|\varphi|^{p_2}$ *при всех* $t \in \mathbb{R}_+$*,* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $\varphi \in PC([-\tau,0),\mathbb{R}^n)$*;*

(2) *при любом* $k \in \mathbb{N}_+$ *и* $x \in \mathbb{R}^n$ *верна оценка* $V_2(\tau_k, x + I_k(x)) \leq d_k V_2(\tau_k^-, x)$*;*

(3) *для функции* $V(t,\psi) = V_1(t,\psi) + V_2(t,\psi(0))$ *при всех* $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$*,* $\psi \in \in PC([-\tau,0),\mathbb{R}^n)$*,* $k \in \mathbb{N}_+$ *выполняется оценка* $D^+V(t,\psi)\big|_{(2.17)} \leq cV(t,\psi)$ *;*

(4) *при любых* $k \in \mathbb{N}_+$ $\tau \leq \tau_k - \tau_{k-1} \leq \mu$ *и* $\ln\left(d_k + \frac{c_3}{c_1}e^{(p_2/p_1-1)ck\mu}\right) \leq -(\beta + c)\mu$.

Тогда состояние $x = 0$ *системы* (2.17) *экспоненциально устойчиво в целом.*

Доказательство. Пусть $x(t,\varphi)$ — любое решение системы (2.17) с начальной функцией $\varphi \in PC(\delta)$. Для заданного значения $\varepsilon \in (0,1]$ выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$c_2\delta^{p_1} + c_3\delta^{p_2} < c_1\varepsilon^{p_1}e^{-(\beta+c)\mu}. \tag{2.20}$$

Из условия (3) теоремы 2.6 следует, что

$$V(t) \leq V(\tau_{k-1})e^{c(t-\tau_{k-1})} \tag{2.21}$$

при всех $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$, $k \in \mathbb{N}_+$. Применяя оценки (2.20) и (2.21) для $k = 1$ и $k = j+1$, нетрудно показать, что при выполнении условий (1)–(4) теоремы 2.6 верна оценка $V(t) < c_1\varepsilon^{p_1}e^{-(\beta+c)k\mu}e^{c(t-t_0)}$ и при всех $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$, $k \in \mathbb{N}_+$,

$$\|x(t,\varphi)\| < \varepsilon e^{-(\beta/p_1)(t-t_0)}.$$

Этим теорема 2.6 доказана.

Заметим, что условие (3) теоремы 2.6 допускает, что $D^+V(t,\varphi)|_{(2.17)} > 0$ при $t \neq \tau_k$, $k \in \mathbb{N}_+$, при $\psi(0) \neq 0$. Это означает, что непрерывная компонента системы (2.17) может быть неустойчивой. С другой стороны, условие (4) устанавливает связь между частотой импульсов и ростом функции $V(t,\psi)$, при которых импульсные возмущения стабилизируют движение системы (2.17) к экспоненциально устойчивому в целом.

Пример 2.4 [113]. Рассмотрим систему с последействием второго порядка

$$\begin{gathered}
\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + a(t)x(t-\tau) = 0, \quad t \geq t_0,\\
x(t) = \varphi(t),\\
\frac{dx}{dt} = \psi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0,
\end{gathered}$$

и соответствующую ей систему с импульсным возмущением

$$\begin{gathered}
\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + a(t)x(t-\tau) = 0, \quad t \neq \tau_k,\\
x(\tau_k) = I_k(x(\tau_k^-)),\\
\frac{dx}{dt}(\tau_k) = J_k\left(\frac{dx}{dt}(\tau_k^-)\right),\\
x(t) = \varphi(t),\\
\frac{dx}{dt} = \psi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0,
\end{gathered}$$

где $t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \ldots$, $k \in \mathbb{N}_+$, $\lim \tau_k = +\infty$ при $k \to \infty$, I_k, J_k, φ и $\psi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $I_k(0) = J_k(0) = 0$ при $k \in \mathbb{N}_+$.

Пусть параметры $a(t)$, $b(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ и существуют постоянные $\overline{a}, \overline{b}$ такие, что $|a(t)| \leq \overline{a}$, $|b(t)| \leq \overline{b}$ при всех $t \in [t_0, \infty)$, $\overline{a}, \overline{b} > 0$. Пусть импульсные возмущения происходят в моменты $\{\tau_k\}$ такие, что $\theta_1 \leq \tau_k - \tau_{k-1} \leq \theta_2$, где $\theta_1, \theta_2 > 0$, $\theta_2 < +\infty$.

Рассмотрим последовательность функций $\{I_k(u) = J_k(u)\}$, где $I_k(u) = (d_k/2)^{1/2}u$ при всех $k \in \mathbb{N}_+$. Если существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что

$$\ln(d_k + \overline{a}\theta_1) < -(\alpha + 1 + \overline{a} + 2\overline{b})\theta_2,$$

где $\theta_1 = \tau$, $\theta_2 < +\infty$, то движение системы с последействием стабилизируемо импульсными возмущениями до экспоненциальной устойчивости в целом.

2.6. Условия устойчивости относительно двух мер.

Основные теоремы прямого метода Ляпунова исследования устойчивости движения относительно двух мер изложены во многих статьях и подытожены в монографии [77] (см. библиографию там). Для гибридных систем соответствующая теория находится в процессе становления [27, 94, 95].

В этом разделе излагается один подход к анализу устойчивости движения систем вида (2.17) на основе функции Ляпунова, учитывающей декомпозицию системы (2.17)

Пусть совокупность функций $q_1(t), \ldots, q_k(t)$ и их производных $\dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_k(t)$ удовлетворяет уравнениям движения материальной системы в форме

$$\frac{d^2 q_s}{dt^2} = Q_s(t, q_1(t), \ldots, q_k(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_k(t)), \quad s = 1, 2, \ldots, k,$$

где Q_s — известные функции времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей. Обозначим $\dot{q}_1 = q_{k+1}(t), \ldots, \dot{q}_k = q_{2k}(t)$. Движение, которое описывается совокупностью функций $q_1^0(t), \ldots, q_{2k}^0(t)$, будем называть невозмущенным. Другие движения, возможные при тех же силах для данной системы, будем называть возмущенными.

Пусть заданы функции $\Phi_1(q_1, \ldots, q_{2k}, t), \ldots, \Phi_n(q_1, \ldots, q_{2k}, t)$ величин q_i и t, $i = 1, 2, \ldots, 2k = n$. Для невозмущенного движения $q_i^0(t)$ функции Φ_i представляют собой некоторые известные функции времени $F_i(t) = \Phi_i(q_1^0(t), \ldots, q_n^0(t), t)$. Обозначим

$$\rho_0(q(t), t) = \max_{1 \leq s \leq 2k} |q_s(t) - q_s^0(t)|, \quad \rho(q(t), t) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i(t)|,$$

где $x_i(t) = \Phi_i(q_1(t), \ldots, q_n(t), t) - F_i(t)$.

Определение 2.2 [40]. Невозмущенное движение $q_i^0(t)$ системы (1.$*$) называется устойчивым по отношению к функциям Φ_i, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что для всякого возмущенного движения $q_i(t)$, удовлетворяющего в начальный момент времени условию $\rho_0(q(t_0), t_0) < \delta$, при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\rho(q(t), t) < \varepsilon$.

Напомним, что меры ρ_0 и ρ имеют следующие свойства:

(*а*) мера $\rho_0(q(t), t)$ — вещественная неотрицательная величина, обращается в нуль на невозмущенном движении $q_i^0(t)$ при любом $t \geq t_0$;

(*б*) мера $\rho(q(t), t)$ непрерывная по t при любых $t \geq t_0$, принимает вещественное значение и обращается в нуль на невозмущенном движении $q_i^0(t)$ при любом $t \geq t_0$;

(*в*) для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что неравенство $\rho(q(t_0), t_0) < \varepsilon$ выполняется, как только $\rho_0(q(t_0), t_0) < \delta$.

Далее будем рассматривать меры $\rho(t, \varphi)$ и $\rho_0(t, \varphi)$ из множеств функций (см. [77, 87, 113])

$$\mathcal{M} = \left\{ \rho \in C([-\tau, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+) \colon \inf_{(t,x)} \rho(t, x) = 0 \right\},$$

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ \rho_0 \in C([-\tau, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+) \colon \rho_0(t, \varphi) = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \rho(t + s, \varphi(s)) \right\}.$$

Определение 2.3. Импульсная система с последействием (2.17) называется:

(S$_1$) эквиустойчивой относительно двух мер $\rho \in \mathcal{M}$ и $\rho_0 \in \mathcal{M}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(t, x(t)) < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$, как только $\rho_0(t_0, \varphi) < \delta$, где $x(t)$ — любое решение системы (2.17);

(S$_2$) равномерно устойчивой относительно двух мер $\rho \in \mathcal{M}$ и $\rho_0 \in \mathcal{M}_0$, если величина δ в определении S$_1$ не зависит от t_0;

(S$_3$) равномерно асимптотически устойчивой относительно двух мер $\rho \in \mathcal{M}$ и $\rho_0 \in \mathcal{M}_0$, если выполняются условия определения S$_2$ и для каждого $\gamma > 0$ и $t \geq t_0$ существуют $\eta = \eta(\gamma) > 0$ и $T = T(\gamma) > 0$ такие, что $\rho(t, x(t)) < \gamma$ при всех $t \geq t_0 + T$, как только $\rho_0(t_0, \varphi) < \eta$.

Далее вместе с системой (2.17) будем рассматривать функцию

$$V(t, x, \theta) = \theta^{\mathrm{T}} U(t, *)\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}_+^2, \tag{2.22}$$

где

$$U(t, *) = \begin{pmatrix} v_{11}(t, x_1) & v_{12}(t, x_1, x_2) \\ v_{21}(t, x_2, x_1) & v_{22}(t, x_2) \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.7. *Пусть для гибридной системы* (2.17) *построена функция* (2.22) *и выполняются следующие условия:*

(1) *существуют функции сравнения w, $\overline{w}_i \in K$-классу и постоянные симметрические матрицы A_i, $i = 1, 2$, такие, что при $\rho(t, \varphi(0)) < H$, $H = \mathrm{const} > 0$, $\rho(t_0, \varphi(0)) \leq w(\rho_0(t_0, \varphi))$ выполняется неравенство*

$$\overline{w}_1^{\mathrm{T}}(\rho) A_1 \overline{w}_1(\rho) \leq V(t, \varphi(0), \theta) \leq \overline{w}_2^{\mathrm{T}}(\rho_0) A_2 \overline{w}_2(\rho_0), \tag{2.23}$$

где $\varphi \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$;

(2) *существуют постоянные $b_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} < \infty$, такие, что $V(t, x + I_k(x), \theta) \leq$ $\leq (1 + b_k) V(\tau_k^-, x, \theta)$ при $\rho(t, x) < H$;*

(3) *существуют 2×2-постоянная симметрическая матрица A_3 и функции сравнения $\overline{w}_3 \in K$-классу такие, что*

$$D^+ V(t, x(t), \theta)\big|_{(2.17)} \leq \overline{w}_3^{\mathrm{T}}(\rho) A_3 \overline{w}_3(\rho), \quad \rho(t, x(t)) < H, \tag{2.24}$$

и $V(t, x(t), \theta) \geq V(s, x(s), \theta)$ при $t \geq s$;

(4) *существует $H_0 \in (0, H)$ такое, что $\rho(\tau_k, x + I_k(x)) < H$ при любых $\rho(\tau_k, x) <$ $< H_0$, $k \in \mathbb{N}_+$;*

(5) *матрицы A_1, A_2 — положительно определенные и матрица A_3 — отрицательно полуопределенная.*

Тогда состояние $x = 0$ системы (2.17) *равномерно (ρ_0, ρ)-устойчиво.*

Доказательство. Из условий (1), (3), (5) теоремы 2.7 следует, что оценки (2.23), (2.24) выполняются вслед за оценками

$$\lambda_m(A_1) w_1(\rho) \leq V(t, \varphi(0), \theta) \leq \lambda_M(A_2) w_2(\rho_0), \tag{2.25}$$

где $w_i \in K$-классу такие, что $w_1(\rho) \leq \overline{w}_1^{\mathrm{T}}(\rho)\overline{w}_1(\rho)$ и $w_2(\rho_0) \geq \overline{w}_2^{\mathrm{T}}(\rho_0)\overline{w}_2(\rho_0)$, и

$$D^+ V(t, x(t), \theta)\big|_{(2.17)} \leq \lambda_M(A_3) w_3(\rho), \tag{2.26}$$

где $w_3(\rho) \geq \overline{w}_3^{\mathrm{T}}(\rho)\overline{w}_3(\rho)$, $w_3 \in K$-классу.

Согласно условия (2) теоремы 2.7 имеем $1 \leq \pi < +\infty$, где $\pi = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 + b_k)$. Для заданного значения $\varepsilon \in (0, H_0)$ выберем $\delta > 0$ так, что $\pi \lambda_M(A_2) w_2(\delta) < \lambda_m(A_1) w_1(\varepsilon)$

и $w(\delta) < \varepsilon$. Теорема 2.7 будет доказана, если при выполнении ее условий при $\rho_0(t_0,\varphi) < \delta$ будет выполняться неравенство $\rho(t,x(t)) < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$ для любого решения $x(t)$ системы (2.17).

Покажем вначале, что для значений $t \in [t_0, t_1)$ верна оценка

$$\rho(t,x(t)) < \varepsilon. \tag{2.27}$$

Пусть неравенство (2.27) не верно. Тогда найдется $t^* \in (t_0, t_1)$ такое, что $\rho(t^*, x(t^*)) = \varepsilon$ и $\rho(t,x(t)) < \varepsilon$ при всех $t \in [t_0, t^*)$. Так как $\varepsilon < H_0 < H$, то по условию (1) теоремы 1.7 получим

$$\begin{gathered} V(t^*, x(t^*), \theta) \geq \lambda_m(A_1)w_1(\rho(t^*, x(t^*))) = \lambda_m(A_1)w_1(\varepsilon) > \pi\lambda_M(A_2)w_2(\delta) \geq \\ \geq \lambda_M(A_2)w_2(\delta) \geq V(s, x(s), \theta) \quad \text{при всех} \quad s \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Пусть $m(t) = \sup\limits_{s\in[t_0-\tau,t]} V(s,x(s),\theta)$. Из оценки (2.28) следует, что

$$m(t^*) > \lambda_M(A_2)w_2(\delta) \geq m(t_0).$$

Это неравенство возможно, если существует $\hat{t} \in [t_0, t^*]$ такое, что $D^+m(\hat{t}) > 0$, где $D^+m(\hat{t}) = \limsup\limits_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\alpha}[m(\hat{t}+\alpha) - m(\hat{t})]$. Покажем, что при всех $t \in [t_0, t^*]$ имеет место соотношение $D^+m(t) = 0$. Действительно, для $t \in [t_0, t^*]$ верно неравенство $m(t) \geq V(t, x(t), \theta)$ согласно определения $m(t)$. Если $m(t) > V(t,x(t),\theta)$, тогда по непрерывности функции $V(t,x(t),\theta)$ найдется $\beta > 0$ такое, что $V(t+\gamma, x(t+\gamma), \theta) \leq m(t)$ при $0 < \gamma < \beta$. Тогда $m(t+\gamma) = m(t)$ при $0 < \gamma < \beta$ и отсюда $D^+m(t) = 0$. Если $m(t) = V(t,x(t),\theta)$, тогда $V(t,x(t),\theta) > V(s,x(s),\theta)$ при $t \geq s$ и согласно условий (3), (5) теоремы 2.7 имеем $D^+V(t,x(t),\theta) \leq 0$ и $\rho(t,x(t)) \leq \varepsilon < H_0 < H$ при всех $t \in [t_0, t^*]$. Отсюда следует, что $V(t+\gamma, x(t+\gamma), \theta) \leq V(t,x(t),\theta)$ и для достаточно малого $\gamma > 0$ получим $m(t+\gamma) \leq m(t)$. Но в этом случае $D^+m(t) \leq 0$, что вместе с неравенством $D^+m(t) \geq 0$ приводит к заключению, что $D^+m(t) = 0$ при всех $t \in [t_0, t^*]$. Это противоречит условию $D^+m(\hat{t}) > 0$ для $\hat{t} \in [t_0, t^*]$ и поэтому верна оценка (2.27). Так как $\rho(t,x(t)) < \varepsilon$ при $t \in [t_0, \tau_1)$, соотношение $D^+m(t) = 0$ при $t \in [t_0, \tau_1)$ следует из того, что $D^+m(t) = 0$ при $t \in [t_0, t^*]$. Поэтому

$$V(t,x(t),\theta) \leq m(t) = m(t_0) \leq \lambda_M(A_2)w_2(\delta) \tag{2.29}$$

и далее $\lambda_m(A_1)w_1(\rho(t_1, x(t_1))) \leq V(t_1, x(t_1), \theta) \leq (1+b_1)V(t_1^-, x(t_1^-), \theta) \leq (1+b_1) \times \times \lambda_M(A_2)w_2(\delta) < \lambda_m(A_1)w_1(\varepsilon)$. Отсюда следует, что $\rho(t_1, x(t_1)) < \varepsilon$.

Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, нетрудно показать, что $\rho(t,x(t)) < \varepsilon$ при $t \in [\tau_1, \tau_2)$. Переходя к пределу в соотношении

$$V(\tau_k, x(\tau_k), \theta) \leq (1+b_k)V(\tau_k^-, x(\tau_k^-), \theta) \leq (1+b_k)\ldots(1+b_1)\lambda_M(A_2)w_2(\delta)$$

при $k \to \infty$, находим, что $\rho(t,x(t)) < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

Этим теорема 2.7 доказана.

Далее установим условия равномерной асимптотической устойчивости гибридной системы (2.17) относительно двух мер.

Теорема 2.8. *Предположим, что движение системы* (2.17) *равномерно устойчиво относительно двух мер. Пусть выполняются условия:*

(1) *существуют функции сравнения* $\overline{w}_i \in K$*-классу,* $i = 1, 2$*, и постоянные симметрические* 2×2*-матрицы* A_1, A_2 *такие, что для функции* (2.22) *верны оценки*

$$\overline{w}_1^{\mathrm{T}}(\rho)A_1\overline{w}_1(\rho) \leq V(t,x,\theta) \leq \overline{w}_2^{\mathrm{T}}(\rho)A_2\overline{w}_2(\rho), \tag{2.30}$$

как только $\rho(t,x) < H$*,* $H = \mathrm{const} > 0$*;*

(2) *существуют функции* $\psi_k \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$*,* $\psi_k(s) \geq s$*,* $k = 1, 2, \ldots$*, такие, что*

$$V(\tau_k, x + I_k(x), \theta) \leq \psi_k(V(\tau_k^-, x, \theta))$$

как только $\rho(t,x) < H$, функции $\psi_k(s)/s$ не убывают при $s > 0$ и при любом $\varkappa > 0$ существует постоянная $Q > 0$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\psi_k(\varkappa)/\varkappa - 1] = Q < +\infty;$$

(3) *существуют симметрическая 2×2-матрица $A_3(t)$, момент t^*, функции сравнения $\overline{w}_3 \in K$-классу и функции $g_i(t) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $i = 1,2$, такие, что*

$$D^+V(t,x(t),\theta)\big|_{(2.17)} \le -\overline{w}_3^{\mathrm{T}}(\rho)A_3(t)\overline{w}_3(\rho) + g^{\mathrm{T}}(t)g(t) \tag{2.31}$$

для значений $t \ge t^*$, как только $\rho(t,x) < H$ и $P(V(t,x(t),\theta)) > V(t+s,x(t+ + s),\theta)$, $-\tau \le s \le 0$, где $P \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $P(s) > 0$ при $s > 0$;

(4) *для заданного $\eta > 0$ существует функция $w \in K$-классу такая, что*

$$\overline{w}_3^{\mathrm{T}}(\rho)A_3(t)\overline{w}_3(\rho) \ge \lambda_m(t)w(\eta) \ge 0 \tag{2.32}$$

при $\rho(t,x) \ge \eta$, где $\lambda_m(t) = \lambda_m(A_3(t))$ — минимальное собственное значение матрицы $A_3(t)$;

(5) *для любых значений $\eta > 0$ из условия (4) и функций $g(t)$ выполняются соотношения*

$$\lim_{p\to\infty}\inf_{t\ge 0}\int\limits_t^{t+p}\lambda_m(s)ds = \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{\infty} g^{\mathrm{T}}(s)g(s)ds = \Theta < +\infty.$$

Тогда, если матрицы A_1, A_2 и $A_3(t)$ положительно определенные, то движение системы (2.17) *асимптотически равномерно устойчиво относительно мер (ρ_0,ρ).*

Доказательство. Преобразуем вначале некоторые условия теоремы 2.8 к виду, удобному для дальнейших построений. Из условия (1) получаем

$$\lambda_m(A_1)w_1(\rho) \le V(t,x,\theta) \le \lambda_M(A_2)w_2(\rho), \tag{2.33}$$

где $w_1(\rho) \le \overline{w}_1^{\mathrm{T}}(\rho)\overline{w}_1(\rho)$ и $w_2(\rho) \ge \overline{w}_2^{\mathrm{T}}(\rho)\overline{w}_2(\rho)$ при $\rho(t,x) < H$, $w_1, w_2 \in K$-классу Хана. Из того, что движение системы равномерно устойчиво относительно двух мер ρ_0 и ρ, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, не зависящее от t_0, такое, что $\rho(t,x(t)) < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$ как только $\rho_0(t_0,\varphi) < \delta$. Из оценки (2.33) для любого значения $t \ge t_0$ получим оценку

$$V(t,x(t),\theta) < \lambda_M(A_2)w_2(\varepsilon). \tag{2.34}$$

Далее для любого значения $\beta \in (0,\varepsilon)$ выберем $\gamma > 0$ из условия

$$0 < 2\gamma < \min\{\lambda_m(A_1)w_1(\beta), \quad \inf[P(s) - s]\}, \quad \Phi_1(\beta) \le s \le \Phi_2(\varepsilon),$$

где $\Phi_1(\beta) = \frac{1}{2}\lambda_m(A_1)w_1(\beta)$, $\Phi_2(\varepsilon) = \lambda_M(A_2)w_2(\varepsilon)$. Из условия (2) следует, что существует $k^* \in \mathbb{N}_+$ такое, что

$$\sum_{k=k^*}^{\infty}[\psi_k(\varkappa)/\varkappa - 1] < \frac{\gamma}{2\Phi_2(\varepsilon)}.$$

Из условия (5) теоремы 2.8 следует, что существует значение времени $\hat{t} > 0$ такое, что

$$\int\limits_{t_0+\hat{t}}^{\infty} g^{\mathrm{T}}(s)g(s)ds < \frac{1}{2}\gamma.$$

Из условий (1), (5) следует, что существует $\tilde{t} > 0$ такое, что при всех $t \geq \tilde{t}$ и $\eta = \lambda_M^{-1}(A_2)w_2^{-1}(\lambda_m(A_1)w_1(\beta))$ выполняется неравенство

$$\int\limits_t^{t+\tilde{t}} \lambda_m(s)ds > \Theta + \Phi_2(\varepsilon)(1+Q).$$

Пусть n — первое положительное число, для которого

$$\Phi_2(\varepsilon) \leq 2\Phi_1(\beta) + n\gamma. \tag{2.35}$$

Нетрудно показать, что при любом $i = 1, 2, \ldots, n$ верна оценка

$$V(t, x(t), \theta) \leq \Phi_2(\varepsilon) + (n-i)\gamma \tag{2.36}$$

при всех $t \geq t_0 + t_{k^*} + \hat{t} + i(\tilde{t} + \tau)$. Действительно, для любого $t \in [\tau_k + \tau, \tau_{k+1}]$ имеет место неравенство

$$\begin{gathered} P(V(t,x(t),\theta)) > V(t,x(t),\theta) + 2\gamma \geq \lambda_m(A_1)w_1(\beta) + (n-k-2)\gamma + 2\gamma \geq \\ \geq 2\Phi_1(\beta) + (n-k)\gamma \geq V(t+s, x(t+s), \theta) \end{gathered}$$

при любом $s \in [-\tau, 0]$. Согласно условий (3), (4) теоремы 2.8, для величины η, определенной выше, получим

$$D^+V(t, x(t), \theta) \leq -\lambda_m(t)w(\eta) + g^{\mathrm{T}}(t)g(t) \tag{2.37}$$

при всех $t \in [\tau_k + \tau, \tau_{k+1}]$. Отсюда, интегрируя неравенство (2.37) от $\tau_k + \tau$ до τ_{k+1}, получим

$$V(\tau_{k+1}, x(\tau_{k+1}), \theta) \leq \Phi_2(\varepsilon)(1+Q) - w(\eta) \int\limits_{\tau_k+\tau}^{\tau_k+\tau+\tilde{t}} \lambda_m(s)ds + \Theta < 0,$$

что противоречит оценке (2.33), поэтому неравенство (2.36) выполняется.

Аналогично можно показать, что для всех $t > t^* \in [\tau_k + \tau, \tau_{k+1}]$ выполняется оценка

$$V(t, x(t), \theta) < 2\Phi_1(\beta) + (n-k-1)\gamma. \tag{2.38}$$

Поэтому

$$\lambda_m(A_1)w_1(\rho(t, x(t))) \leq V(t, x(t), \theta) \leq \lambda_m(A_1)w_1(\beta) \tag{2.39}$$

при всех $t \geq \tau_n = t_0 + t^*$, т.е. $\rho(t, x(t)) \leq \beta$ при всех $t \geq \tau_N = t_0 + t^*$, где $t^* = t_{k^*} + \hat{t} + n(\tilde{t} + \tau)$ не зависит от t_0.

Этим теорема 2.8 доказана.

Пример 2.5 [113]**.** Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) + b(t)x(t-\tau) + \int\limits_{-\infty}^{t} c(t,s,x(s))ds, \quad t \geq t_0, \quad t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k) = (1+b_k)x(\tau_k^-), \quad k \in \mathbb{N}_+, \\ x(t_0) = \varphi, \quad \varphi \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}), \end{gathered}$$

где $a(t), b(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $c(t, s, x) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $b_k > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$.

Если выполняются условия:

(1) существует функция $q(t) \in L^1[0, +\infty)$ такая, что $|c(t, s, x)| \leq a(t)q(t-s)|x|$ при всех $(t, s, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(2) существует постоянная $\alpha \geq 0$ такая, что $|b(t)| \leq \alpha a(t)$, $\alpha + \int\limits_0^\infty q(s)ds < 1$;

(3) $\lim\limits_{T\to\infty} \inf\limits_{t\geq 0} \int\limits_t^{t+T} a(s)ds = +\infty$,

тогда решение $x(t)$ равномерно асимптотически устойчиво относительно двух мер ρ_0 и ρ, где $\rho_0(t, x(t)) = |x(t)| = \sup\limits_{-\tau\leq s\leq 0} |x(t+s)|$ и $\rho(t, z(t)) = \|x(t)\|$, $z(t) = (x(t), x(\tau_k))^{\mathrm{T}}$.

2.7. Условия существования периодических движений.

В этом разделе будем рассматривать систему уравнений (2.17) и установим условия ограниченности движений, которые описываются этой системой уравнений.

Принимая во внимание некоторые результаты монографий [55, 117], приведем следующее определение.

Определение 2.4. Решения системы (2.17):

B_1. Равномерно ограничены, если для некоторой постоянной $B_1 > 0$ существует постоянная $B_2 = B_2(B_1) > 0$ такая, что решение $x(t, t_0, \varphi)$ системы (2.17) удовлетворяет оценке $\|x(t, t_0, \varphi)\| \leq B_2$ при всех $t \geq t_0$, если только $|\varphi| \leq B_1$, где $\varphi \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$;

B_2. Равномерно предельно ограничены с границей B в точке $t = 0$, если они равномерно ограничены и для любого значения $B_3 > 0$ существует значение $T = T(B_3) > 0$ такое, что $\|x(t, t_0, \varphi)\| \leq B$ при всех $t \geq t_0 + T$, как только $|\varphi| \leq B_3$ для любых $\varphi \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

Далее в правой части уравнений (2.17) будем предполагать следующее:

H_1: существует $T \in \mathbb{R}_+$ такое, что $f(t + T, \psi) = f(t, \psi)$ для любых $\psi \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ и $t \in \mathbb{R}_+$;

H_2: существует положительное число $q \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\tau_{k+q} = \tau_k + T$ и $I_{k+q}(x) = I_k(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}_+$.

Напомним одну теорему о неподвижной точке отображения в банаховом пространстве.

Лемма 2.1. (см. [111]). *Пусть $S_0 \subset S_1 \subset S_2$ — выпуклые подмножества в банаховом пространсве X, где S_0 и S_2 компактны и S_1 открыто относительно S_2. Пусть $P\colon S_2 \to X$ — такое непрерывное отображение, что для некоторого целого числа $m > 1$ выполняются включения:*

(а) $P^j(S_1) \subset S_2$, $1 \leq j \leq m-1$ и

(б) $P^j(S_1) \subset S_0$, $m \leq j \leq 2m-1$.

Тогда отображение P имеет неподвижную точку в S_0.

Теорема 2.9. (cf. [111]). *Если в системе с последействием* (2.17) *отсутствуют импульсные возмущения, выполняется условие H_1 и решение $x(t)$ равномерно ограничено и равномерно предельно ограничено с границей B в точке $t = 0$, то система* (2.17) *имеет T-периодическое решение.*

Обозначим множества функций:

$$S_0 = \{\varphi \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)\colon \quad |\varphi| \leq B, \quad |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq L\|u - v\|, \quad u, v \in [\tau_{k-1}, \tau_k)\}\,;$$
$$S_2 = \{\varphi \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)\colon \quad |\varphi| \leq B_2, \quad |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq L\|u - v\|, \quad u, v \in [\tau_{k-1}, \tau_k)\}\,;$$
$$S_1 = \{\varphi \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)\colon \quad |\varphi| < B_1 + 1\} \cap S_2.$$

Применяя лемму 2.1 для отображения $P\colon S_2 \to PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, определенного соотношением

$$P_\varphi = x(s + T, 0, \varphi) \quad \text{при} \quad \varphi \in S_2, \quad -\tau \leq s \leq 0,$$

нетрудно показать, что система (2.17) имеет T-периодическое решение и ее любое решение равномерно предельно ограничено с границей B в точке $t = 0$.

Предположим, что для системы (2.17) построена функция $V_2(t,x)$ в виде (2.19), удовлетворяющая условию B_2, и установим условия равномерной предельной ограниченности ее решений.

Теорема 2.10. *Пусть для системы* (2.17) *существуют функция* $V_2(t,x)$, *функции сравнения* $\overline{w}_1, \overline{w}_2 \in KR$*-классу и постоянные симметрические* 2×2*-матрицы* A_i, $i=1,2$, *такие, что:*

(1) $\overline{w}_1^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_1\overline{w}_1(\|x\|) \le V_2(t,x) \le \overline{w}_2^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_2\overline{w}_2(\|x\|)$;

(2) *существуют постоянная* $H^* > 0$, *симметрическая* 2×2*-матрица* $A_3(t)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$, *максимальное собственное значение которой* $\lambda_M(t) = \lambda_M(A_3(t))$ — *локально интегрируемая функция, и функция сравнения* $\overline{G}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^2$ *такая, что*

$$D^+V_2(t,x(t)) \le \overline{G}^{\mathrm{T}}(V_2(t,x(t)))A_3(t)\overline{G}(V_2(t,x(t))),$$

если только $V_2(t,x(t)) \ge H^*$ *и* $V_2(s,x(s)) \le \psi^{-1}(V_2(t,x(t)))$ *при всех* $t \ge t_0$ *и* $t-\tau \le s \le t$, *где* $\psi \in K_1$*-классу;*

(3) *при всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $k \in \mathbb{N}_+$ *верна оценка* $V_2(\tau_k, x + I_k(x)) \le \psi(V_2(\tau_k^-, x))$;

(4) *существуют постоянные* $\lambda_2 \ge \lambda_1 > 0$ *и* $\varkappa > 0$ *такие, что при всех* $k \in \mathbb{N}_+$ *и* $\mu > 0$

$$\lambda_1 \le \tau_k - \tau_{k-1} \le \lambda_2, \qquad \int\limits_{\psi(\mu)}^{\mu} \frac{du}{G(u)} - \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \lambda_M(s)ds \ge \varkappa,$$

где $G(u)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *и* $G(V_2) \ge \overline{G}^{\mathrm{T}}(V_2)\overline{G}(V_2)$.

Тогда, если матрицы A_1, A_2 — *положительно определенные, то решения* $x(t)$ *системы* (2.17) *равномерно предельно ограничены.*

Доказательство. Условие (1) теоремы 2.9 представим в виде

$$\lambda_m(A_1)w_1(\|x\|) \le V_2(t,x) \le \lambda_M(A_2)w_2(\|x\|),$$

где $\lambda_m(A_1), \lambda_M(A_2)$ — минимальное и максимальное собственные значения матриц A_1 и A_2, соответственно; $w_1, w_2 \in KR$-классу Хана.

Установим, что решения системы (2.17) предельно ограничены. Выберем $B_1 \ge \lambda_M^{-1}(A_2)w_2^{-1}(H^*)$ и для любого $t_0 \ge 0$ пусть $|\varphi| \le B_1$. Пусть B_2 выбрано так, что $\lambda_m(A_1)w_1(B_2) = \psi^{-1}(\lambda_M(A_2)w_2(B_1))$. Для решения $x(t) = x(t,t_0,\varphi)$ и функции $V_2(t,x(t))$ имеем оценки

$$\begin{aligned}\lambda_m(A_1)w_1(\|x(t)\|) \le V_2(t,x(t)) \le \lambda_M(A_2)w_2(\|x(t)\|) \le \lambda_M(A_2)w_2(B_1) <\\ < \psi^{-1}(\lambda_M(A_2)w_2(B_1)) = \lambda_m(A_1)w_1(B_2) \quad \text{при} \quad t_0-\tau \le t \le t_0.\end{aligned}$$

Покажем, что

$$V_2(t,x(t)) \le \psi^{-1}(\lambda_M(A_2)w_2(B_1)) \tag{2.40}$$

при всех $t_0 \le t \le \tau_1$. Если неравенство (2.40) не выполняется, тогда найдется $\overline{t} \in (t_0, \tau_1)$ такое, что

$$V_2(\overline{t}, x(\overline{t})) > \psi^{-1}(\lambda_M(A_2)w_2(B_1)) > \lambda_M(A_2)w_2(B_1) \ge V_2(t_0, x(t_0)).$$

Очевидно найдется $\hat{t} \in (t_0, \overline{t})$ такое, что

$$V_2(\hat{t}, x(\hat{t})) = \psi^{-1}(\lambda_M(A_2)w_2(B_1)) \quad \text{и} \quad V_2(t,x(t)) \le \psi^{-1}(\lambda_M(A_2)w_2(B_1))$$

при $t_0 - \tau \le t \le \hat{t}$. В таком случае должно существовать $\check{t} \in [t_0, \hat{t})$ такое, что при всех $\check{t} \le t \le \hat{t}$ выполняются соотношения

$$V_2(\check{t}, x(\check{t})) = \lambda_M(A_2)w_2(B_1) \quad \text{и} \quad V_2(t,x(t)) \ge \lambda_M(A_2)w_2(B_1).$$

Следовательно, при всех $t \in [\check{t}, \hat{t}]$ верны оценки $V_2(t, x(t)) \geq H^*$ и

$$V_2(s, x(s)) \leq \psi^{-1}(\lambda_M(A_2) w_2(B_1)) \leq \psi^{-1}(V_2(t, x(t))), \quad t - \tau \leq s \leq t.$$

Согласно условия (2) теоремы 2.9 имеем

$$D^+ V_2(t, x(t)) \leq \lambda_M(A_3(t)) G(V_2(t, x(t))), \tag{2.41}$$

где $G\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что $G(V_2) \geq \overline{G}^{\mathrm{T}}(V_2)\overline{G}(V_2)$, $G(0) = 0$ и $G(s) > 0$ при $s > 0$. Из оценки (2.41) следует, что

$$\int\limits_{V_2(\check{t})}^{V_2(\hat{t})} \frac{du}{G(u)} \leq \int\limits_{\check{t}}^{\hat{t}} \lambda_M(A_3(s)) ds \leq \int\limits_{t_0}^{t_1} \lambda_M(A_3(s)) ds. \tag{2.42}$$

Из условия (4) теоремы 2.9 следует, что

$$\int\limits_{V_2(\check{t})}^{V_2(\hat{t})} \frac{du}{G(u)} = \int\limits_{\lambda_M(A_2) w_2(B_1)}^{\psi^{-1}(\lambda_M(A_2) w_2(B_1))} \frac{du}{G(u)} \geq \int\limits_{t_0}^{t_1} \lambda_M(A_3(s)) ds + \varkappa > \int\limits_{V_2(\check{t})}^{V_2(\hat{t})} \frac{du}{G(u)}.$$

Это противоречие доказывает, что оценка (2.40) верна. Поэтому

$$V_2(t_1, x(t_1)) \leq \psi(V_2(t_1^-, x(t_1^-))) \leq \lambda_M(A_2) w_2(B_1). \tag{2.43}$$

Аналогичным способом можно показать, что

$$V_2(t, x(t)) \leq \psi^{-1}(\lambda_M(A_2) w_2(B_1)) \tag{2.44}$$

при $t_1 \leq t < t_2$ и $V_2(t_2, x(t_2)) \leq \lambda_M(A_2) w_2(B_1)$.

По индукции имеем

$$\begin{aligned} &V_2(t, x(t)) \leq \psi^{-1}(\lambda_M(A_2) w_2(B_1)), \quad t_{i+1} \leq t < t_{i+2}, \\ &V_2(t_{i+2}, x(t_{i+2})) \leq \lambda_M(A_2) w_2(B_1), \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_m(A_1) w_1(\|x(t)\|) \leq V_2(t, x(t)) \leq \psi^{-1}(\lambda_M(A_2) w_2(B_1)) = \lambda_m(A_1) w_1(B_2) \tag{2.45}$$

при всех $t \geq t_0$. Этим доказана равномерная ограниченность решения $x(t)$.

Доказательство равномерной предельной ограниченности проводится для величины $B = \lambda_m^{-1}(A_1) w_1^{-1}(\psi^{-1}(\psi^{-1}(H^*)))$ и $B_3 \geq \lambda_M^{-1}(A_2) w_2^{-1}(H^*)$ по схеме доказательства из работы [113].

Пример 2.6 [113]. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = a(t) x(t) + b(t) x(t - \tau), \quad t \geq 0, \quad t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k) = c x(\tau_k^-), \quad k \in \mathbb{N}_+, \end{gathered} \tag{2.46}$$

где $\tau > 0$, $a(t), b(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $a(t) \leq \overline{a}$, $b(t) \leq \overline{b}$, $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}$; для некоторого $T > 0$ $a(t + T) = a(t)$, $b(t + T) = b(t)$, и $t_{k+q} = t_k + T$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < \tau_1 < < \tau_2 < \ldots < \tau_k$, $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Если выполняются условия:

(1) $0 < c < 1$ и $\overline{a} + \sqrt{2}\,\overline{b} c^{-1} > 0$;

(2) $\tau_k - \tau_{k-1} < (-\ln c/2)(\overline{a} + \sqrt{2}\,\overline{b} c^{-1})^{-1}$ при всех $k \in \mathbb{N}_+$,

тогда решения $x(t)$ уравнения (2.46) равномерно предельно ограничены и T-периодические.

Известно (см. [69]), что если $a(t) \equiv a > 0$ — const и $b(t) \equiv b > 0$ — const, тогда решения уравнения

$$\frac{dy}{dt} = ay(t) + by(t - \tau) \tag{2.47}$$

неограничены при любых начальных функциях $\varphi \not\equiv 0$ и, следовательно, уравнение (2.47) не имеет ненулевого периодического решения. Таким образом, импульсные возмущения стабилизируют решения уравнения (2.47), которые становятся T-периодическими.

§3. BE-модель гибридных систем в метрическом пространстве.

Более общими, по сравнению с предыдущими двумя классами гибридных систем, являются гибридные системы, которые состоят из разнородных подсистем, объединенных операторами связи (см. [6, 37, 39, 86, 91] и др.). Концепция обобщенного времени (см. [97, 99]) позволила унифицировать многие результаты в этом направлении путем рассмотрения обобщенной гибридной системы в метрическом пространстве (см. [99]).

В данном разделе, в соответствии с концепцией этого обзора, рассматриваются гибридные системы со слабым взаимодействием подсистем, которые описываются уравнениями в банаховом пространстве (BE-модели).

3.1. Предварительные сведения.

Доказательства утверждений, приведенных в этом разделе, имеются в монографиях [52, 53, 56, 69, 72, 73].

Обозначим через $\mathbb{X}$ или $\mathbb{Z}$ банахово пространство. Пусть линейный оператор A определен в области $\mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X}$ с рангом в $\mathbb{Z}$, т.е. $A\colon \mathcal{D}(A) \to \mathbb{Z}$. Предположим, что $\mathcal{D}(A)$ является плотным линейным подпространством $\mathbb{X}$. Оператор A является замкнутым, если его граф $Gr(A) = \{(x, Ax) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Z}\colon\ x \in \mathcal{D}(A)\}$ — замкнутое подмножество в произведении $\mathbb{X} \times \mathbb{Z}$. Для заданного линейного отображения $A\colon \mathcal{D}(A) \to \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X}$, его норма определяется выражением

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|\colon\ \|x\| = 1\}$$

и $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A.

Предположим, что некоторый физический процесс описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{3.1}$$

$$x(0) = x_0 \in \mathcal{D}(A) \tag{3.2}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Абстрактная задача Коши (3.1), (3.2) корректно определена, если $\rho(A) \neq \varnothing$ и для любого $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ существует единственное решение $x\colon [0, \infty) \to \mathcal{D}(A)$ в пространстве $C^1([0, \infty), \mathbb{X})$.

Семейство $(Q(t))_{t \geq 0}$ ограниченных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathbb{X}$, является строго непрерывной полугруппой ограниченных линейных операторов (C_0-полугруппой), если выполняются следующие условия:

(*а*) $Q(0) = I$, I — тождественный оператор на $\mathbb{X}$;

(*б*) $Q(t)Q(s) = Q(t+s)$ при всех $t, s \geq 0$;

(*в*) $\lim\limits_{t \downarrow 0} \|Q(t)x - x\| = 0$ при всех $x \in \mathbb{X}$.

Инфинитезимальный генератор полугруппы $(Q(t))_{t \geq 0}$ является линейным оператором A с областью определения

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{x \in \mathbb{X}\colon\ \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(Q(t)x - x) \quad \text{существует}\Big\}$$

в виде $Ax = \lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(Q(t)x - x), \quad x \in \mathcal{D}(A)$.

Наряду с задачей (3.1), (3.2) будем рассматривать нелинейную абстрактную задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(x(t)), \tag{3.3}$$

$$x(0) = x_0 \in \mathcal{D}(A), \tag{3.4}$$

где $A\colon\ \mathcal{D}(A) \to \mathbb{X}$ — нелинейное отображение. Предположим, что решение $x(t)$ этой задачи корректно определено и существует на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Пусть $\mathcal{C}$ — подмножество банахового пространства $\mathbb{X}$. Семейство $(Q(t))_{t\geq 0}$ операторов, отображающих $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}$, является нелинейной полугруппой на $\mathcal{C}$, если отображение $Q(t)x$ является непрерывным по (t, x) на произведении $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}$, $Q(0)x = x$ и $Q(t+s)x = Q(t) \times Q(s)x$ для любого фиксированного $x \in \mathcal{C}$ при $(t, s) \in \mathbb{R}_+$.

Нелинейная полугруппа $Q(t)$ является квазисжимающей, если существует число $w \in \mathbb{R}$ такое, что $\|Q(t)x - Q(t)y\| \leq e^{wt}\|x - y\|$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и всех $x, y \in \mathcal{C}$.

3.2. Постановка задачи об устойчивости.

При постановке задачи о μ-устойчивости решений гибридной системы здесь учитываются результаты статей [17, 80]. Заметим, что подобная задача рассматривалась в монографии [98] при условии, что $\mu = 1$ в системе (3.6).

Предположим, что для уравнения (3.3) линейная (или нелинейная) полугруппа $Q(t)$ определена на подпространстве $\mathcal{C} \in \mathbb{X}$. Пусть точка $0 \in \operatorname{int}\mathcal{C}$ и $Q(t)$ допускает тривиальное решение $Q(t)x = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $x = 0$.

Определение 3.1. Тривиальное решение $Q(t)x = 0$ уравнения (3.3) является устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|Q(t)x\| < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, как только $\|x\| < \delta$ при $x \in \mathcal{C}$.

Определения других типов устойчивости тривиального решения $Q(t)x = 0$ уравнения (3.3) вводятся аналогично тому, как это сделано для конечномерного случая с учетом определения 3.1.

Далее рассмотрим нелинейные уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.5}$$

и предположим, что соответствующая им абстрактная задача Коши корректно определена. Пусть полугруппа $Q_i(t)$ определена на $\mathcal{C}_i \subset \mathbb{Z}_i$ и точка $0 \in \operatorname{int}\mathcal{C}_i$ при любом $i = 1, 2, \ldots, m$. Область $\mathcal{D}(f_i)$ предполагается плотной в $\mathcal{C}_i$ и функции f_i являются генераторами полугрупп $Q_i(t)$.

С помощью операторов $g_i(x, \mu)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ($\mu \in M = = (0, 1]$ — малый положительный параметр), определенных на $\mathcal{D}(g_i) \times M \subset \mathbb{X}$ и имеющих ранг в $\mathbb{Z}_i$, уравнения (3.5) объединим в систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i) + g_i(x, \mu), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.6}$$

В частности, операторы $g_i(x, \mu)$ могут иметь вид

(А) $g_i(x, \mu) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \mu^s G_{is}(x_1, \ldots, x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, m;$

(Б) $g_i(x, \mu) = \sum\limits_{s=1}^{N-1} \mu^s G_{is}(x_1, \ldots, x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, m;$

(В) $g_i(x, \mu) = \mu G_i(x_1, \ldots, x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$

Операторы G_{is} предполагаются определенными на $\mathcal{D}(G_{is}) \subset \mathbb{X}$ (на $\mathcal{D}(G_i) \subset \mathbb{X}$) и имеющие ранг в $\mathbb{Z}_i$. Здесь $x_i \in \mathbb{Z}_i$ и гипервектор $x^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$ является точкой в произведении пространств

$$\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{Z}_i$$

с нормой $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{m} \|x_i\|_i$.

Система уравнений (3.6) эквивалентна уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) + g(x,\mu) \triangleq A(x,\mu), \\ x(0) &= x_0 \in \mathcal{D}(f + g(x,\mu)), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $f^{\mathrm{T}}(x) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m))$, $g^{\mathrm{T}}(x,\mu) = (g_1(x,\mu), \dots, g_m(x,\mu))$.

Система (3.6) является гибридной системой со слабовзаимодействующими подсистемами (3.5). Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f + g(x,\mu)) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g(x,\mu)) = \\ = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g_1(\mu)) \cap \mathcal{D}(g_2(\mu)) \cap \ldots \cap \mathcal{D}(g_m(\mu)). \end{aligned}$$

Кроме того, предполагается, что уравнение (3.7) корректно определено, вектор-функция $f(x)+g(x,\mu)$ генерирует полугруппу $Q(t)$ и область $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(f(x)+g(x,\mu)) \cap \mathcal{D}(f_s) \cap \mathcal{D}(f(x) + g(x,\mu))_s$ является плотной в $\mathbb{X}$.

Наша цель — указать способ анализа μ-устойчивости нулевого решения гибридной системы (3.6) на основе обобщенного прямого метода Ляпунова.

3.3. Обобщенный прямой метод Ляпунова.

Двухиндексная система функций как среда, подходящая для построения функции Ляпунова, первоначально рассматривалась в работах [62, 78, 81, 83, 84] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнений в банаховом пространстве матричная функция применялась в работах [20, 80]. Теоремы 3.1 – 3.8 являются аналогами классических теорем общей теории устойчивости и новыми для данного класса гибридных систем. В работах [10, 74, 75, 96] имеются некоторые подходы к анализу устойчивости решений уравнений в банаховом пространстве, которые могут быть обобщены для гибридных систем.

Вместе с гибридной системой (3.6) будем рассматривать двухиндексную систему функций

$$U(x) = [u_{ij}(x)], \quad i,j = 1,2,\dots,s, \quad s \le m, \tag{3.8}$$

с элементами $u_{ii}\colon \mathbb{Z}_i \to \mathbb{R}_+$ и $u_{ij}\colon \mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}_j \to \mathbb{R}$ при всех $i \ne j$. Пусть $\theta \in \mathbb{R}^s_+$, $\theta_i > 0$ и функция

$$v(x,\theta) = \theta^{\mathrm{T}} U(x) \theta \tag{3.9}$$

удовлетворяет условиям:

(1) существует окрестность $W \in \mathbb{X}$ точки $0 \in \operatorname{int}\mathcal{C}$ такая, что $v\colon W \to \mathbb{R}_+$;

(2) функция $v(x,\theta)$ непрерывна по $x \in W$ и $v(x,\theta) = 0$, если и только если $x = 0$;

(3) существует предел

$$\lim_{t \to 0^+} \sup \frac{v(Q(t)x,\theta) - v(x,\theta)}{t} = Dv(x(t),\theta)$$

вдоль траектории $x(t) = Q(t)x_0$ системы (3.7).

Функцию (3.9) будем называть функцией Ляпунова для гибридной системы (3.6), если она удовлетворяет условиям (1) – (3) и разрешает задачу об устойчивости (неустойчивости) нулевого решения $Q(t)x = 0$ системы (3.6).

Заметим, что элементы $u_{ii}(x)$, $i = 1,2,\dots,s$, матричной функции (3.8) строятся на основе уравнений (3.5) или их линейного приближения, а элементы $u_{ij}(x_i,x_j)$ при $(i \ne j) \in [1,s]$ — с учетом операторов связи $g_i(x,\mu)$ либо на основе рассмотрения пар подсистем

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i), \quad \frac{dx_j}{dt} = f_j(x_j)$$

при $(i \neq j) \in [1, s]$. В целом этот подход упрощает проблему построения подходящей функции (функционала) Ляпунова для гибридной системы (3.6).

Приведем основные теоремы обобщенного прямого метода Ляпунова для гибридной системы (3.6).

Теорема 3.1. *Если при некотором натуральном $s \leq m$ функция $v(x, \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^s_+$, является функцией Ляпунова и существует функция сравнения φ_1, принадлежащая K-классу Хана, такая, что $v(x, \theta) \geq \varphi_1(\|x\|)$ в окрестности W точки $0 \in \operatorname{int} \mathcal{C}$, и если $Dv(x, \theta)|_{(3.6)} \leq 0$ при всех $x \in W$ и $\mu < \mu^* \in M$, то тривиальное решение $Q(t)x = 0$ системы (3.6) μ-устойчиво.*

Теорема 3.2. *Если при некотором натуральном $s \leq m$ для функции $v(x, \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^s_+$, существуют три функции сравнения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ класса Хана такие, что $\varphi_1(\|x\|) \leq v(x, \theta) \leq \varphi_2(\|x\|)$ в окрестности W точки $0 \in \operatorname{int} \mathcal{C}$, и $Dv(x, \theta)|_{(3.6)} \leq$ $\leq -\varphi_3(\|x\|)$ при всех $x \in W$ и $\mu < \mu^* \in M$, то тривиальное решение $Q(t)x = 0$ системы (3.6) равномерно асимптотически μ-устойчиво.*

Теорема 3.3. *Если в условиях теоремы 3.2 $W = \mathcal{C} = \mathbb{X}$ и функция сравнения φ_1 принадлежит KR-классу Хана, то тривиальное решение $Q(t)x = 0$ системы (3.6) равномерно асимптотически μ-устойчиво в целом.*

Теорема 3.4. *Если в условиях теоремы 3.2 функции сравнения φ_2, φ_3 принадлежат K-классу Хана и имеют одинаковый порядок роста, существуют положительная постоянная Δ_1 и целое число p такие, что*

$$\Delta_1 \|x\|^p \leq v(x, \theta) \leq \varphi_2(\|x\|),$$

то тривиальное решение $Q(t)x = 0$ системы (3.6) экспоненциально μ-устойчиво.

Теорема 3.5. *Если в условиях теоремы 3.2 $W = \mathcal{C} = \mathbb{X}$ и в условиях теоремы 3.4 функции сравнения φ_2, φ_3 принадлежат KR-классу Хана и имеют одинаковый порядок роста, то тривиальное решение $Q(t)x = 0$ системы (3.6) экспоненциально μ-устойчиво в целом.*

Теорема 3.6. *Пусть при некотором натуральном $s \leq m$ для функции $v(x, \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^s_+$, существует функция сравнения φ из K-класса Хана такая, что $-Dv(x, \theta)|_{(3.7)} \geq \varphi(\|x\|)$ в окрестности $W \subset \mathcal{C}$ точки $0 \in \operatorname{int} \mathcal{C}$ при любом $\mu \in M$. Если в любой окрестности $N \subset \mathcal{C}$ точки $0 \in \operatorname{int} \mathcal{C}$ существует хотя бы одна точка $x_0 \in N$, в которой $v(x_0, \theta) < 0$, то тривиальное решение $Q(t)x = 0$ системы (3.6) μ-неустойчиво.*

Теорема 3.7. *Пусть $\mathcal{C} = \mathbb{X}$ и $S = \{x \in \mathbb{X}\colon \|x\| \geq r\}$, где r может быть достаточно большим. Если при некотором натуральном $s \leq m$ для функции $v(x, \theta)\colon S \to \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}^s_+$, существуют две функции сравнения φ_1, φ_2 из KR-класса Хана такие, что $\varphi_1(\|x\|) \leq v(x, \theta) \leq \varphi_2(\|x\|)$ при всех $x \in S$, и если $Dv(x, \theta)|_{(3.6)} \leq 0$ при всех $x \in S$ и $\mu < \mu^* \in M$, то траектория $Q(t)x_0$ системы (3.6) равномерно μ-ограничена.*

Теорема 3.8. *Пусть выполняются условия теоремы 3.7 и существует функция сравнения φ_3 из K-класса Хана такая, что $Dv(x, \theta)|_{(3.7)} \leq -\varphi_3(\|x\|)$ при всех $x \in S$ и $\mu < \mu^* \in M$. Тогда траектория $Q(t)x_0$ системы (3.6) равномерно предельно μ-ограничена.*

Конструктивное применение теорем 3.1 − 3.8 связано с решением задачи построения функции (3.9) со свойствами (1), (2) и вычислением ее полной производной $Dv(x, \theta)$ вдоль траектории $x(t) = Q(t)x_0$ системы (3.7). В общем случае эта вторая задача достаточно сложная. В некоторых случаях ее решение можно упростить. А именно, если полугруппа $Q(t)$ является C_0-полугруппой или квазисжимающей полугруппой на пространстве Гильберта или на равномерно выпуклом банаховом пространстве, то инфинитезимальный генератор A_s полугруппы $Q(t)$ существует на множестве $\mathcal{D}(A_s)$, которое является плотным в $\mathcal{C}$. При этом вычисление $Dv(x, \theta)|_{(3.7)}$ упрощается.

Пара $(Q(t), v)$ является допустимой для задачи (3.6), если v — функция Ляпунова, инфинитезимальный генератор A_s полугруппы $Q(t)$ определен на множестве

$\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}(A_s)$, плотном в $\mathcal{C}$, и, кроме того, существует функция ∇v, определенная на $(W \cap \mathcal{D}_0) \times X$, со значениям в $\mathbb{R}$ такая, что

(a) $v(y) - v(x) \leq \nabla v(x, y - x) + o(\|y - x\|)$ при всех $x, y \in \mathcal{D}_0$ и

($б$) при каждом фиксированном x оператор $\nabla v(x, \theta, h)$ является ограниченным и линейным по $h \in \mathbb{X}$.

Теорема 3.9 (см. [98, p. 143–144])**.** *Пусть для системы* (3.6) *существуют допустимая пара* $(Q(t), v)$ *и функция сравнения* φ*, принадлежащая* K*-классу Хана, такая, что* $\nabla v(x, \theta, A_s x) \leq -\varphi(\|x\|)$ *при всех* $x \in \mathcal{D}_0 \cap W$*. Тогда* $Dv(x, \theta)|_{(3.6)} \leq$ $\leq -\varphi(\|x\|)$ *при всех* $x \in W$*.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{D}_0 \cap W$, тогда согласно определения функции $Dv(x, \theta)$ имеем

$$\begin{aligned} Dv(x,\theta) &= \limsup_{t \to 0^+} \frac{v(\varphi(t)x, \theta) - v(x, \theta)}{t} \leq \\ &\leq \limsup_{t \to 0^+} \frac{\nabla v(x, Q(t)x - x,\ \theta) + o(\|Q(t)x - x\|)}{t} = \\ &= \limsup_{t \to 0^+} \nabla v\big(x, (Q(t)x - x)/t,\ \theta\big) = \nabla v(x, A_s x, \theta) \leq -\varphi(\|x\|). \end{aligned}$$

Далее предположим, что $x \notin \mathcal{D}_0 \cap W$. Выберем последовательность $\{x_n\}$ в $\mathcal{D}_0$ так, что $x_n \to x$ при $n \to +\infty$. Поскольку любой элемент x_n принадлежит $\mathcal{D}_0$, при всех $t \in \mathbb{R}_+$

$$v(Q(t)x_n, \theta) - x(x_n, \theta) \leq -\int\limits_0^t \varphi(\|Q(s)x_n\|)\, ds.$$

Из непрерывности всех функций, входящих в это неравенство, следует, что

$$v(Q(t)x, \theta) - x(x, \theta) \leq -\int\limits_0^t \varphi(\|Q(s)x\|)\, ds.$$

Отсюда получаем

$$\limsup_{t \to 0^+} \frac{v(Q(t)x, \theta) - v(x, \theta)}{t} \leq \limsup_{t \to 0^+} \Big(-\frac{1}{t}\Big) \int\limits_0^t \varphi(\|Q(s)x\|)\, ds = -\varphi(\|x\|).$$

Таким образом, при всех $x \in W$ имеем оценку $Dv(x, \theta) \leq -\varphi(\|x\|)$.

Теорема 3.9 доказана.

Заметим, что наряду с функцией (3.9) в некоторых случаях имеет смысл применять векторную функцию

$$V(x, B, \theta) = BU(x)\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}^s_+, \tag{3.10}$$

где B — $(s \times s)$-постоянная матрица. Вектор-функция $V(x, B, \theta)$ имеет своими компонентами скалярные функции $v_i(x, B, \theta)$, $i = = 1, 2, \ldots, s$. Если в выражении (3.8) $u_{ij}(\cdot) = 0$ при всех $(i \neq j) \in [1, s]$, то $U(x)$ является векторной функцией, т.е. $U(x) = \mathrm{diag}\,[u_{11}(x), \ldots, u_{ss}(x)]$.

3.4. μ-Устойчивость движения гибридных систем.

В этом параграфе будем рассматривать систему (3.6) с подсистемами (3.5). Динамические свойства нулевого решения $Q_i(t)x_i = 0$ подсистем (3.5) будем характеризовать так.

Пусть для каждой подсистемы из совокупности (3.5) существуют полугруппа $Q_i(t)$ и скалярная функция $v_i(x_i)$ такие, что пара $(Q_i(t), v_i)$ является допустимой.

Предположение 3.1. Изолированная подсистема из совокупности (3.5) допускает свойство А, если для пары $(Q_i(t), v_i)$ существуют функции $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}$ из K-класса Хана и постоянные $\Delta_i > 0$ и β_i такие, что:

(1) $\psi_{i1}(\|x_i\|) \le v_i(x_i) \le \psi_{i2}(\|x_i\|)$ при всех $x_i \in \mathbb{Z}_i$, таких, что $\|x_i\| < \Delta_i$, и

(2) $\nabla v_i(x_i, {}^s\!f_i(x_i)) \le \beta_i \psi_{i3}(\|x_i\|)$ при всех $x_i \in \mathcal{D}({}^s\!f_i)$ таких, что $\|x_i\| < \Delta_i$.

Здесь ${}^s\!f_i$ — инфинитезимальный генератор полугруппы $Q_i(t)$.

Предположение 3.2. Изолированная подсистема из совокупности (3.5) допускает свойство B, если она имеет свойство A при $\Delta_i = +\infty$ и функциях сравнения ψ_{i1}, ψ_{i2} из KR-класса Хана.

Предположение 3.3. Оператор связи $g_i(x, \mu)$ между подсистемами (3.5) удовлетворяет свойству C, если при заданной допустимой паре $(Q_i(t), v_i)$ существуют функции сравнения ψ_{i3} из K-класса Хана и постоянные $b_{ij}(\mu)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, такие, что

$$\nabla v_i(x_i, g_i(x, \mu)) \le \psi_{i3}^{1/2}(\|x_i\|) \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(\mu) \psi_{j3}^{1/2}(\|x_j\|) \tag{3.11}$$

при всех $x^{\mathrm{T}} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}(f + g(x, \mu))$ и $\|x_i\| < \Delta_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Для класса гибридных систем с подсистемами (3.5) и операторами связи между подсистемами $g_i(x, \mu)$, удовлетворяющими свойствам A и C, соответственно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.10. *Предположим, что для каждой подсистемы гибридной системы* (3.6) *существуют полугруппа* $Q_i(t)$ *и функция* $v_i(x_i)$, *составляющие допустимую пару* $(Q_i(t), v_i)$, *и при этом*:

(1) *изолированные подсистемы из совокупности* (3.5) *допускают свойство* A;

(2) *операторы связи* $g_i(x, \mu)$ *между подсистемами* (3.5) *допускают свойство* C;

(3) *существуют постоянные* $\theta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, *и значение параметра* $\mu^* \in M$ *такие, что матрица* $A(\mu) = [a_{ij}(\mu)]$ *с элементами*

$$a_{ij}(\mu) = \begin{cases} \theta_i(\beta_i + b_{ii}(\mu)) & \text{при} \quad i = j, \\ \frac{1}{2}\left(\theta_i b_{ij}(\mu) + \theta_j b_{ji}(\mu)\right) & \text{при} \quad i \ne j \end{cases}$$

является отрицательно определенной при $\mu < \mu^*$.

Тогда тривиальное решение гибридной системы (3.6) *равномерно асимптотически* μ-*устойчиво.*

Доказательство. На множестве $\Pi = \{x^{\mathrm{T}} = (x_1, \dots, x_m)\colon\ \|x_i\| < \Delta_i$ при $i = 1, 2, \dots, m\}$ будем рассматривать функцию

$$v(x, \theta) = U^*(x)\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}^m_+, \tag{3.12}$$

где $U^*(x) = \mathrm{diag}[u_{11}(x_1), \dots, u_{mm}(x_m)]$. Согласно условиям теоремы функции $u_{ii}(x_i) = v_i(x_i)$ вместе с полугруппой $Q_i(t)$ образуют допустимую пару для i-й подсистемы из совокупности (3.5). Очевидно, что $v(x, \theta)$ — непрерывная функция и $v(0, \theta) = 0$. Поскольку $v_i(x_i, \theta)$ удовлетворяет условию (1), то

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_i \psi_{i1}(\|x_i\|) \le v(x, \theta) \le \sum_{i=1}^{m} \theta_i \psi_{i2}(\|x_i\|)$$

при всех $x \in \Pi$. Для функций ψ_{i1}, ψ_{i2} из K-класса Хана найдутся функции сравнения ψ_1, ψ_2, принадлежащие K-классу, такие, что

$$\psi_1(\|x\|) \le v(x, \theta) \le \psi_2(\|x\|) \tag{3.13}$$

при всех $x \in \Pi$, где

$$\psi_1(\|x\|) \le \sum_{i=1}^{m} \theta_i \psi_{i1}(\|x_i\|) \quad \text{и} \quad \psi_2(\|x\|) \ge \sum_{i=1}^{m} \theta_i \psi_{i2}(\|x_i\|).$$

Для значений $x \in W_0 \subset \mathbb{X}$ вычислим разность

$$v(x+h,\theta) - v(x,\theta) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \{v_i(x_i+h_i) - v_i(x_i)\} \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m} \theta_i \{\nabla v_i(x_i,h_i) + o(\|h_i\|)\} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \nabla v_i(x_i,h_i) + o(\|h\|).$$

Отсюда следует, что $\nabla v(x,\theta,h) = \sum\limits_{i=1}^{m} \theta_i \nabla v_i(x_i,h_i)$. Из того, что $\nabla v_i(x_i,h_i)$ непрерывные и линейные по h_i, следует, что $\nabla v(x,\theta,h)$ при каждом фиксированным $x \in \Pi$ непрерывно и линейно по h. Учитывая это и предположение 3.3, получаем

$$\begin{aligned}\nabla v(x,\theta,f(x)+g(x,\mu)) &= \sum_{i=1}^{m} \theta_i \nabla v_i(x_i, f(x)+g(x,\mu)) = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \beta_i \nabla v_i(x_i,f(x)) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \nabla v_i(x_i,g(x,\mu)) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \theta_i \left[\beta_i \psi_{i3}(\|x_i\|) + \psi_{i3}^{1/2}(\|x_i\|) \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(\mu) \psi_{j3}^{1/2}(\|x_j\|)\right] = \\ &= u^{\mathrm{T}} A(\mu) u,\end{aligned}$$

где элементы $a_{ij}(\mu)$ матрицы $A(\mu) = [a_{ij}(\mu)]$ такие же, как и в условии (3) теоремы, а вектор u определяется так:

$$u^{\mathrm{T}} = \left[\psi_{13}^{1/2}(\|x_1\|), \ldots, \psi_{m3}^{1/2}(\|x_m\|)\right].$$

Поскольку при $\mu < \mu^* \in M$ матрица $A(\mu)$ является отрицательно определенной, то

$$\nabla v(x,\theta,f(x)+g(x,\mu)) \leq u^{\mathrm{T}} A(\mu) u \leq \lambda_M(A)\|u\|^2,$$

где $\lambda_M(A) < 0$ при $\mu < \mu^*$. Из того, что $\|u\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \psi_{i3}(\|x_i\|) \geq \psi_3(\|x\|)$ для некоторой функции ψ_3 из K-класса Хана, следует оценка $\nabla v(x,\theta,f(x)+g(x,\mu)) \leq \leq \lambda_M(A)\psi_3(\|x\|)$ при всех $x \in \Pi \cap W_0$.

Отсюда, согласно теореме 3.9, имеем оценку

$$Dv(x,\theta)|_{(3.7)} \leq \lambda_M(A)\psi_3(\|x\|), \tag{3.14}$$

которая в силу теоремы 3.2 гарантирует равномерную асимптотическую μ-устойчивость нулевого решения $Q(t)x = 0$ гибридной системы (3.6).

Теорема 3.11. *Предположим, что для каждой подсистемы гибридной системы* (3.6) *существуют полугруппа* $Q_i(t)$ *и функция* $v_i(x_i)$, *образующие допустимую пару* $(Q_i(t), v_i)$, *и при этом*:

(1) *изолированные подсистемы из совокупности* (3.5) *допускают свойство* B;

(2) *при заданных функциях* $v_i(x_i)$ *и функциях сравнения* ψ_{i3} *из* K*-класса Хана существуют постоянные* $b_{ij}^*(\mu)$, $i,j = = 1,2,\ldots,m$, *такие, что оценки*

$$\nabla v_i(x_i, g_i(x,\mu)) \leq \psi_{i3}^{1/2}(\|x_i\|) \sum_{j=1}^{m} b_{ij}^*(\mu) \psi_{j3}^{1/2}(\|x_j\|)$$

выполняются при всех $x \in \mathcal{D}(f + g(x,\mu))$, *где* $x^{\mathrm{T}} = = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{X}$;

(3) *существуют постоянные* $\theta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, *и значение параметра* $\mu^* \in M$ *такие, что матрица* $A(\mu) = [a_{ij}(\mu)]$ *с элементами*

$$a_{ij}(\mu) = \begin{cases} \theta_i(\beta_i + b^*_{ii}(\mu)) & \text{при} \quad i = j, \\ \frac{1}{2}\left(\theta_i b^*_{ij}(\mu) + \theta_j b^*_{ji}(\mu)\right) & \text{при} \quad i \neq j \end{cases}$$

является отрицательно определенной при $\mu < \mu^*$.

Тогда тривиальное решение гибридной системы (3.6) *равномерно асимптотически* μ*-устойчиво в целом.*

Доказательство. При выполнении условия (1) теоремы 3.2 функция (3.12) оценивается функциями сравнения $\psi_1(\|x\|)$ и $\psi_2(\|x\|)$, принадлежащими KR-классу Хана, и оценка (3.13) выполняется при всех $x \in \mathbb{X} = \prod\limits_{i=1}^{m} \mathbb{X}_i$. При выполнении условия (2) теоремы 3.12 оценка (3.14) принимает вид $Dv(x,\theta)|_{(3.6)} \leq \lambda_M(A)\psi_3(\|x\|)$, где $\psi_3(\|x\|) \leq \sum\limits_{j=1}^{m} \psi_{j3}(\|x\|)$ при всех $x \in \mathbb{X}$.

Согласно теореме 3.3 нулевое решение $x_i = Q_i(t)x_{i0} = 0$ гибридной системы (3.7) равномерно асимптотически μ-устойчиво в целом.

Для анализа экспоненциальной μ-устойчивости гибридной системы (3.6) нам понадобятся некоторые предположения о функциях $v_i(x_i)$ для подсистем (3.5).

Предположение 3.4. Изолированная подсистема из совокупности (3.5) допускает свойство A*, если для пары $(Q_i(t), v_i)$ существуют функции сравнения ψ_{i2}, ψ_{i3} из K-класса Хана одинакового порядка роста, постоянные a_i, r_i, Δ_i и произвольные постоянные β_i такие, что:

(1) $a_i\|x_i\|^{r_i} \leq v_i(x_i) \leq \psi_{i2}(\|x\|)$ при всех $x_i \in \mathbb{Z}_i$ таких, что $\|x_i\| < \Delta_i$, и

(2) $\nabla v_i(x_i, {}^s\!f_i) \leq \beta_i\psi_{i3}(\|x_i\|)$ при всех $x_i \in \mathcal{D}({}^s\!f_i)$ таких, что $\|x_i\| < \Delta_i$.

Предположение 3.5. Изолированная подсистема из совокупности (3.5) допускает свойство B*, если она имеет свойство A* при $\Delta_i = \infty$ и при функциях сравнения одинакового порядка роста ψ_{i2}, ψ_{i3}, принадлежащих KR-классу Хана.

Далее докажем следующее утверждение.

Теорема 3.12. *Предположим, что для каждой подсистемы гибридной системы* (3.6) *построены полугруппа* $Q_i(t)$ *и функция* $v_i(x_i)$, *образующие допустимую пару, и при этом*:

(1) *изолированные подсистемы из совокупности* (3.5) *допускают свойство* A^*;

(2) *операторы связи* $g_i(x,\mu)$ *между подсистемами* (3.5) *удовлетворяют свойству* C;

(3) *существуют постоянные* $\theta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, *и значение параметра* $\mu^* \in M$ *такие, что матрица* $A(\mu) = [a_{ij}(\mu)]$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, *из условия (3) теоремы 3.11 является отрицательно определенной при* $\mu < \mu^*$.

Тогда тривиальное решение гибридной системы (3.6) *равномерно экспоненциально* μ*-устойчиво.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3.11, применим функцию (3.12). При выполнении условия (1) предположения 3.5 имеем оценку для функции $v(x,\theta)$

$$\min_i(\theta_i a_i)\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^{r_i} \leq v(x,\theta) \leq \psi_2(\|x\|), \tag{3.15}$$

где $\psi_2(\|x\|) \geq \sum\limits_{j=1}^{m} \theta_j\psi_{j2}(\|x_j\|)$, ψ_2 принадлежит K-классу Хана и имеет обратную функцию $\psi_2^{-1}(\|x\|)$.

При выполнении условий (2), (3) теоремы 3.12 имеем

$$Dv(x,\theta)|_{(3.7)} \leq \lambda_M(A)\psi_3(\|x\|), \tag{3.16}$$

где $\psi_3(\|x\|) \leq \sum\limits_{i=1}^{m} \psi_{i3}(\|x_i\|)$, $\lambda_M(A) < 0$ при $\mu < \mu^*$. Учитывая, что функции сравнения $\psi_2(\|x\|)$ и $\psi_3(\|x\|)$ имеют один и тот же порядок роста при всех $x \in \Pi = \{x^{\mathrm{T}} = (x_1, \dots, x_m)\colon \ \|x_i\| < \Delta_i$ при всех $i = 1, 2, \dots, m\}$, преобразуем оценки (3.15) и (3.16). Существуют постоянные k_1 и $k_2 > 0$ такие, что

$$k_1\psi_2(\|x\|) \leq \psi_3(\|x\|) \leq k_2\psi_2(\|x\|) \tag{3.17}$$

при всех $x \in \Pi$.

Обозначим $a = \min\limits_i(\theta_i a_i)$, $\|x\|^r = \sum\limits_{i=1}^{m} \|x_i\|^{r_i}$, и пусть $k_1 = -\lambda_M(A)$. Тогда оценки (3.15), (3.16) принимают вид

$$a\|x\|^r \leq v(x,\theta) \leq \psi_2(\|x\|), \quad Dv(x,\theta)|_{(\cdot)} \leq -k_1 v(x,\theta)$$

при всех $x \in \Pi$. Отсюда получаем

$$v(x(t),\theta) \leq v(x_0,\theta)\exp[-k_1(t-t_0)], \quad t \geq t_0.$$

Учитывая неравенство слева в (3.17), имеем

$$\|x(t)\| \leq a^{-1/r}\psi_2^{1/r}(\|x_0\|)\exp\left[-\frac{k_1}{r}(t-t_0)\right] \tag{3.18}$$

при всех $t \geq t_0$.

Обозначим $\lambda = k_1/r$ и при любом $0 < \varepsilon < H$ выберем $\delta(\varepsilon) = \psi^{-1}(a\varepsilon^r)$. Тогда при $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ из оценки (3.18) следует, что

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon\exp\left[-\lambda(t-t_0)\right], \quad t \geq t_0.$$

Теорема 3.12 доказана.

Теорема 3.13. *Предположим, что для каждой подсистемы гибридной системы* (3.6) *существуют полугруппа $Q_i(t)$ и функция $v_i(x_i)$, образующие допустимую пару, и при этом*:

(1) *изолированные подсистемы из совокупности* (3.5) *допускают свойство B^**;

(2) *выполняются условия (2), (3) теоремы 3.12.*

Тогда тривиальное решение гибридной системы (3.6) *экспоненциально μ-устойчиво в целом.*

Доказательство. При выполнении условий предположения 3.5 для функции $v(x,\theta)$ получаем оценку

$$\min_i(\theta_i b_i)\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^{r_i} \leq v(x,\theta) \leq \psi_2(\|x\|), \tag{3.19}$$

где $b_i > 0$, $r_i > 0$ и $\psi_2(\|x\|)$ — функция из KR-класса Хана, имеющая обратную, $\psi_2(\|x\|) \geq \sum\limits_{j=1}^{m} \theta_j\psi_{i2}(\|x_i\|)$. Для функции $Dv(x,\theta)$ имеем

$$Dv(x,\theta)|_{(3.6)} \leq \lambda_M(A)\psi_3(\|x\|),$$

где $\psi_3(\|x\|) \leq \sum\limits_{j=1}^{m} \psi_{i3}(\|x_i\|)$, $\lambda_M(A) < 0$ при $\mu < \mu^*$.

Аналогично доказательству теоремы 3.13 нетрудно получить оценку

$$\|x(t)\| \leq b^{-1/r}\psi_2^{1/r}(\|x_0\|)\exp\left[-\frac{k_1}{r}(t-t_0)\right], \quad t \geq t_0.$$

Для любого $\alpha > 0$ вычислим $K(\alpha) = b^{-1/r}\psi_2^{1/r}(\alpha)$. При этом как только $\|x_0\| \le \alpha$, то $\|x(t)\| \le K(\alpha)\exp\,[-\lambda(t-t_0)]$, $t \ge t_0$, при любых $x^{\mathrm{T}} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{X}$.

Теорема 3.13 доказана.

Приведем условия μ-устойчивости гибридной системы (3.6) на основе функции (3.12), в которой $\theta = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}_+^m$, и постоянные $b_{ij} \ge 0$ при всех $i \ne j$ и $\mu \le \le \mu^* \in M$. С этой целью вместо матрицы $A(\mu)$ с элементами $a_{ij}(\mu)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, будем рассматривать матрицу $S(\mu)$ с элементами

$$s_{ij}(\mu) = \begin{cases} -(\beta_i + b_{ii}(\mu)) & \text{при} \quad i = j, \\ -b_{ij}(\mu) & \text{при} \quad i \ne j, \end{cases} \tag{3.20}$$

где β_i — постоянные из условия (2) предположения 3.4 и $b_{ij}(\mu)$ — постоянные из оценки (3.4). Заметим, что далее при рассмотрении свойств устойчивости в целом в выражениях s_{ij} матрицы $S^*(\mu)$ используются постоянные $b_{ij}^*(\mu) \ge 0$ при всех $i \ne j$ и $\mu < \mu^* \in M$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.14. *Предположим, что для каждой подсистемы гибридной системы* (3.6) *существуют полугруппа $Q_i(t)$ и функция $v_i(x_i)$, образующие допустимую пару $(Q_i(t), v_i)$, и кроме того*:

(1) *выполняются условия (1), (2) теоремы 3.10 с постоянными $b_{ij}(\mu) \ge 0$ при $i \ne j$ и всех $\mu < \mu^* \in M$. Если при этом главные диагональные миноры матрицы $S(\mu)$ положительные при всех $\mu < \mu^*$, то тривиальное решение гибридной системы* (3.6) *равномерно асимптотически μ-устойчиво*;

(2) *выполняются условия (1), (2) теоремы 3.11 с постоянными $b_{ij}^*(\mu) \ge 0$ при $i \ne j$ и всех $\mu < \mu^* \in M$. Если при этом главные диагональные миноры матрицы $S^*(\mu)$ положительные при всех $\mu < \mu^*$, то тривиальное решение гибридной системы* (3.6) *равномерно асимптотически μ-устойчиво в целом*;

(3) *выполняются условия (1), (2) теоремы 3.12 с постоянными $b_{ij}(\mu) \ge 0$ при $i \ne j$ и всех $\mu < \mu^* \in M$. Если при этом главные диагональные миноры матрицы $S(\mu)$ положительные при всех $\mu < \mu^*$, то тривиальное решение гибридной системы* (3.6) *экспоненциально μ-устойчиво*;

(4) *выполняются условия (1), (2) теоремы 3.13 с постоянными $b_{ij}^*(\mu) \ge 0$ при $i \ne j$ и всех $\mu < \mu^* \in M$. Если при этом главные диагональные миноры матрицы $S^*(\mu)$ положительные при всех $\mu < \mu^*$, то тривиальное решение гибридной системы* (3.6) *экспоненциально μ-устойчиво в целом.*

Доказательство. Докажем утверждение (1). Для функции $v(x, \theta)$ в форме (3.12) нетрудно получить оценки (3.13) при всех $x \in \Pi$. Кроме того,

$$Dv(x,\theta)|_{(3.6)} \le -\frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} \left(\theta S(\mu) + S^{\mathrm{T}}(\mu)\theta\right) u, \tag{3.21}$$

где $u^{\mathrm{T}} = \left(\psi_{13}^{1/2}(\|x_1\|), \dots, \psi_{m3}^{1/2}(\|x_m\|)\right)$, $S(\mu)$ — $(m \times m)$-матрица с элементами (3.20) и $\theta = \mathrm{diag}[\theta_1, \dots, \theta_m]$. Известно, что условия положительности главных диагональных миноров матрицы $S(\mu)$ эквивалентны существованию диагональной матрицы θ с положительными элементами такой, что матрица $\left(\theta S(\mu) + S^{\mathrm{T}}(\mu)\theta\right)$ является положительно определенной при всех $\mu < \mu^* \in M$. В данном случае $\theta_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, и это условие выполняется. Таким образом, оценка (3.21) принимает вид

$$Dv(x,\theta)|_{(3.6)} \le \lambda_M(S)\psi_3(\|x\|) \tag{3.22}$$

при всех $x \in \Pi$ и $\lambda_M(S) < 0$ при $\mu < \mu^*$. Из оценки (3.22) и теоремы 3.11 следует утверждение (1) теоремы 3.14.

Утверждения (2)–(4) этой теоремы доказываются аналогично.

Остановимся теперь на условиях μ-неустойчивости тривиального решения гибридной системы (3.6).

Предположение 3.6. Изолированная подсистема из совокупности (3.5) допускает свойство D, если существуют полугруппа $Q_i(t)$ и функция $v_i(x_i)$, образующие допустимую пару $(Q_i(t), v_i)$, функции сравнения $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}$ из K-класса Хана и вещественные постоянные β_i и Δ_i такие, что

(*а*) $\psi_{i1}(\|x_i\|) \le v_i(x_i) \le \psi_{i2}(\|x_i\|)$,

(*б*) $\nabla v_i(x_i, {}^s f_i(x_i)) \ge \beta_i \psi_{i3}(\|x_i\|)$ при всех $x_i \in \mathcal{D}({}^s f_i)$, где $\mathcal{D}({}^s f_i)$ обозначает область определения инфинитезимального генератора полугруппы $Q_i(t)$ при $\|x_i\| < \Delta_i$.

Предположение 3.7. Оператор связи между подсистемами (3.5) удовлетворяет свойству E, если при заданной допустимой паре $(Q_i(t), v_i)$ существуют функции сравнения ψ_{i3} из K-класса Хана и постоянные $c_{ij}(\mu)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, такие, что

$$\nabla v_i(x_i, g_i(x, \mu)) \ge \psi_{i3}^{1/2}(\|x_i\|) \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(\mu) \psi_{i3}^{1/2}(\|x_i\|)$$

при всех $x^{\mathrm{T}} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}(f + g(x, \mu))$ и $\|x_i\| < \Delta_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Заметим, что если в условии (*б*) предположения 3.6 величины $\beta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, то тривиальное решение всех независимых подсистем (3.5) неустойчиво.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.15. *Предположим, что для каждой подсистемы гибридной системы* (3.6) *существуют полугруппа $Q_i(t)$ и функция $v_i(x_i)$, образующие допустимую пару $(Q_i(t), v_i)$, и, кроме того*:

(1) *изолированные подсистемы из совокупности* (3.5) *допускают свойство D*;

(2) *операторы связи $g_i(x, \mu)$ между подсистемами* (3.5) *допускают свойство E*;

(3) *существуют постоянные $\theta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, и значение параметра $\mu^* \in M$ такие, что матрица $C(\mu)$ с элементами*

$$c_{ij}(\mu) = \begin{cases} \theta_i(\beta_i + c_{ii}(\mu)) & \text{при} \quad i = j, \\ \frac{1}{2}(\theta_i c_{ij}(\mu) + \theta_j c_{ji}(\mu)) & \text{при} \quad i \ne j \end{cases}$$

является положительно определенной при всех значениях $\mu < \mu^*$.

Тогда тривиальное решение гибридной системы (3.6) *μ-неустойчиво.*

Доказательство. Для функции (3.12) при выполнении условий теоремы 3.15 нетрудно получить оценки

$$\psi_1(\|x\|) \le v(x, \theta) \le \psi_2(\|x\|) \tag{3.23}$$

при всех $x \in \Pi$ и

$$Dv(x, \theta)\big|_{(3.6)} \ge \lambda_m(C) \psi_3(\|x\|) \tag{3.24}$$

при всех $x \in \Pi$, где $\lambda_m(C) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $C(\mu)$ при $\mu < \mu^*$. Из оценок (3.23), (3.24) и теоремы 3.6 следует, что тривиальное решение гибридной системы (3.6) μ-неустойчиво.

Обратимся теперь к свойствам μ-ограниченности движения гибридной системы (3.6).

Предположение 3.8. Изолированная подсистема из совокупности (3.5) допускает свойство F, если существуют полугруппа $Q_i(t)$ и функция $v_i(x_i)$, образующие допустимую пару $(Q_i(t), v_i)$, функции сравнения $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}$ из KR-класса Хана и вещественные постоянные β_i^* такие, что:

(1) $\psi_{i1}(\|x_i\|) \le v_i(x_i) \le \psi_{i2}(\|x_i\|)$,

(2) $\nabla v_i(x_i, {}^s f_i(x_i)) \le \beta_i^* \psi_{i3}(\|x_i\|)$ при всех $x_i \in \mathcal{D}({}^s f_i)$ и

  (*а*) при всех $\|x_i\| > \Delta_i^*$,

  (*б*) если $|v_i(x_i)| \le m_i$, $|\nabla v_i(x_i, {}^s f_i(x_i))| \le m_i$ при $\|x_i\| \le \Delta_i^*$, где $m_i > 0$ — const.

Предположение 3.9. Операторы связи $g_i(x,\mu)$ между подсистемами (3.5) удовлетворяют свойству G, если при заданной допустимой паре $(Q_i(t), v_i)$ существуют вещественные постоянные $b_{ij}(\mu)$, $i,j = 1,2,\dots,m$, такие, что

$$\nabla v_i(x_i, g_i(x,\mu)) \le \psi_{i3}^{1/2}(\|x_i\|)\sum_{j=1}^{m} b_{ij}(\mu)\psi_{j3}^{1/2}(\|x_i\|)$$

при всех значениях $x^{\mathrm{T}} = (x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{D}(f + g(x,\mu))$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.16. *Предположим, что для каждой подсистемы гибридной системы* (3.6) *существуют полугруппа* $Q_i(t)$ *и функция* $v_i(x_i)$, *образующие допустимую пару, и, кроме того*:

(1) *изолированные подсистемы из совокупности* (3.5) *допускают свойство* F;

(2) *операторы связи* $g_i(x,\mu)$ *между подсистемами* (3.5) *допускают свойство* G;

(3) *существуют постоянные* $\theta_i > 0$, $i = 1,2,\dots,m$, *и значение параметра* $\mu^* \in M$ *такие, что матрица* $B(\mu) = [b_{ij}(\mu)]$ *с элементами*

$$b_{ij}(\mu) = \begin{cases} \theta_i(\beta_i^* + b_{ii}(\mu)) & \textit{при} \quad i = j, \\ \frac{1}{2}(\theta_i b_{ij}(\mu) + b_{ji}(\mu)\theta_j) & \textit{при} \quad i \ne j \end{cases}$$

является отрицательно определенной при всех значениях $\mu < \mu^*$.

Тогда движение гибридной системы (3.6) *равномерно предельно* μ*-ограничено.*

Доказательство. Рассмотрим функцию (3.12). При выполнении условий предположений 3.8, 3.9 для функций $v(x,\theta)$ и $Dv(x,\theta)$ имеем оценки

$$\psi_1(\|x\|) \le v(x,\theta) \le \psi_2(\|x\|), \tag{3.25}$$

$$Dv(x,\theta)|_{(3.6)} \le \lambda_M(B)\psi_3(\|x\|) \tag{3.26}$$

при всех $x \in \mathbb{X} - \prod_{i=1}^{m} \overline{S}_i(m_i)$, где $\overline{S}_i(m_i) = \{x_i \in \mathbb{Z}_i \colon \|x_i\| \le m_i\}$.

Рассмотрим оценки (3.25) и (3.26) в двух случаях.

Случай 1. Пусть $x_i \in \mathbb{Z}_i$ и $\|x_i\| > m_i$ при $i = 1,2,\dots,p$.

Случай 2. Для значений $i = p+1,\dots,m$ $x_i \in \mathbb{Z}_i$ и $\|x_i\| \le m_i$ при $x^{\mathrm{T}} = (x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{D}(f + g(x,\mu))$.

Оценки (3.25) преобразуются к следующим:

$$\sum_{i=1}^{p}\theta_i\psi_{i1}(\|x_i\|) + \sum_{i=p+1}^{m}\theta_i v_i(x_i) \le v(x,\theta) \le \sum_{i=1}^{p}\theta_i\psi_{i2}(\|x_i\|) + \sum_{i=p+1}^{m}\theta_i v_i(x_i)$$

в случае 1 и

$$\sum_{i=1}^{p}\theta_i\psi_{i1}(\|x_i\|) - \sum_{i=p+1}^{m}\theta_i m_i \le v(x,\theta) \le \sum_{i=1}^{p}\theta_i\psi_{i2}(\|x_i\|) + \sum_{i=p+1}^{m}\theta_i m_i$$

в случае 2. Для выражения $\nabla v(x, f(x) + g(x,\mu))$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \nabla v(x, f(x) + g(x,\mu)) \le w^{\mathrm{T}}B^*(\mu)w + \sum_{i=1}^{p}\theta_i\psi_{i3}^{1/2}(\|x_i\|)\times \\ \times\Bigg[\sum_{j=p+1}^{m} b_{ij}(\mu)\psi_{j3}^{1/2}(m_j)\Bigg] + \\ + \sum_{i=1}^{p}\theta_i m_i + \sum_{i=p+1}^{m}\theta_i\psi_{i3}^{1/2}(m_i)\sum_{j=1}^{p} b_{ij}(\mu)\psi_{j3}^{1/2}(\|x_i\|) + \\ + \sum_{i=p+1}^{m}\theta_i\psi_{i3}^{1/2}(m_i)\sum_{j=p+1}^{m}\psi_{i3}^{1/2}(m_j), \end{aligned} \tag{3.27}$$

где $B^*(\mu) = [b_{ij}(\mu)]$ при $i,j = 1,2,\dots,p$ и $w = (\psi_{13}^{1/2}(\|x_1\|), \psi_{23}^{1/2}(\|x_2\|), \dots, \psi_{p3}^{1/2}(\|x_p\|))^{\mathrm{T}}$.

Оценку (3.27) нетрудно привести к виду

$$\nabla v(x, f(x) + g(x,\mu)) \le w^{\mathrm{T}} B^*(\mu) w + w^{\mathrm{T}} P_0 + P_1, \tag{3.28}$$

где $P_0 \in \mathbb{R}^p$ и $P_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Далее, поскольку матрица $B(\mu)$ отрицательно определена, субматрица $B^*(\mu)$ также будет отрицательно определенной при $\mu < \mu^*$, тогда оценка (3.28) примет вид

$$\begin{aligned}\nabla v(x, f(x) + g(x,\mu)) &\le \lambda_M(B^*)\|w\|^2 + w^{\mathrm{T}} P_0 + P_1 \le \\ &\le \frac{1}{2}\lambda_M(B^*)\|w\|^2 = \frac{1}{2}\lambda_M(B^*)\sum_{i=1}^{p}\psi_{i3}(\|x_i\|) \le \\ &\le \frac{1}{2}\lambda_M(B^*)\psi_3^*\Bigl(\sum_{i=1}^{p}\|x_i\|\Bigr),\end{aligned} \tag{3.29}$$

где ψ_3^* принадлежит KR-классу. Так как $\lambda_M(B^*) < 0$, из оценки (3.29) следует, что $Dv(x,\theta) < 0$ при всех $x^{\mathrm{T}} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}(f + g(x,\mu))$, $0 < \mu < \mu^*$ и при $\|x_i\| > r^*$ для $i = 1,2,\dots,p$, и $\|x_i\| \le m_i$ для $i = p+1,\dots,m$. Согласно теореме 3.8 движение гибридной системы (3.6) равномерно предельно μ-ограничено.

Замечание 3.1. Все результаты этого раздела являются новыми для класса систем вида (3.6). Теоремы 3.12 и 3.13 об экспоненциальной μ-устойчивости гибридной системы сформулированы и доказаны с учетом результатов работ [19, 71].

§4. Приложения.

Задачи устойчивости гибридных систем возникают в различных областях исследования явлений реального мира. А именно, при распознавании образов, создании ассоциативной памяти, комбинаторной оптимизации и многих других. Проблемы устойчивости и стабилизации движения систем с неточными значениями параметров (с/или без управления, с/или без импульсных возмущений и переключений) были предметом монографий [66, 93], где имеется обширная библиография. В этом разделе приводятся некоторые примеры гибридных систем, которые моделируют некоторые реальные процессы. А именно, приведены условия устойчивости в DE-модели нейронной сети на временной шкале, в IE-модели электроэнергетической системы с последействием в системе управления, а также в BE-модели двухкомпонентной гибридной системы общего вида.

4.1. DE-модель нейронной системы на временной шкале.

Рассмотрим нейронную сеть на временной шкале, динамика которой описывается уравнениями вида

$$x^{\Delta}(t) = -Bx(t) + Ts(x(t)) + J, \quad t \in [0, +\infty) \cap \mathbb{T}. \tag{4.1}$$

Решение $x(t; t_0, x_0)$ при $t = t_0$ принимает значение x_0, т.е.

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0, \quad t_0 \in [0, +\infty) \cap \mathbb{T}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{4.2}$$

где $t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{T}$ — произвольная временная шкала, $0 \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = +\infty$. В системе (4.1) вектор $x \in \mathbb{R}^n$ характеризует состояние нейронов, $T = \{t_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, элементы t_{ij} описывают взаимодействие между i-м и j-м нейронами, $s\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $s(x) = (s_1(x_1), s_2(x_2), \dots, s_n(x_n))^{\mathrm{T}}$, функция s_i описывает ответ i-го нейрона, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = \operatorname{diag}\{b_i\}$, $i = 1,2,\dots,n$, $J \in \mathbb{R}^n$ — постоянный вектор внешнего входа.

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $x^{\Delta} = d/dt$ и при $b_i > 0$ начальная задача (4.1), (4.2) эквивалентна начальной задаче для непрерывной нейронной системы типа Хопфилда:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -Bx(t) + Ts(x(t)) + J, \quad t \ge 0,\\ x(t_0; t_0, x_0) &= x_0, \quad t_0 \ge 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$, то $x^{\Delta}(k) = x(k+1) - x(k) = \Delta x(k)$ и при $|1 - b_i| < 1$ начальная задача (4.1), (4.2) эквивалентна следующей:

$$\Delta x(k) = -Bx(k) + Ts(x(k)) + J, \quad t \in \mathbb{N}_0, \tag{4.3}$$

$$x(k_0; k_0, x_0) = x_0, \quad k_0 \in \mathbb{N}_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{4.4}$$

Относительно системы (4.1) сделаем следующие предположения.

S_1. Вектор-функция $f(x) = -Bx + Ts(x) + J$ является регрессивной, т.е. оператор $I + \mu(t)f(t, \cdot)$ при всех $t \in \mathbb{T}^k$ обратим. Здесь $I\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — единичный оператор.

S_2. Существуют положительные постоянные $M_i > 0$, $i = = 1, 2, \ldots, n$, такие, что $|s_i(u)| \le M_i$ при всех $u \in \mathbb{R}$.

S_3. Существуют положительные постоянные $L_i > 0$, $i = = 1, 2, \ldots, n$, такие, что $|s_i(u) - s_i(v)| \le L_i|u - v|$ при всех $u, v \in \mathbb{R}$.

S_4. Функция зернистости временной шкалы $0 < \mu(t) \in \mathcal{M}$ при всех $t \in [0, +\infty) \cap \mathbb{T}$, где $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ – компактное множество.

Из теоремы 8.24 монографии [51] следует, что если для любых $(t_0, x_0) \in [0, +\infty) \cap$ $\cap\, \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$ выполняются условия $\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_3$, то задача (4.1), (4.2) имеет точно одно решение на интервале $[t_0, +\infty) \cap \mathbb{T}$.

Введем обозначения

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{L_i\} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad r = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_j |T_{ij}| + |J_i| \right)^2 / b_i^2 \right)^{1/2},$$

$$\underline{b} = \min_i \{b_i\}, \quad \overline{b} = \max_i \{b_i\}, \quad L = \max_i \{L_i\}.$$

Аналогично доказательству теоремы 3.1 из [114] и теоремы 1 из [118] устанавливается справедливость следующего утверждения.

Лемма 4.1. *Если для системы* (4.1) *выполняются условия* $\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_3$, *то существует состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (4.1) *и при этом* $\|x^*\| \le r$. *Если, кроме того, матрица* $B\Lambda^{-1} - |T|$ *является* M*-матрицей, то это состояние равновесия единственно.*

Регрессивность функции $f(x) = -Bx + Ts(x) + J$ является одним из условий существования единственного решения задачи (4.1), (4.2). Приведем одно достаточное условие регрессивности функции $f(x)$.

Лемма 4.2. *Пусть выполнено предположение* S_3. *Если при каждом фиксированном* $t \in \mathbb{T}$ *матрица* $(I - \mu(t)B)\Lambda^{-1} - \mu(t)|T|$ *является* M*-матрицей, то функция* $f(x) = -Bx + Ts(x) + J$ *регрессивна.*

В системе (4.1) сделаем замену переменной $y(t) = x(t) - x^*$ и перепишем начальную задачу (4.1), (4.2) в виде

$$y^{\triangle}(t) = -By(t) + Tg(y(t)), \quad t \in [0, +\infty) \cap \mathbb{T}, \tag{4.5}$$

$$y(t_0; t_0, y_0) = y_0, \quad t_0 \in [0, +\infty) \cap \mathbb{T}, \quad y_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{4.6}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(y) = (g_1(y_1), g_2(y_2), \ldots, g_n(y_n))^{\mathrm{T}}$, $g(y) = s(y + x^*) - s(x^*)$.

Если для системы (4.1) выполняются предположения $\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_3$, то для системы (4.5) справедливы следующие утверждения.

G_1. Вектор-функция $\tilde{g}_1(y) = -By + Tg(y)$ регрессивна.

G_2. $|g_i(u)| \le 2M_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, при всех $u \in \mathbb{R}$.

G_3. $|g_i(u) - g_i(v)| \le L_i|u - v|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, при всех $u, v \in \mathbb{R}$.

Заметим, что если выполняются условия $G_1 - G_3$, то задача (4.5)–(4.6) имеет точно одно решение на интервале $[t_0, +\infty) \cap \mathbb{T}$ при любых начальных данных $(t_0, y_0) \in [0, +\infty) \cap \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$.

Теорема 4.1. *Предположим, что для системы* (4.1) *выполняются предположения* S_1–S_4 *на временной шкале* $\mathbb{T}$ *и существует постоянная* $\mu^* \in \mathcal{M}$ *такая, что* $\mu(t) \le \mu^*$ *при всех* $t \in [0, +\infty) \cap \mathbb{T}$. *Если выполняется неравенство*

$$2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu^*(\overline{b} + L\|T\|)^2 > 0,$$

то состояние равновесия $x(t) = x^*$ *системы* (4.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Теорема 4.2. *Пусть выполняются следующие условия:*

(1) *для системы* (4.1) *на временной шкале* $\mathbb{T}$ *имеют место предположения* S_1–S_4;

(2) *функции* s_i *принадлежат* $C^2(\mathbb{R})$ *и существуют постоянные* $K_i > 0$ *такие, что* $|s_i''(u)| \le K_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, *при всех* $u \in \mathbb{R}$;

(3) *существует постоянная* $\mu^* > 0$ *такая, что* $\mu(t) \le \mu^*$ *при всех* $t \in [0, +\infty) \cap \cap \mathbb{T}$;

(4) *существует положительно определенная симметрическая матрица* $P \in \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *такая, что выполняется неравенство*

$$\lambda_M(PB_1 + B_1^{\mathrm{T}}P) + \mu^*\|P\|\|B_1\|^2 < 0,$$

где $B_1 = -B + TG$, $G = \mathrm{diag}\{s_i'(0)\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Тогда состояние равновесия $x(t) = x^*$ *системы* (4.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Теорема 4.3. *Пусть выполняются следующие условия:*

(1) *для системы* (4.1) *имеют место предположения* S_1–S_3;

(2) *функции* s_i *принадлежат* $C^2(\mathbb{R})$ *и существуют постоянные* $K_i > 0$ *такие, что* $|s_i''(u)| \le K_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, *при всех* $u \in \mathbb{R}$;

(3) *существуют положительно определенная симметрическая матрица* $P \in \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и постоянная* $M > 0$ *такие, что* $|1 + \mu(t)A(t)| \ge M$ *при всех* $t \in [t_0, +\infty) \cap \mathbb{T}$, *где* $B_1 = -B + TG$, $G = \mathrm{diag}\{s_i'(0)\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A(t) = = \lambda_M(PB_1 + B_1^{\mathrm{T}}P) + \mu(t)\|P\|\|B_1\|^2$.

Тогда:

(i) *если* $\limsup\limits_{t\to\infty} \beta_A(\tau) = q < 0$, *то состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (4.1) *экспоненциально устойчиво;*

(ii) *если* $\sup\{\beta_A(t)\colon\, t \in [0, +\infty)\} = \overline{q} < 0$, *то состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (4.1) *равномерно экспоненциально устойчиво.*

Замечание 4.1. Рассмотрим шкалу $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ ($\mu(t) \equiv 1$). Начальная задача (4.1), (4.2) в этом случае эквивалентна задаче (4.3), (4.4) и условие равномерной асимптотической устойчивости состояния равновесия системы (4.1), полученное в теореме 4.1, при $\mu^* = 1$ принимает вид $2\underline{b} - 2L\|T\| - (\overline{b} + L\|T\|)^2 > 0$. Этот результат полностью совпадает со следующим для дискретной системы (4.3).

Теорема 4.4. *Пусть для нейронной дискретной системы* (4.3) *выполнены предположения* S_2–S_3. *Тогда состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (4.3) *равномерно асимптотически устойчиво при условии, что* $2\underline{b} - 2L\|T\| - (\overline{b} + L\|T\|)^2 > 0$.

Доказательства всех утверждений, приведенных в данном разделе, можно найти в работе [92].

Пример 4.1. На временной шкале $\mathbb{P}_{1,\gamma} = \bigcup_{j=0}^{\infty} [j(1+\gamma), j(1+\gamma)+1]$, $\gamma > 0$, рассмотрим двухкомпонентную нейронную сеть

$$\begin{aligned} x_1^{\Delta} &= -b_1x_1 + t_{11}s(x_2) + t_{12}s(x_2) + u_1,\\ x_2^{\Delta} &= -b_2x_1 + t_{21}s(x_1) + t_{22}s(x_2) + u_2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R},\ b_1 = b_2 = 1,\ T = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,5 \\ 0,5 & 0,1 \end{pmatrix},\ s(r) = \operatorname{th} r$. Для временной шкалы $\mathbb{P}_{1,\gamma}$ функция зернистости

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} [j(1+\gamma), j(1+\gamma)+1)\,, \\ \gamma, & t \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \{j(1+\gamma)+1\}\,. \end{cases}$$

Выбрав матрицу $P = \operatorname{diag}\{0,5; 0,5\}$, получаем функцию

$$\beta_A(t) = \begin{cases} \gamma^{-1}\log|1+\gamma(-0,9+0,53\gamma)|, & t \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \{j(1+\gamma)+1\}\,, \\ -0.9+0.53\,\gamma, & t \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} [j(1+\gamma), j(1+\gamma)+1) \end{cases}$$

и условие регрессивности в виде неравенств

$$1-1,1\gamma > 0, \quad (1-1,1\gamma)^2 - 0,25\,\gamma^2 > 0.$$

При $0 < \gamma < 0,625$ выполнены все условия лемм 4.1, 4.2 и теоремы 4.3. Система (4.7) имеет единственное состояние равновесия при любых $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ и это состояние равновесия равномерно экспоненциально устойчиво.

4.2. IE-модель энергосистемы с последействием.

Математические модели электро-энергетических систем (далее энергосистем) являются предметом постоянного внимания исследователей (см. [65, 7, 110, 104] и библиографию там).

Одной из проблем здесь является оценка областей допустимых отклонений фазовых переменных системы от послеаварийного установившегося режима. В настоящем разделе обсуждаются проблемы устойчивости энергосистемы с последействием в регуляторе при импульсных возмущениях [12]. Исследования такого рода моделей энергосистемы начаты в статье [29]. Так как параметры энергосистемы находятся во взаимосвязи и изменяются с течением времени, динамический анализ таких уравнений представляет собой сложную задачу. При отсутствии последействия и импульсных возмущений модели энергосистем исследованы достаточно полно. Основным качественным методом является прямой метод Ляпунова, основанный на скалярной, векторной либо матричной функции Ляпунова. Показано (см. [83]), что наибольшая область устойчивости в трехмашинной энергосистеме получается путем применения матричной функции Ляпунова.

Общая математическая модель трехмашинной энергосистемы, учитывающая импульсные возмущения и последействие в цепи обратной связи, имеет вид [29]

$$M_i\frac{d^2x_i}{dt^2} + D_i\frac{dx_i}{dt} = P_{mi} - P_{ei} + P_{\tau i}, \quad t \ge t_0, \quad t \ne t_k \tag{4.8}$$

$$x_i(t_k) = I_{ki}(\mathbf{x}_i(\tau_k^-)), \tag{4.9}$$

$$\frac{dx_i}{dt}(\tau_k) = J_{ki}\Big(\mathbf{x}_i(\tau_k^-)\Big), \tag{4.10}$$

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t_0 - r \le t \le t_0, \tag{4.11}$$

где M_i, D_i, P_{mi}, P_{ei} — стандартные обозначения величин, принятые в теории энергосистем (см. [65, 110] и др.); $P_{\tau i} = \alpha_i \sin(k_i x_i(t-r))$, α_i, k_i, r — некоторые постоянные, $t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots, k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = \infty$, функции $I_{ki}, J_{ki}, \varphi_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ такие, что $I_{ki}(0) = J_{ki}(0) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Если в системе (4.8)—(4.11) демпфирование $D_i = 0$ и функции $P_{\tau i} = 0$, $i = 1,2,3$, тогда система уравнений (4.8) обращается в упрощенную модель энергосистемы (см., например, [12] и библиографию там)

$$M_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = P_{mi} - P_{ei}, \quad i = 1,2,3, \quad x_i(t_0) = x_{i0}. \tag{4.12}$$

Здесь P_{ei} — активные мощности, определяемые с помощью соотношения

$$P_{ei} = E_i U Y_{i,4} \sin x_i + \sum_{j=1}^{3} E_i E_j Y_{ij} \sin(x_i - x_j), \quad i = 1,2,3, \tag{4.13}$$

где E_i — э.д.с. i-й машины, Y_{ii} — собственные проводимости машины, Y_{ij} — взаимные проводимости, причем $Y_{ij} = Y_{ji}$. Имеющиеся слагаемые $E_i U Y_{i,4} \sin x_i$ соответствуют шинам постоянного напряжения $U = E_4$. Модель (4.12) с шинами постоянного напряжения применяется при описании динамики энергосистемы, в которой один из генераторов системы имеет существенно большую мощность по сравнению с остальными [7].

Пусть $Q_{ij} = E_i E_j Y_{i,j}$, $i,j = 1,2,3$, $P_{mi} = 0$ и $Q_i = E_i U Y_{i,4}$, $i = 1,2,3$. При этом уравнения (4.12) принимают вид

$$M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -Q_i \sin x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} Q_{ij} \sin(x_i - x_j), \quad i = 1,2,3. \tag{4.14}$$

Заметим, что если известны координаты состояния равновесия системы (4.12), то в линейной постановке анализ случая $P_{mi} \neq 0$ сводится к анализу случая $P_{mi} = 0$ посредством замены переменных.

Анализ устойчивости решений систем (4.8) или (4.14) связан с решением проблемы построения подходящей функции Ляпунова, которая удовлетворяет условиям соответствующей общей теоремы об устойчивости системы с последействием при импульсном возмущении.

В работе [12] предлагается следующий способ построения энергетической функции Ляпунова (cf. [104]).

Из вида системы (4.14) следует, что она состоит из независимых подсистем

$$M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -Q_i \sin x_i, \quad i = 1,2,3, \tag{4.15}$$

и функций связи между ними

$$g_i(x, \dot{x}) = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} Q_{ij} \sin(x_i - x_j), \quad i = 1,2,3.$$

Нетрудно видеть, что полная энергия i-ой свободной подсистемы (4.15) выражается так:

$$E_{ii} = \frac{1}{2} M_i \dot{x}_i^2 + Q_i (1 - \cos x_i), \quad i = 1,2,3. \tag{4.16}$$

Выражения полной энергии пары подсистем

$$M_i \ddot{x}_i = -Q_{ij} \sin(x_i - x_j), \quad M_j \ddot{x}_j = -Q_{ij} \sin(x_j - x_i)$$

при $i \neq j$, $i = 1,2,3$, имеют вид

$$E_{ij} = \frac{1}{2} M_i \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} M_j \dot{x}_j^2 + Q_i (1 - \cos x_i) + Q_j (1 - \cos x_j) + Q_{ij} (1 - \cos(x_i - x_j)). \tag{4.17}$$

Пусть $\mathbf{x_i} = (x_i, \dot{x}_i)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_3^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Вместе с системой (4.15) будем рассматривать матричнозначную функцию

$$U(\mathbf{x}) = [v_{ij}(\mathbf{x})], \quad i,j = 1,2,3, \tag{4.18}$$

с элементами $v_{ii}(\mathbf{x}_i) = E_{ii}$, $i = 1,2,3$; $2v_{ij}(\mathbf{x}) = \widetilde{E}_{ij}$, $i \neq j$, $j = 1,2,3$, где E_{ii} — полная энергия свободных подсистем и

$$\widetilde{E}_{ij} = E_{ij} - E_{ii} - E_{jj}, \quad i,j = 1,2,3, \quad i \neq j.$$

Учитывая выражения (4.16) и (4.17), имеем

$$
\begin{aligned}
v_{ii}(\mathbf{x}_i,\beta) &= \frac{1}{2}M_i\dot{x}_i^2 + Q_i(1-\cos x_i), \quad i=1,2,3;\\
2v_{ij}(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) &= Q_{ij}(1-\cos(x_i-x_j)), \quad i,j=1,2,3, \quad i\neq j.
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Матрица-функция (4.18) используется для построения скалярной функции

$$
V(\mathbf{x}) = \beta^{\mathrm{T}}U(\mathbf{x})\beta, \quad \beta\in\mathbb{R}_+^3. \tag{4.20}
$$

При известных (см. [65]) предположениях об элементах $v_{ii}(\mathbf{x}_i)$ и $v_{ij}(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)$ функция (4.20) является функций Ляпунова для системы (4.14). Заметим, что система (4.14) описывает динамику энергосистемы без учета демпфирования. Условия устойчивости состояния равновесия в системе (4.14) получены в работе [29] в виде системы алгебраических уравнений и неравенств, указывающих ограничения на параметры системы (4.14).

Далее предположим, что в задаче (4.8)–(4.11) мгновенным изменениям подвержены только скорости. Положим также $P_{mi}=0$, тогда система (4.8)–(4.11) принимает вид

$$
\begin{gathered}
M_i\ddot{x}_i + D_i\dot{x}_i + Q_i\sin x_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} Q_{ij}\sin(x_j-x_i) + \alpha_i\sin k_i x_i(t-r), \quad i=1,2,3,\\
t\in[t_0,+\infty), \quad t\neq\tau_k, \quad k\in\mathbb{N}; \quad \dot{x}_i(\tau_k^+) = J_{ki}(\mathbf{x}_i(\tau_k)), \quad k\in\mathbb{N}.
\end{gathered} \tag{4.21}
$$

В результате линеаризации уравнений (4.21) получим

$$
\begin{gathered}
M_i\ddot{x}_i + D_i\dot{x}_i + Q_i x_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} Q_{ij}(x_j-x_i) + A_i x_i(t-r), \quad i=1,2,3,\\
t\in[t_0,+\infty), \quad t\neq\tau_k, \quad k\in\mathbb{N}; \quad \dot{x}_i(\tau_k^+) = c_{1ki}x_i(\tau_k) + c_{2ki}\dot{x}_i(\tau_k), \quad k\in\mathbb{N},
\end{gathered} \tag{4.22}
$$

где c_{1ki}, c_{2ki} — некоторые действительные постоянные, $A_i=\alpha_i k_i$, $i=1,2,3$, $k\in\mathbb{N}$.

Для линейного приближения (4.22) матричная функция Ляпунова выбирается в виде

$$
\begin{aligned}
v_{ii}(\mathbf{x}_i) &= M_i\dot{x}_i^2 + 2R_i\dot{x}_i x_i + Q_i x_i^2, \quad i=1,2,3,\\
v_{ij}(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) &= \frac{1}{2}Q_{ij}(x_i-x_j)^2, \quad i,j=1,2,3, \quad i\neq j.
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

Выбирая вектор β единичным, получим функцию Ляпунова (4.20) в виде

$$
V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3}(M_i\dot{x}_i^2 + 2Rx_i\dot{x}_i + Q_i x_i^2) + \sum_{i=1}^{3} Q_{ij}(x_i-x_j)^2. \tag{4.24}
$$

Функция (4.24) позволяет устанавливать достаточные условия устойчивости состояния равновесия в системе (4.22) в рамках техники Разумихина оценивания полной производной в силу системы (4.22).

В работе [12] рассматриваются уравнения динамики n-машинной энергосистемы в виде

$$
M_i\frac{d^2\theta_i}{dt^2} = P_{mi} - P_{ei} + P_{\tau i}, \quad t\neq\tau_k, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{4.25}
$$

$$
\dot{\theta}_i(\tau_k^+) = I_i(\theta_i(\tau_k),\dot{\theta}_i(\tau_k)), \quad \theta_i(\tau_k^+) = \theta_i(\tau_k), \quad i=1,\ldots,n, \tag{4.26}
$$

с начальными условиями

$$
\theta_i(t) = \varphi_i(t), \quad t_0-r\le t\le t_0, \tag{4.27}
$$

где M_i — инерционная постоянная, θ_i — угол поворота ротора i-го генератора, P_{mi} — постоянные, отвечающие за механическую мощность на валу машины, τ_k^+ — сокращенное обозначение для $\tau_k + 0$, $t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \ldots$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = \infty$, $I_{ki} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\varphi_i \in C^1([-r, 0], \mathbb{R})$, P_{ei} — активные мощности, определяемые с помощью соотношения

$$P_{ei} = \sum_{j=1}^{n} E_i E_j Y_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) + E_i U Y_{i,n+1} \sin\theta_i,$$

где E_i — э.д.с. i-й машины, Y_{ii} — собственные проводимости машины, Y_{ij} — взаимные проводимости, причем $Y_{ij} = Y_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $Y_{i,n+1}$ — проводимость i-го генератора с шинами постоянного напряжения, U — величина поступающего оттуда напряжения, $P_{\tau i}$ — линейный дифференциальный регулятор с запаздыванием $r > 0$.

Система (4.25) не содержит демпфирования, но следует учитывать, что введение демпфирования не приводит к нарушению устойчивости в данной задаче [61].

Положим известными координаты равновесия θ_i^0 и проведем замену переменных $x_i = \theta_i - \theta_i^0$ и $\theta_{ij}^0 = \theta_i^0 - \theta_j^0$ при всех $i, j = 1, \ldots, n$. После линеаризации задача (4.25)–(4.27) принимает вид

$$\begin{gathered} M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -P_i x_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} P_{ij}(x_i - x_j) + P_{\tau i}, \quad i = 1, \ldots, n, \\ \dot{x}_i(\tau_k^+) = c_{ki1} x_i(\tau_k) + c_{ki2} \dot{x}_i(\tau_k), \quad i = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{4.28}$$

где $Q_i = E_i B_i$, $Q_{ij} = E_i E_j B_{ij}$ при $i, j = 1, \ldots, n$.

Предположим, что величина запаздывания r удовлетворяет оценке $2r < \tau_{k+1} - \tau_k$, $k \in \mathbb{N}$, и будем рассматривать вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} V_0(\mathbf{x}) &= \sum_{i,j=1}^{n} v_{0,ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i \dot{x}_i^2 + 2 M_i \widetilde{R} x_i \dot{x}_i + P_i x_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} P_{ij}(x_i - x_j)^2. \end{aligned} \tag{4.29}$$

На основе функции $V_0(\mathbf{x})$ построим разрывную кусочно-экспоненциальную функцию

$$V(t, \mathbf{x}) = V_0(\mathbf{x}) e^{\nu(t - \tau_k)}, \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{4.30}$$

где $\tau_0 = t_0$, $\nu > 0$ — некоторая постоянная. Эта функция применяется для получения достаточных условий устойчивости в виде

$$\left.\frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt}\right|_{(4.28)} \leq -\alpha V(t, \mathbf{x}(t)), \; t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.31}$$

если

$$V(t, \mathbf{x}(t)) > p V(t + \zeta, \mathbf{x}(t + \zeta)), \quad \zeta \in \Omega_{2r}, \tag{4.32}$$

где $\alpha > 0$, $p \in (0, 1)$ — некоторые параметры, $\Omega_{2r} = [\max\{-2r, t_0 - t - r\}, 0)$, и

$$V(\tau_k + 0, \mathbf{x}(\tau_k + 0)) \leq V(\tau_k, \mathbf{x}(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.33}$$

Известно, что оценки областей устойчивости зависят от вида применяемых вспомогательных функций (см. [65], [83], [110] и др.). В работе [12] наряду с функцией (4.30) применяется кусочно-линейная функция в виде

$$V(\mathbf{x}, t) = V_0(\mathbf{x})(1 + \nu(t - \tau_k)), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{4.34}$$

где $\tau_0 = t_0$, $\nu > 0$ — некоторая постоянная.

Представляет интерес получение условий экспоненциальной устойчивости состояния равновесия в системе (4.28) на основе теоремы 2.5. Кроме того, некоторые результаты статьи [108] имеют потенциал для применения в рассматриваемой задаче.

Теорема 4.5. *Предположим, что для системы (2.17) построена функция $V_2(\theta, x)$, удовлетворяющая условию B_2. Кроме того, существуют постоянные симметрические (2×2)-матрицы A_i, $i = 1, 2, 3$, и векторные функции $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in K$-классу Хана такие, что:*

(1) $\bar{a}^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_1\bar{a}(\|x\|) \le V_2(t, x) \le \bar{b}^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_2\bar{b}(\|x\|)$, $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times S(H^*)$;

(2) *для любого решения $x(t)$ системы (2.17) $V_2(t + s, x(t + s)) \le V(t, x(t))$ при $s \in [-\tau, 0]$ выполняется неравенство*

$$D^+V_2(t, x(t))\Big|_{(2.17)} \le \bar{c}^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_3\bar{c}(\|x\|);$$

(3) *существуют постоянные $b_k \ge 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$ такие, что при всех $k \in \mathbb{N}$ и $x \in S(H^*)$*

$$V_2(t, x + I_k(x)) \le (1 + b_k)V_2(t_k^-, x).$$

Тогда, если матрицы A_1 и A_2 положительно определенные и матрица A_3 полуопределенно отрицательная, то состояние $x = 0$ системы (2.17) равномерно устойчиво.

Теорема 4.6. *Если выполняются условия (1), (3) теоремы 4.5 и кроме того существует функция $p(s)$ непрерывная и неубывающая при $s > 0$, $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 + b_k)$ и для любого решения $x(t)$ системы (2.17) $V_2(t + s, x(t + s)) < p(v_2(t, x(t)))$ при $-\tau \le s \le 0$ верна оценка*

$$D^+V_2(t, x(t))\Big|_{(2.17)} \le -\bar{c}^{\mathrm{T}}(\|x\|)A_3\bar{c}(\|x\|).$$

Тогда, если матрицы A_1—A_3 определенно-положительные, то состояние $x = 0$ системы (2.17) равномерно асимптотически устойчиво.

В работе [12] для энергосистем с импульсным воздействием и запаздывающим регулированием указаны оценки области асимптотической устойчивости в пространстве управляющих параметров путем применения разрывных матричных функций Ляпунова при условиях Разумихина. При этом рассматривались кусочно-экспоненциальные (4.30) и кусочно-линейные функции (4.34). Сравнение эффективности применения этих двух типов функций показывает, что применение кусочно-экспоненциальной функции (4.30) обеспечивает более широкие оценки области устойчивости при заданных значениях параметров системы. Описаны механизмы потери устойчивости энергосистемы на границе области устойчивости в пространстве управляющих параметров.

Одной из открытых проблем для моделей энергосистем с последействием является задача оценки влияния импульсных возмущений на процесс синхронизации (антисинхронизации) двух и более генераторов.

4.3. BE-модель двухкомпонентной гибридной системы.

Рассматривается физический процесс, который описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1(t)) + \mu b \int\limits_G H_1(y, x_2(t, y))\, dy, \\ \frac{\partial x_2(t, y)}{\partial t} &= \alpha\Delta x_2(t, y) - H_2(x_2(t, y)) + \mu h_2(y)c^{\mathrm{T}}x_1(t) \end{aligned} \tag{4.35}$$

с граничными

$$x_2(t,y) = 0 \quad \text{при всех} \quad (t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \partial G \tag{4.36}$$

и начальными

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0,y) = \psi(y) \quad \text{при} \quad y \in G \tag{4.37}$$

условиями. Здесь $f(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, b, c — заданные n-мерные векторы , α и L — заданные положительные постоянные, Δ — оператор Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^m$, G — открытое подмножество в $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей ∂G и $\mu \in M$ — малый положительный параметр. Функции H_1 и H_2 заданы и удовлетворяют условиям:

(*а*) $H_1(y,0) = 0$ при всех $y \in G$;

(*б*) $H_2(0) = 0$ и $|H_1(y,z) - H_1(y,z^*)| \le |h_1(y)| \|z - z^*\|$ при всех $y \in G$;

(*в*) $z, z^* \in \mathbb{R}$ и $|H_2(u) - H_2(u^*)| \le L\|u - u^*\|$ при всех $u, u^* \in \mathbb{R}$ и $h_i \in L_2(G)$, $i = 1,2$.

При выполнении этих условий задача (4.35)–(4.37) корректно определена и ее решение $(x_1(t), x_2(t,y))^{\mathrm{T}}$ существует при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Изолированные подсистемы системы (4.35) имеют такой вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1); \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial x_2(t,y)}{\partial t} = \alpha \Delta x_2(t,y) - H_2(y) \triangleq f_2(x_2). \tag{4.39}$$

Операторы связи $g_i(x,\mu)$, $i = 1,2$, таковы:

$$\mu g_1(x_1,x_2) = \mu b \int\limits_G H_1(y, x_2(t,y))\, dy; \tag{4.40}$$

$$\mu g_2(x_1,x_2) = \mu h_2(y) c^{\mathrm{T}} x_1(t). \tag{4.41}$$

Для системы (4.35) принято, что $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}_2 = L_2(G)$ и $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n \times L_2(G)$. Нормы в $\mathbb{R}^n$ и на $L_2(G)$ будем обозначать $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{L_2}$, соответственно.

Предположение 4.1. Существуют:

(1) функции $v_{11}(x_1) \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ и $v_{22}(x_2) \in C(L_2(G), \mathbb{R}_+)$ в открытых связных окрестностях точек $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, функции сравнения $\varphi_i(\|x_1\|)$ и $\psi_i(\|x_2\|_{L_2})$ из K-класса Хана и положительные постоянные $\underline{\alpha}_{ii}$, $\overline{\alpha}_{ii}$, $i = 1,2$, такие, что

$$\underline{\alpha}_{11}\varphi_1^2(\|x_1\|) \le v_{11}(x_1) \le \overline{\alpha}_{11}\varphi_2^2(\|x_1\|),$$
$$\underline{\alpha}_{22}\psi_1^2(\|x_2\|_{L_2}) \le v_{22}(x_2) \le \overline{\alpha}_{22}\psi_2^2(\|x_2\|_{L_2});$$

(2) функции $v_{12}(x_1,x_2) = v_{21}(x_1,x_2) \in C(\mathbb{R}^n \times L_2(G), \mathbb{R})$ и произвольные постоянные $\underline{\alpha}_{12}$, $\overline{\alpha}_{21}$ такие, что

$$\underline{\alpha}_{12}\varphi_1(\|x_1\|)\psi_2(\|x_2\|_{L_2}) \le v_{12}(x_1,x_2) \le \overline{\alpha}_{12}\varphi_2(\|x_1\|)\psi_2(\|x_2\|_{L_2})$$

в области значений $x_1 \in \mathcal{D}(f_1)$ и $x_2 \in \mathcal{D}(f_2)$.

Лемма 4.3. *Если выполняются все условия предположения 4.1 и матрицы*

$$A_1 = \begin{pmatrix} \underline{\alpha}_{11} & \underline{\alpha}_{12} \\ \underline{\alpha}_{21} & \underline{\alpha}_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{\alpha}_{12} = \underline{\alpha}_{21},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_{11} & \overline{\alpha}_{12} \\ \overline{\alpha}_{21} & \overline{\alpha}_{22} \end{pmatrix}, \quad \overline{\alpha}_{12} = \overline{\alpha}_{21},$$

положительно определенные, то функция $v(x,\theta) = \theta^{\mathrm{T}} U(x)\theta$, $\theta \in \mathbb{R}^2_+$, $U(x) = [u_{ij}(\cdot)]$, $i,j = 1,2$, *является положительно определенной и убывающей.*

Предположение 4.2. Для заданных функций $v_{11}(x_1)$, $v_{22}(x_2)$ и $v_{12}(x_1,x_2)$ существуют постоянные β_{ik}, $i=1,2$, $k=1,2,\dots,8$, функции сравнения $\xi_1(\|x_1\|)$ и $\xi_2(\|x_2\|_{L_2})$ из K-класса Хана такие, что:

(*а*) $\nabla v_{11}(x_1, f_1(x_1)) \le 0$;

(*б*) $\nabla v_{11}(x_1, g_1(x,\mu)) \le \beta_{12}\xi_1^2(\|x_1\|) + \beta_{13}\xi_1(\|x_1\|)\xi_2(\|x_2\|_{L_2})$;

(*в*) $\nabla v_{22}(x_2, f_2(x_2)) \le 0$;

(*г*) $\nabla v_{22}(x_2, g_2(x,\mu)) \le \beta_{22}\xi_2^2(\|x_2\|_{L_2}) + \beta_{23}\xi_1(\|x_1\|)\xi_2(\|x_2\|_{L_2})$;

(*д*) $\nabla v_{12}(x_1,x_2, f_1(x_1)) \le \beta_{14}\xi_1^2(\|x_1\|) + \beta_{15}\xi_1(\|x_1\|)\xi_2(\|x_2\|_{L_2})$;

(*е*) $\nabla v_{12}(x_1,x_2, f_2(x_2)) \le \beta_{24}\xi_1^2(\|x_1\|) + \beta_{25}\xi_1(\|x_1\|)\xi_2(\|x_2\|_{L_2})$;

(*ж*) $\nabla v_{12}(x_1,x_2, g_1(x,\mu)) \le \beta_{16}\xi_1^2(\|x_1\|) + \beta_{17}\xi_1(\|x_1\|)\xi_2(\|x_2\|_{L_2}) + \beta_{18}\xi_2^2(\|x_2\|_{L_2})$;

(*з*) $\nabla v_{12}(x_1,x_2, g_2(x,\mu)) \le \beta_{26}\xi_1^2(\|x_1\|) + \beta_{27}\xi_1(\|x_1\|)\xi_2(\|x_2\|_{L_2}) + \beta_{28}\xi_2^2(\|x_2\|_{L_2})$

и матрица $C(\mu)$ имеет вид $C(\mu) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, $c_{12}=c_{21}$, с элементами

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= \theta_1^2\mu\beta_{12} + 2\theta_1\theta_2(\beta_{14} + \mu\beta_{16} + \mu\beta_{26}),\\
c_{22} &= \theta_2^2\mu\beta_{22} + 2\theta_1\theta_2(\beta_{24} + \mu\beta_{18} + \mu\beta_{28}),\\
c_{12} &= \frac{1}{2}\left(\theta_1^2\mu\beta_{13} + \theta_2^2\mu\beta_{23}\right) + \theta_1\theta_2(\beta_{15} + \beta_{25} + \mu\beta_{17} + \mu\beta_{27}).
\end{aligned}
$$

Учитывая условия предположения 4.2, для функции $v(x,\theta)$ имеем следующую оценку производной:

$$
\nabla v(x,\theta)\big|_{(4.35)} \le u^{\mathrm{T}} C(\mu) u, \tag{4.42}
$$

где $u^{\mathrm{T}} = (\xi_1(\|x_1\|), \xi_2(\|x_2\|))$, $\mu \in (0,\mu_0)$.

Теорема 4.5. *Если двухкомпонентная система* (4.35), (4.36) *такова, что выполняются условия предположения 4.2 и существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что матрица* $C(\mu)$ *является отрицательно определенной при* $\mu \in (0,\mu_0)$, *тогда состояние равновесия* $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ *равномерно асимптотически* μ*-устойчиво.*

Доказательство теоремы следует из условий, которым удовлетворяют функция $v(x,\theta)$ и ее производная (4.42).

Замечание 4.2. Вследствие условий (*а*) и (*в*) из предположения 4.2 гибридная система (4.35), (4.36) состоит из устойчивых (неасимптотически) подсистем и равномерная асимптотическая μ-устойчивость состояния равновесия $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ достигается за счет стабилизирующего влияния операторов связи.

Замечание 4.3. Результаты этого раздела являются новыми для систем вида (4.35). При этом некоторые результаты заимствованы из работы [87]. Система вида (4.35) при $f(x_1) = Ax_1$ и $\mu = 1$ исследовалась в монографии [98] на основе векторной функции Ляпунова. Предположение об асимптотической устойчивости нулевого решения независимых подсистем (4.38) и (4.39) позволяет применить векторную функцию Ляпунова, но при этом операторы связи $g_i(x)$, $i = 1,2$, рассматриваются как факторы, дестабилизирующие тривиальное решение рассматриваемой системы.

§5. Заключительные замечания.

Наблюдаемый в последние годы интерес к гибридным системам объясняется тем, что эти системы имеют важные приложения в различных инженерных и технологических областях среди которых: средства связи, сложные сети, биотехнологии, искусственный интеллект, электрические энергосистемы, аэрокосмические проблемы, экосистемы и модели экономических систем.

Общая теория устойчивости движения гибридных систем находится в процессе становления, так как для математического моделирования процессов применяются связанные системы уравнений различных типов, для которых не созданы эффективные методы анализа динамического поведения.

Наш анализ многочисленных работ, выполненных в последнее время в области теории гибридных систем, приводит к следующим выводам.

1. Для уравнений на временной шкале (DE-модели) (см. библиографию в монографиях [26, 51] и статьях [44, 68, 109]) усилия авторов сосредоточены на:

– создании математического анализа функций, заданных на временной шкале, как фундамента новой ветви анализа некоторых процессов реального мира;

– построении аналогов качественных методов для динамических уравнений, разработанных для непрерывных и/или дискретных систем в классической теории уравнений;

– выявлении новых свойств "непрерывно-дискретной во времени среды" на основе динамических уравнений (задачи механики, динамики популяций, математической экономики и др.).

2. Для гибридных систем, моделируемых уравнениями с последействием при импульсных возмущениях (IE-модели) в настоящее время применяются методы, развитые в классической теории уравнений, такие как прямой метод Ляпунова, основанный на скалярных, векторных либо матричнозначных вспомогательных функциях (функционалах); метод вариации постоянных; метод интегральных неравенств и принцип сравнения. Кроме того, в некоторых случаях эффективным оказывается комбинирование упомянутых методов.

Результаты, представленные в §3, являются фрагментом общей теории гибридных систем для рассматриваемого класса уравнений. Дополнение этих результатов конструктивными подходами построения вспомогательных функций Ляпунова является актуальной проблемой дальнейших исследований. Кроме того, представляет интерес получение условий оптимальности управления гибридными системами при неточных значениях параметров.

3. Проблема устойчивости и ограниченности решений гибридных систем, описание которых проводится уравнениями в бесконечномерных пространствах, восходит к работам 60х годов прошлого столетия. Среди задач механики укажем проблему устойчивости движения твердого тела с полостью, частично заполненной идеальной или вязкой жидкостью. В теории автоматического регулирования широко применяются функционально дифференциальные уравнения с запаздыванием, интегродифференциальные уравнения Вольтерра, специальные классы уравнений с частными производными. Для этих классов уравнений развиты методы анализа ограниченности и устойчивости движения на основе обобщенного прямого метода Ляпунова и принципа сравнения.

Результаты §§1–3 могут быть применены для анализа ограниченности и устойчивости движения как в традиционных для общей механики областях исследования, так и новых, таких как синхронизация хаотических процессов (см. [57] и библиографию там), а также при исследовании систем, связанных с безопасностью коммуникаций. Представляет значительный интерес получение результатов об устойчивости по Ляпунову гибридных систем, на основе конструктивного построения вспомогательных функций Ляпунова.

Р Е З Ю М Е. Наведено достатні умови різних типів стійкості трьох класів гібридних систем, що моделюються динамічними рівняннями на часовій шкалі, системами з післядією при імпульсних збуреннях та рівняннями в банаховому просторі. Окремі загальні результати ілюструються прикладами і деякими застосуваннями з механіки і теорії нейронних мереж.

1. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Дифференциальные неравенства и устойчивость движения. — Санкт-Петербург: "СОЛО", 2006. — 107 с.
2. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. — Санкт-Петербург: Изд-во СПб ун-та, 2012. — 262 с.

3. *Анапольский Л.Ю.* Метод сравнения в анализе дискретных систем. В кн.: Вектор-функции Ляпунова и их построение. – Новосибирск: Наука, 1980. – С. 92 – 128.

4. *Бабенко С.В.* Устойчивость движения непрерывно-дискретных крупномасштабных механических систем при структурных возмущениях. – К.: Институт механики НАН Украины / Дис. канд. физ.-матем. наук, 2011. – 160 с.

5. *Бабенко С.В., Мартынюк А.А.* Устойчивость регулируемых систем с двумя исполнительными органами на временной шкале // Нелинейные колебания. – 2013. – **16**, № 1. – С. 6 – 13.

6. *Бартышев А.В.* Применение векторных функций Ляпунова для исследования двухкомпонентных систем. – В кн.: Вектор-функции Ляпунова и их построение. – Новосибирск: Наука, 1980. – С. 237 – 256.

7. *Вайман М.Я.* Устойчивость нелинейных механических и электромеханических систем. – М.: Машиностроение. – 1981. – 125 с.

8. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем. – В кн.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. – Казань: Фолиант, 2011. – С. 23 – 81.

9. *Васильев С.Н., Терегулов А.Е.* Теоремы об устойчивости. В кн.: Вектор-функции Ляпунова и их построение. – Новосибирск: Наука, 1980. – С. 269 – 280.

10. *Зубов В.И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. –241 с.

11. *Иванов И.Л.* Устойчивость одной модели энергосистемы с запаздыванием и импульсным воздействием // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 1. – С. 114 – 127.

12. *Иванов И.Л.* Связная устойчивость крупномасштабных систем с запаздыванием и импульсным воздействием. – К.: Институт механики НАН Украины / Дис. канд. физ.-матем. наук, 2014. – 149 с.

13. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.

14. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – Л.; М.: ОНТИ, 1935. – 386 с.

15. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.

16. *Мартынюк А.А.* Устойчивость движения сложных систем. – К.: Наукова думка, 1975. – 351 с.

17. *Мартынюк А.А.* Матрица-функция Ляпунова и устойчивость гибридных систем // Прикл. механика. – 1985. – **21**, № 4. – С.89 – 96.

18. *Мартынюк А.А.* Об экспоненциальной устойчивости относительно части переменных // ДАН России. – 1993. – **331**, № 1. – С. 17 – 19.

19. *Мартынюк А.А.* Об экспоненциальной полиустойчивости разделяющихся движений // ДАН России. – 1994. – **336**, № 4. – С. 446 – 447.

20. *Мартынюк А.А.* О методе матричных функций Ляпунова для уравнений в банаховом пространстве // Доп. НАН України. – 2002. – № 7. – С. 50 – 54.

21. *Мартынюк А.А.* О полидинамике нелинейных систем на временной шкале // Докл. АН. – 2007. – **414**, № 4. – С. 455 – 458.

22. *Мартынюк А.А.* Общая задача полидинамики на временной шкале // Доп. НАН України. – 2008. – № 1. С. 7 – 13.

23. *Мартынюк А.А.* Об экспоненциальной устойчивости динамической системы на временной шкале // Докл. АН России. – 2008. – **421**. – С. 312 – 317.

24. *Мартынюк А.А.* Критерий устойчивости нелинейных монотонных систем и его применение (обзор) // Прикл. механика. – 2011. – **47**, № 5. – С. 3 – 67.

25. *Мартынюк А.А.* О стабилизации систем с последействием импульсными возмущениями // Доп. НАН України. – 2012. – № 9. – С. 62 – 65.

26. *Мартынюк А.А.* Теория устойчивости решений динамических уравнений на временной шкале. – Киев: Феникс, 2012. – 277 с.

27. *Мартынюк А.А.* Об устойчивости импульсной системы с последействием относительно двух мер // Нелинейные колебания. – 2013. – **16**, № 4. – С. 538 – 556.

28. *Мартынюк А.А., Иванов И.Л.* О связной устойчивости импульсных крупномасштабных систем с запаздыванием // Доп. НАН України. – 2012. – № 7. – С. 60 – 66.

30. *Мартынюк А.А., Иванов И.Л.* О связной устойчивости трехмашинной энергосистемы при импульсных возмущениях // Доп. НАН України. – 2013. – № 7. – С. 64 – 71.

31. *Мартынюк А.А., В.Г.Миладжанов В.Г.* Об устойчивости импульсной системы при структурных возмущениях // Электрон. моделирование. – 1994. – **16**, № 1. –С. 3 – 7.

31. *Мартынюк А.А., Мартынюк-Черниенко Ю.А.* О робастной устойчивости систем с последействием при импульсных возмущениях // Доп. НАН України. – 2012. – № 8. – С. 47 – 53.

32. *Мартынюк А.А., Слынько В.И* Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 12. – С. 134 – 144.

33. *Мартынюк-Черниенко Ю.А.* Об устойчивости динамических систем на временной шкале // Докл. АНР. – 2007. – **413,** № 1. – С. 11–15.

34. *Мартынюк-Черниенко Ю.А.* К теории устойчивости движения нелинейной системы на временной шкале // Укр. матем. журнал. – 2008. – **60,** № 6. – С. 776 – 782.

35. *Мартынюк-Черниенко Ю.А.* Неточные динамические системы: устойчивость и управление движением. – Киев: Феникс, 2009. – 306 с.

36. *Мартынюк-Черниенко Ю.А., Чернецкая Л.Н.* Анализ экспоненциальной устойчивости движения на временной шкале // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 4. – С. 117 – 123.

37. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова в анализе сложных систем с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. – 1973. – № 1. – С. 5 – 22.

38. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. – М.: Физматлит, 2001. – 384 с.

39. *Матросов В.М., Васильев С.Н.* Принцип сравнения в динамике систем с распределенными параметрами // Устойчивость движений. Аналитическая механика, управление движением / Отв. ред. В. Г. Демин, В. М. Матросов. – М., 1981. – С. 198 – 217.

40. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // Прикл. матем. и мех. – 1960. – **24**, № 6. – С. 988 – 1001.

41. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.; Л.: ОГИЗ, 1947. – 448 с.

42. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 288 с.

43. *Слынько В.И.* Об условиях устойчивости движения линейных импульсных систем с запаздыванием // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 6. – С. 130 – 138.

44. *Aulbach B., Hilger S.* A unified approach to continuous and discrete dynamics / В кн.: Qualitative Theory of Differential Equations (Eds.: B.Sz.-Nagy and L.Hatvani), Amsterdam: North-Holland, 1990. – P. 37 – 56.

45. *Babenko S.V., Martynyuk A.A.* Nonlinear dynamic inequalities and stability of quasi-linear systems on time scales // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2013. –**13,** N 1. – P. 13 – 24.

46. *Babenko S.V., Martynyuk A.A.* Stability of dynamic graph on time scales // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2014. – **14,** N 1. – P. 30 – 43.

47. *Bainov D.D., Dishliev A.B., Stamova I.M.* Practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations via the method of comparison and applications to population dynamics // ANZIAM Journal. – 2002. –**43**. – P. 525 – 539.

48. *Bainov D.D., Simeonov P.S.* Systems with Impulse Effects: Stability, Theory and Applications. – New York: Halsted, 1989. – 258 p.

49. *Beldiman O.V.* Control Nertworks. – Duke: Duke University, 1998. – 50 p.

50. *Bohner M., Martynyuk A.A.* Elements of stability theory of A.M. Liapunov for dynamic equations on time scales // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2007. – **7,** N 3. – P. 225 – 251.

51. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. – Boston: Birkhдuser, 2001. – 358 p.

52. *Bowman D.* q-Difference operators, orthogonal polynomials, and symmetric expansions // Memoirs Amer. Math. Soc. – 2002. – **159**. – P. 1 – 56.

53. *Brezis H.* Operateurs Maximaux Monotones. – Amsterdam: North-Holland Publ., 1973. – 183 p.

54. *Brockett R.W.* Hybrid models for motion control systems. In: Essays in Control: Perspectives in the Theory and its Applications . (Eds.: H.L. Trentelman and J.C. Willems). – New York: Academic Press, 1993. – P. 29 – 53.

55. *Burton T.A.* Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. – Orlando etc.: Academic Press, 1985. – 337 p.

56. *Crandall M.G., Liggett T.M.* Semigroups of nonlinear transformations in Banach spaces. In: Contribution to Nonlinear Functional Analysis. (Ed.: E.H. Zarantonello) // Amer. J. Math. – 1971. – **93**, N 2. – 265 – 298.

57. *Cruz-Hernandez C., Martynyuk A.A.* (Eds.) Advances in Chaotic Dynamics with Applications. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2010. – 495 p.

58. *DaCunha J.J.* Dynamic inequalities, bounds, and stability of systems with linear and nonlinear perturbations // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2009. – **9**. – P. 239 – 248.

59. *DaCunha J.J.* Lyapunov stability theory and Floquet theory for nonautonomous linear dynamic systems on time scales. – Waco, Texas, PhD Thesis, 2004. – 113 p.

60. *Denisenko V.S., Martynyuk A.A., Slyn'ko V.I.* Stability Analysis of Impulsive Takagi-Sugeno Systems // Int. J. of Innovative Computing, Information and Control. – 2009. – **5**, N 10(A). – P. 3141 – 3155.

61. *Dikin I.I., Shelkunova L.V., Skibenko V.P., Voropai N.I.* A New Approach to Construction of Optimal Stability Regions of Electric Power Systems on the Base of Quadratic Lyapunov Functions / Preprint – Irkutsk Energy Systems Inst. Russ. Acad. of Sciences. – 1999. – 104 p.

62. *Djordjević M.Z.* Stability analysis of interconnected systems with possible unstable subsystems // Systems and Control Letters. – 1983. – **3**. – P. 165 – 169.

63. *Djordjević M.Z.* Zur Stabilität Nichtlinear Gekoppelter Systems mit der Matrix-Ljapunov-Methode. – Zürich: Diss. ETH Nr. 7690. – 155 p.

64. *Gard T., Hoffacker J.* Asymptotic behavior of natural growth on time scale // Dynam. Systems Appl. – 2003. – N 12. – P. 131 – 147.

65. *Grujić Lj.T., Martynyuk A.A., Ribbens-Pavella M.* Large Scale Systems Stability under Structural and Singular Perturbations. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – 366 p.

66. *Haddad W.M., Chellaboina V.S., Nersesov S.G.* Impulsive and Hybrid Dynamical Systems. – Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. – 504 p.

67. *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations. – New York: Springer, 1977. –365 p.

68. *Hilger S.* Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus // Results Math. – 1990. – **18,** N 1 – 2. – P. 18 – 56.

69. *Hille E., Phillips R.S.* Functional Analysis and Semi-Groups. – Bengal, India: Dutt Press, 2008. – 542 p.

70. *Ivanov I.L., Martynyuk A.A.* Stability results for delay power systems under impulsive perturbations // Communication in Appl. Anal. – 2015. – **19**, N 1 – 2. – P. 110 – 124.

71. *He J., Wang M.* Remarks on exponential stability by comparison functions of the same order of amplitude // Ann. Diff. Eqns. – 1991. – **7**, N 4. – P. 409 – 414.

72. *Krein S.G.* Linear Differential Equations in Banach Space. – Rhode Island, Providence: Amer. Mat. Soc., 1970. – 390 p.

73. *Kurtz T.* Convergence of sequences of semigroups of nonlinear equations with applications to gas kinetics // Trans. Amer. Mat. Soc. – 1973. – **186**. – P. 259 – 272.

74. *Lakshmikantham V.* Stability and asymptotic behavior of solutions of differential equations in a Banach space // Lecture Notes, CIME, Italy. – 1974. – P. 39 – 98.

75. *Lakshmikantham V.* Differential equations in Banach spaces and extension of Lyapunov's method // Proc. Camb. Phi. Soc. – 1963. – **59**. – P. 343 – 381.

76. *Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of Impulsive Differential Equations. – Singapore: World Scientific, 1989. – 312 p.

77. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A.* Stability Analysis of Nonlinear Systems. – New York: Marcel Dekker, 1989. – 305 p.

78. *Martynyuk A.A.* The Lyapunov matrix-function // Nonlinear Analysis. – 1984. – **8**. – P. 1234 – 1241.

79. *Martynyuk A.A.* Lyapunov matrix-function and stability theory. – Proc. IMACS-IFAC Symp. IDN, Villeneuve d'Ascq., France, 1986. – P. 261 – 265.

80. *Martynyuk A.A.* The Lyapunov Matrix function and stability of hybrid systems // Nonlinear Analysis. – 1986. – **10**. – P. 1449 – 1457.
81. *Martynyuk A.A.* Stability by Liapunov's Matrix Function Method with Applications. – New York: Marcel Dekker, 1998. – 276 p.
82. *Martynyuk A.A.* A survey of some classical and modern developments of stability theory // Nonlinear Analysis. – 2000. – **40**. – P. 483 – 496.
83. *Martynyuk A.A.* Qualitative Method in Nonlinear Dynamics. Novel Approaches to Liapunov's Matrix Function. – New York: Marcel Dekker, 2002. – 301 p.
84. *Martynyuk A.A.* Matrix Liapunov functions and stability analysis of dynamical systems. In: Advances in Stability Theory at the End of 20th Century. (Ed.: A.A. Martynyuk). – London and New York: Taylor and Francis, 2003. – P. 135 – 151.
85. *Martynyuk A.A.* Matrix Liapunov’s functions method and stability analysis of continuous systems // CUBO. A Mathematical Journal. – 2004. – **6**, N 4. – P. 209 – 257.
86. *Martynyuk A.A.* Stability of dynamical systems in metric spaces // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2005. – **5**, N 2. – P. 157 – 167.
87. *Martynyuk A.A.* Stability of Motion: The Role of Multicomponent Liapunov's Functions.– Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2007. – 322 p.
88. *Martynyuk A.A.* An exploration of polydynamic of nonlinear equations on time scales // ICIC Express Letters. – 2008. – **2,** N 2. – P. 155 – 160.
89. *Martynyuk A.A.* Stability in the models of real world phenomena (Survey) // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2011. – **11**, N 1. – P. 7 – 52.
90. *Martynyuk A.A.* Direct Lyapunov method on time scales // Communications in Applied Analysis. – 2013. – **17**, N 3&4. – P. 483 – 502.
91. *Martynyuk A., Chernetskaya L. and Martynyuk V.* Weakly Connected Nonlinear Systems. Boundedness and Stability of Motion. – Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2013. – 212 p.
92. *Martynyuk A.A., Lukyanova T.A., Rasshivalova S.N.* On stability of Hopfield neural network on time scales // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2010. – **10**, N 4. – P. 397 – 408.
93. *Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Yu.A.* Uncertain Dynamical Systems. Stability and Motion Control. – Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. – 296 p.
94. *Martynyuk A.A., Stavroulakis I.P.* Generalized stability of motion of impulsive Lurie-Postnikov systems with structural perturbations // J. of Appl. Math. and Stoch. Anal. – 1998. – **11**. – P. 481 – 492.
95. *Martynyuk A.A., Stavroulakis I.P.* Stability analysis with respect to two measures of impulsive systems under structural perturbations // Укр. матем. журнал. – 1998. – **51**. – С. 1476 – 1484.
96. *Massera J.L.* Contribution to stability theory // Annals of Math. – 1956. – **64**, N 1. – P. 182 – 206.
97. *Michel A.N.* Recent trends in the stability analysis of hybrid dynamical systems // IEEE Trans. on Circuits and Systems – 1: Fundamental Theory and Applications – 1999. – **46**. – P. 120 – 134.
98. *Michel A.N., Miller R.K.* Qualitative analysis of large scale dynamical systems. – New York: Academic Press, Inc., 1977. – 289 p.
99. *Michel A.N., Wang K., Hu B.* Qualitative Theory of Dynamical Systems. The Role of Stability Preserving Mappings. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 707 p.
100. *Nersesov S.G., Haddad W.M.* Control vector Lyapunov functions for large-scale impulsive dynamical systems // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. – 2007. –**1**. – P. 223 – 243.
101. *Pavella M., Ernst D., Ruis-Vega D.* Transient Stability of Power Systems. A Unified Approach to Assessment and Control. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 237 p.
102. *Peleties P., De Carlo R.* Asymptotic stability of m -switched systems using Lyapunov-like functions. – Proc. of the 1991 American Control Conf., 1991. – P. 1679 – 1684.
103. *Potzsche C., Siegmund S., Wirth F.* A spectral characterization of exponential stability for linear time-invariant systems on time scales // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2003. – **9,** N 5. – P. 1223 – 1241.
104. *Ribbens-Pavella M.* Transient stability of multimachine power systems by Liapunov's direct method // IEEE PES Winter Meeting. Conf. Paper, 1971. – P. 1 – 9.

105. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive Differential Equations. – Singapore: World Scientific, 1995. – 462 p.
106. *Shen J.H.* Razumikhin techniques in impulsive functional differential equations // Nonlinear Analysis. – 1999. – **36**. – P. 119 – 130.
107. *Shen J., Luo Z., Liu X.* Impulsive stabilization of functional differential equations via Liapunov functionals // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – **240**. – P. 1 – 5.
108. *Shen J., Yan J.* Razumikhin type stability theorems for impulsive functional differential equations // Nonlinear Analysis. – 1998. – **33**. – P. 519 – 531.
109. *Sheng Q.* A view of dynamic derivatives on time scales from approximations // J. Difference Equations and Applications. – 2005. – **11,** N 1. – P. 63 – 81.
110. *Šiljak D.D.* Large-Scale Dynamic Systems. Stability and Structure. – New York: North-Holland, 1978. – 416 p.
111. *Smart D.* Fixed Point Theorems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. – 100 p.
112. *Stamova I.* Stability Analysis of Impulsive Functional Differential Equations. – Berlin: de Gruyter, 2009. – 230 p.
113. *Wang Q.* Stability and Boundedness of Impulsive Systems with Time Delay. – PhD Thesis, Univ. of Waterloo, Ontario, Canada, 2007. – 204 p.
114. *Wang L., Zou X.* Exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks // Neural networks. – 2002. – **16**. – P. 415 – 422.
115. *Witsenhausen H.S.* A class of hibrid-state continuous-time dynamic systems // IEEE Trans. Autom. Control. – 1966. – **11**. – P. 161 – 167.
116. *Yan J., Shen J.* Impulsive stabilization of functional differential equations by Lyapunov–Razumikhin functions // Nonlinear Analysis. – 1999. – **37**. – P. 245 – 255.
117. *Yoshizawa T.* Stability Theory by Liapunov's Second Method. – Tokyo: The Math. Soc. of Japan, 1966. – 223 p.
118. *Zhang J.* Global stability analysis in Hopfield neural networks // Appl. Math. Let. – 2003. – **16**. – P. 925 – 931.

Поступила 05.05.2014 Утверждена в печать 19.02.2015